

1. 命題と証明

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学プログラム

本授業「離散数学」の大局的目標

数学リテラシーをつけること

誤った論理を見破ったり、うその証明を見抜けること

コンピュータサイエンスにおける基礎を身に付けること

具体的目標

- 1 数学における基本的な用語 (命題, 述語, 集合, 論理, 写像, 関係, グラフ) を正しく使うことができる
- 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる
- 3 述語, 集合, 論理, 写像, 関係, グラフの関係を理解する

本授業の進め方

講義

- 授業は主にスライドで進めます.授業スライドは
<http://www.ai.lab.uec.ac.jp/%E9%9B%A2%E6%95%A3%E6%95%B0%E5%AD%A6/>

にPDFでおいであります. ダウンロードして使ってください.

登学不安のある学生さんへ

登学不安のある学生は

<http://www.ai.is.uec.ac.jp/lecture/> より
オンデマンドで資料をダウンロードし、
学習してください。

最終テストは対面で実施しますのでその日だけ登校して
受検してください。

成績評価は 通常の学生と同じ基準で採点いたします。

本授業の構成

第1回 10月5日：第1回 命題と証明

第2回 10月12日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号

第3回 10月19日：第3回 命題論理

第4回 10月26日：第4回 述語論理

第5回 11月2日：第5回 述語と集合

第6回 11月9日：第6回 直積と冪集合

第7回 11月16日：第7回 様々な証明法 (1)

11月23日：調布祭の後片付けで休み

第8回 11月30日：第8回 様々な証明法 (2)

第9回 12月7日 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)

第10回 12月14日：第10回 写像 (関数) (1)

第11回 12月21日：第11回 写像 (関数) (2)

第12回 1月4日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、

グラフによる表現

第13回 1月18日：第13回 同値関係

第14回 1月25日：第14回 順序関係：半順序集合、

ハッセ図、全順序集合、上界と下界

第15回 2月1日：第15回 期末試験

教科書：なし。 講義資料を毎回用意する

参考書：

イラストで学ぶ離散数学、伊藤大雄、講談社

論理と集合から始める数学の基礎、嘉田 勝、日本評論社

はじめての離散数学、小倉久和、近代科学社

離散数学への招待 :J.マトウシェク/J.ネシエトリル
丸善出版

やさしく学べる離散数学:石村園子 共立出版株式会社

コンピュータサイエンスのための離散数学:守屋悦朗
サイエンス社

高校までの学び

- 高校までは正解が決まっていて教師は正解を知っている。現実世界では正解を知らない相手に説明する。高校では生徒が間違えた時に教師が質問やコメントをするが、現実世界では相手はあなたの説明が論理的でなかったりわからない場合に質問をしてくる。決して間違えているかどうかを議論しているわけでない。
- 高校までは正答するかどうか重要。現実世界では論理的に説明できるかどうか重要。論理的に説明できることが「わかっている」ことのエビデンスになる。
- 高校までの数学は、決められたルールに従って（ルールの意味は分からなくても）問題を解く。大学ではルールがなぜ成り立つかを理解することのほうが重要になる。

クイズ

小中高の先生は教員免許がないと教員になれません。

大学教員になるのに国家試験のような資格はあるのでしょうか？

クイズ

小中高の先生は教員免許がないと教員になれません。

大学教員になるのに国家試験のような資格はあるのでしょうか？

いっさいありません！！

クイズ

小中高の先生は学習指導要領に定められた教科書に基づいて教えます。大学でも共通の教科書はありますか？

クイズ

小中高の先生は学習指導要領に定められた教科書に基づいて教えます。大学でも共通の教科書はありますか？

教科のシラバスの項目が妥当であれば、教員の裁量で教科書を含めて内容を決められます。

ジョン スチュアート ミル 大学教育について：岩波文庫

大学では、科学的知識ではなく、
科学的態度と科学的方法を学ぶべき。

真実を追求する態度、方法、プレゼンテーションの仕方、新しい事実の受け入れ方などを学ぶ

数学は形式科学

●経験科学

自然科学が現実世界を扱い、観測・観察から得られた知識をもとに結果が導き出される。

●形式科学

経験に基づかず、記号システムによって記述される抽象的構造であり、結果は公理から推論のみによって導き出される。

数学は本当に経験に基づかないのか？

本授業を学べば、数学も経験科学の一つで人間学の一つともいえることがわかります!!

本日の目標

1. 本授業のねらい
2. 離散数学とは何か？
3. 証明とは何か？
4. 命題とは何か？
5. 公理とは何か？

1. 離散数学

連続的な値である実数ではなく、離散的な値（整数、自然数、カテゴリ）などを扱う数学。海外では、Mathematics for Computer Scienceのコースに匹敵するので、現実には実数も扱う。

2. 証明とは？

「証明」は、真理(Truth)を立証するための手法である。

証明の方法は分野によって異なる。

- 法的真理は、法廷で示される証拠と法律、陪審員、裁判官によって決定される。
- 科学的真理は、実験によって確認される。
- 哲学的真理は、厳密な論証の積み重ねによって導かれる。
- 宗教的真理は、歴史的な宗教のコミュニティにより決定される。
- 組織的真理は、権威により決定づけられる。

数学での証明の定義

Def

「証明」とは 基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論 (Logical Deduction)の連鎖である。

注意)

Def = Definition, 定義のこと

三平方の定理 $a^2 + b^2 = c^2$

よく知ってます！！

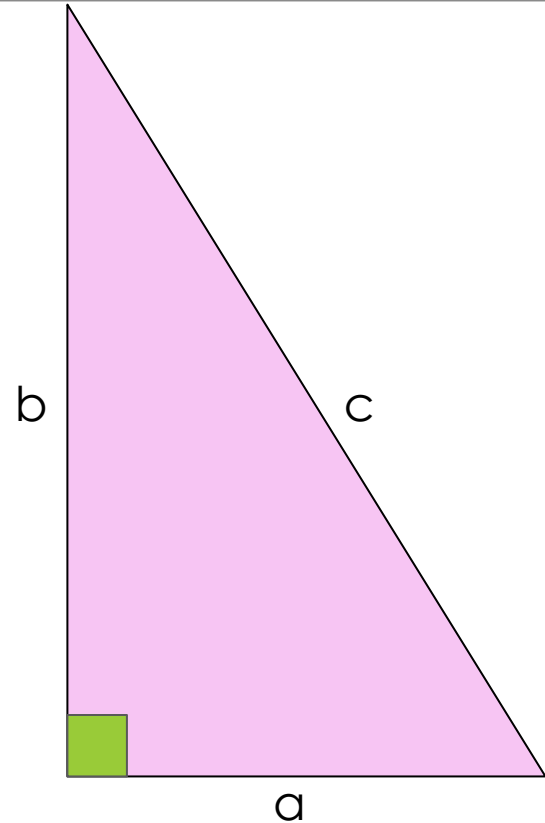


図1.

証明

図1の三角形を図2のように4つ並べる。
外側に一辺が $a + b$ の正方形（以下「大正方形」）が、内側に一辺が c の正方形（以下「小正方形」）ができる。

（大正方形の面積）＝（小正方形の面積）＋
（直角三角形の面積） $\times 4$

大正方形の面積は $(a + b)^2$ 、小正方形の面積は c^2 、直角三角形4個の面積の合計は $ab/2 \times 4 = 2ab$

これらを代入すると $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$

従って、 $a^2 + b^2 = c^2$

注) ■ は証明の完了を示す

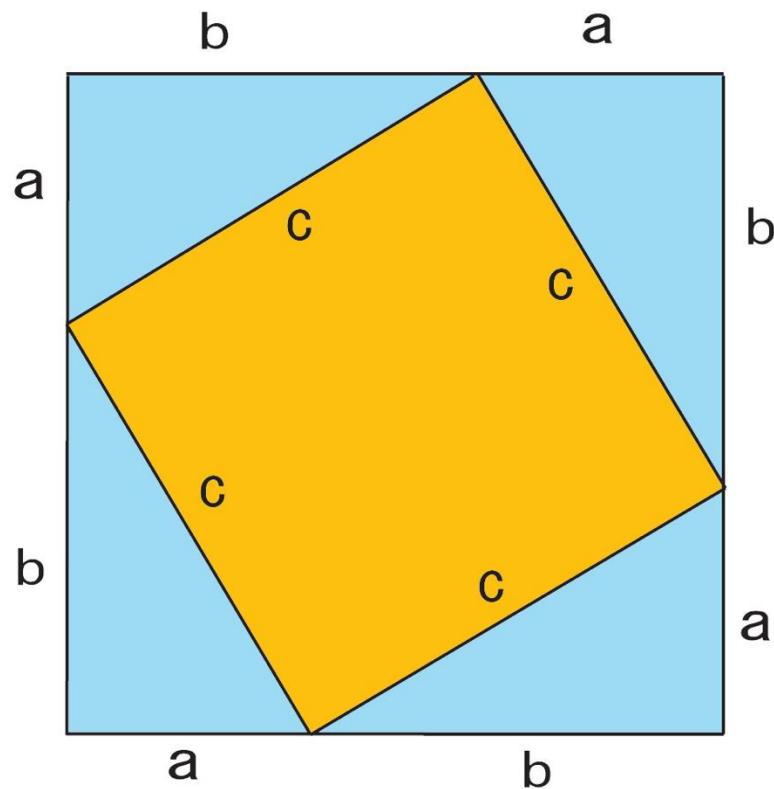


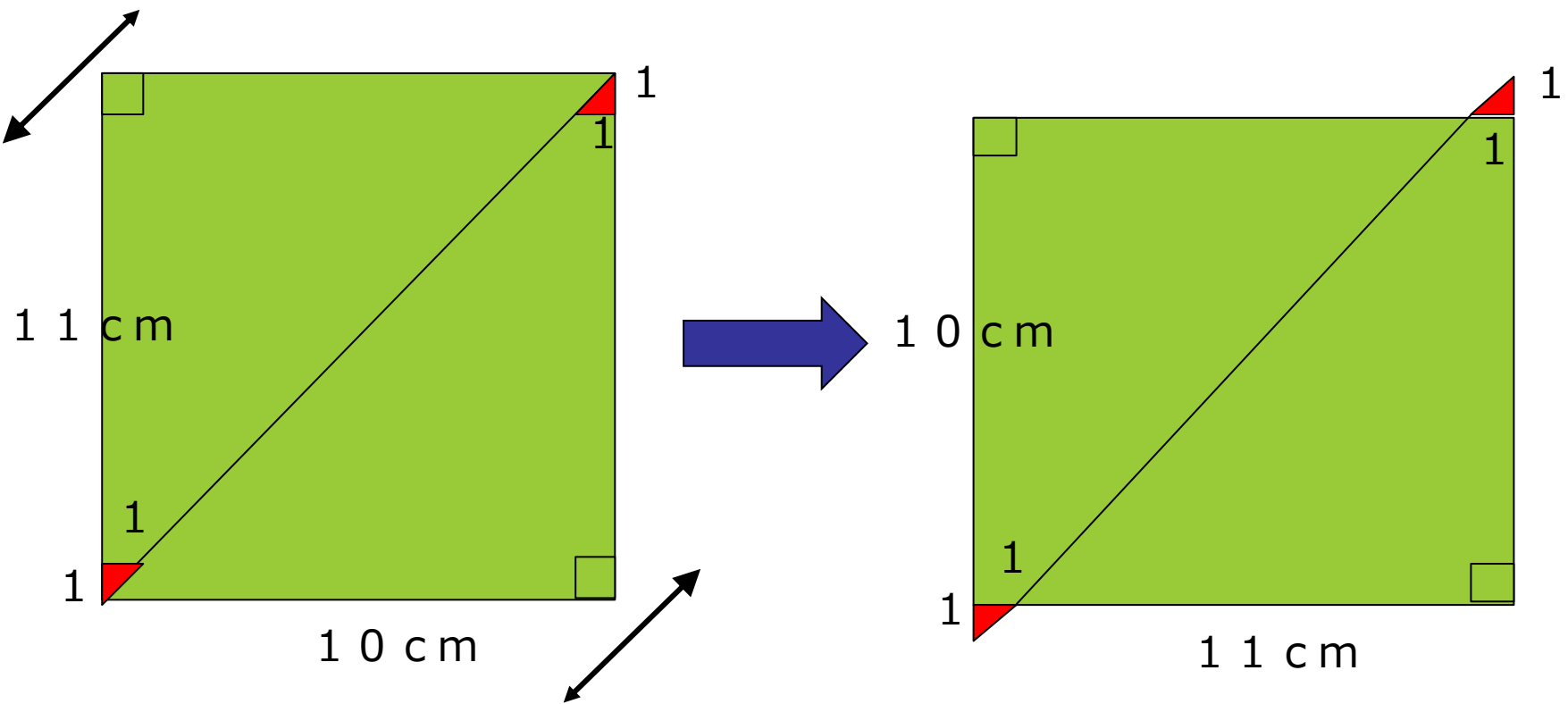
図2

三平方の定理

最もよく知られている証明の一つ。

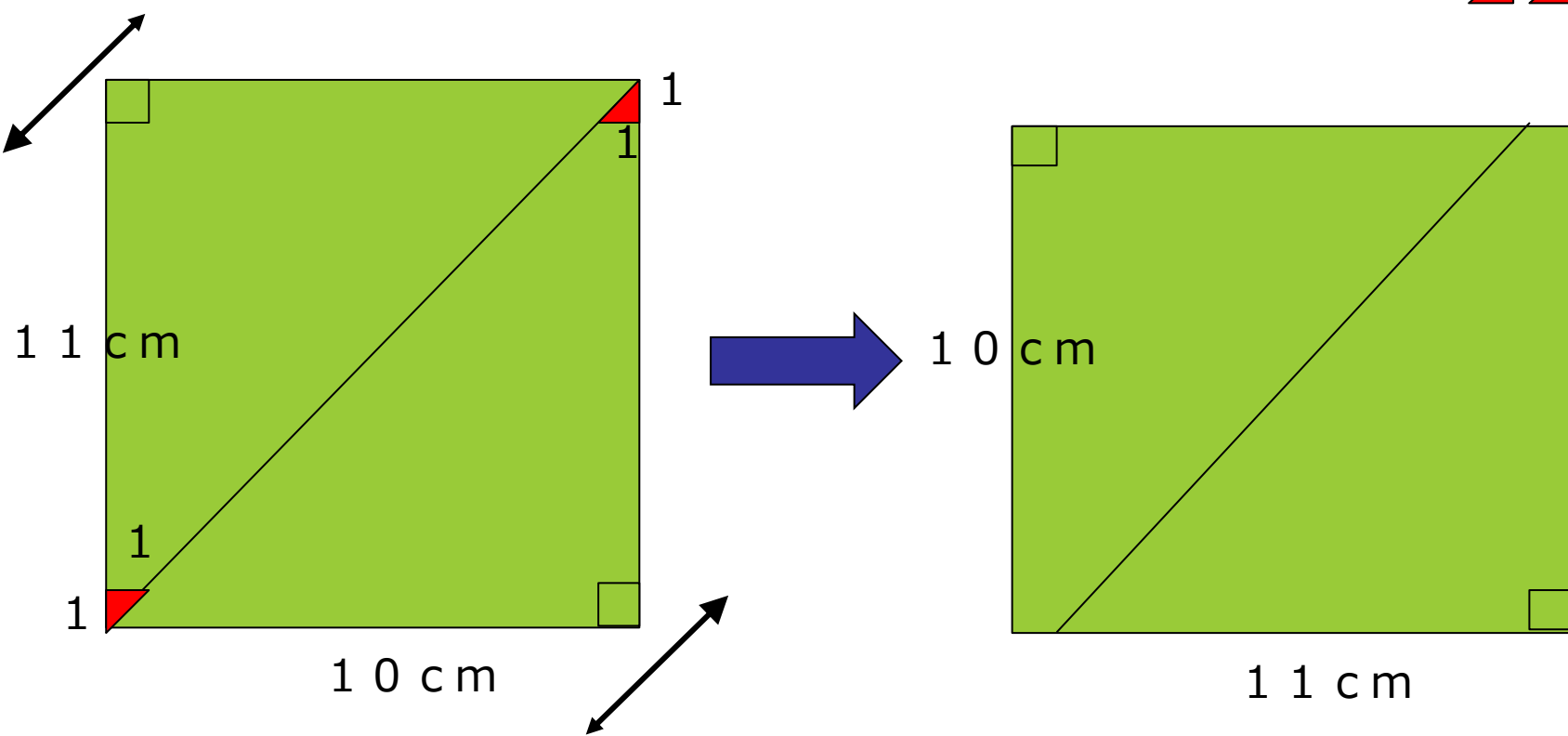
これ以外にも 1 0 0 種以上の証明が知られている。

紙を無限に生成しつづける方法

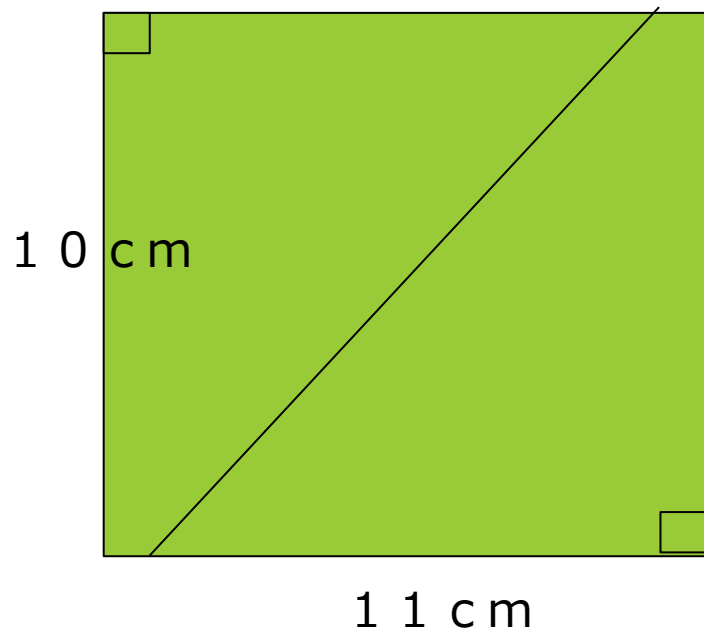


紙を無限に生成しつづける方法

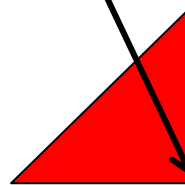
もうけ 



どこが間違い？



ここが90度ではない



定理 $0=1$ である

$x = 0$ とする

①

両辺に 1 を加えて

$$x + 1 = 1$$

両辺に $x - 1$ をかけて

$$x^2 - 1 = x - 1$$

両辺に 1 を加えて

$$x^2 = x$$

両辺を x で割って

$$x = 1$$

①より

$$0 = 1$$



解説

証明の「両辺を x で割って」の部分で「すべての実数は0で割れない」ので、この証明は間違いと考えた人が多いかもしれない。しかし、「0で割れない」はどのように証明できるのであろうか？

たとえば $\frac{1}{0}$ を考えよう。 $\frac{1}{0} = y$ として移行すると

$1 = 0 \times y$ 。 $1 = 0 \times y$ を満たす y が存在しないといけなない。どんな実数 y でも $0 \times y = 0$ となり、 $1 = 0 \times y$ を満たす実数 y が存在しないので 0 で割ることはできないと証明できる。しかし、この証明には暗黙のうちに $1 \neq 0$ を当然の事実として扱っている。もし「 $0 = 1$ 」が成り立つのであれば、 $1 = 0 \times y$ を満たす実数 y はすべての実数について成り立つ。すなわち、命題「すべての実数は0で割れない」は $1 \neq 0$ を根拠としていると言ってもよい。

前ページの定理は、証明しようとしている命題「 $0 = 1$ 」のほうが命題「すべての実数は0で割れない」より基礎にある。 $1 \neq 0$ は数学の基底を構築していることに注意してほしい。結果として「 $0 = 1$ 」は演算の定義の前提を覆しているので、証明できない。全ページの定理の間違ひは「「 $0 = 1$ 」でないので」が正答となる。すなわち、「「 $0 = 1$ 」でない」は人間の共通の基礎的判断である。人間の共通の基礎的判断は数学の基礎を構築し、証明は不可能である。

定理 $1 = -1$ である

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} \\ &= (\sqrt{-1})^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$



再掲　　： 証明の定義

Def

「証明」とは 基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論 (Logical Deduction)の連鎖である。

3. 命題(Proposition)

Def

命題 (Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

次の記述は命題か？

- $1 + 1 = 2$
- $2 + 3 = 6$
- 調布市は東京ではない
- 大谷選手はすごい！！
- びっくりした！！
- このレストランのステーキはおいしい！！
- 犬は動物である
- $x^2 - 1 = 0$

4. 公理

Def 公理とは証明された真の命題のこと
公理の種類

1. 定理 (Theorem) 非常に重要な命題
2. 補題 (Lemma) 重要な命題を証明するために必要な公理の証明
3. 系 (corollary) すでに証明されている定理から容易に証明できる命題

5. 高校での証明と大学での証明

次の命題は偽であることを証明せよ。

「すべての実数 x について

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

嘉田勝 (数学セミナー2009 年5 月号)

高校での解答

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ だから, $2 < x < 3$ のとき, $x^2 - 5x + 6 < 0$ が成り立つ.

したがって, 「すべての実数 x について
 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 」

は偽である.



大学では 間違い

「すべての実数について $\sim$ が成り立つ」
の否定の証明はどのようにすればよいか？

大学では 間違い

「すべての実数について $\sim$ が成り立つ」の
否定の証明はどのようにすればよいか？



「ある実数 x について $\sim$ が成り立たない」ことを示せばよい。

ロジカル！！

大学での証明

実数 $x = \frac{5}{2}$ について, $x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{4}$ より

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ を満たさない実数 $x = \frac{5}{2}$ が存在する.

したがって, 「すべての実数 x について $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 」
は偽である.



高校生と大学生の差

- ◆高校生は計算結果をずらずら書けば点数がもらえる。
- ◆大学生は、本当に命題を証明しないと正解にならない。
- ◆高校生は自分の思考の順に証明をずらずら書く。
- ◆大学生は説得するための順序をまず考える。

高校や大学入試での数学で覚えた「自分が考えた過程を書く」という方法を改めて、「読み手を説得するために書く」という姿勢に転換することが重要 嘉田勝 （数学セミナー2009 年5 月号）

証明法のパターン（7ー8回目）

- ① 全称命題の証明
- ② 存在命題の証明
- ③ 背理法による証明
- ④ 含意「ならば」型命題の証明
- ⑤ 場合分けによる証明
- ⑥ 含意命題の否定の証明
- ⑦ 集合包含関係の証明
- ⑧ 複数量化子の命題の証明

証明法のパターン（7ー8回目）

- ① 全称命題の証明
- ② 存在命題の証明
- ③ 背理法による証明
- ④ 含意「ならば」型命題の証明
- ⑤ 場合分けによる証明
- ⑥ 含意命題の否定の証明
- ⑦ 集合包含関係の証明
- ⑧ 複数量化子の命題の証明

このパターンを学べば本当の数学の証明
ができるようになります！！

6. 本日のまとめ

1. 本授業のねらい
2. 離散数学とは何か？
3. 証明の定義
4. 命題の定義
5. 公理

演習問題

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(a)

$$1/8 > 1/4$$

証明

$$3 > 2$$

$$3 \log_{10}(1/2) > 2 \log_{10}(1/2)$$

$$\log_{10}(1/2)^3 > \log_{10}(1/2)^2$$

$$(1/2)^3 > (1/2)^2$$

$$1/8 > 1/4$$

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(b) $100 \text{ ¢} = 1 \$$ である。しかし、以下が成り立つ。

$$1 \text{ ¢} = 1 \$$$

証明

$$1 \text{ ¢} = 0.01 \$ = (0.1 \$)^2 = (10 \text{ ¢})^2 = 100 \text{ ¢} = 1 \$$$



問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(c) a と b は二つの等しい実数である。そうであれば $a=0$ である。

証明

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

$$(a - b)(a + b) = (a - b)b$$

$$a + b = b$$

$$a = 0$$

■

問題2

算術平均と幾何平均の間には任意の $a, b \geq 0$ について以下の性質がある。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

以下の証明のどこが間違いか？

証明 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つと仮定する.

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad \text{より}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad \text{より}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad \text{より}$$

$$(a-b)^2 \geq 0.$$

仮定から導かれた $(a-b)^2 \geq 0$ は真である.

従って命題は真である.



問題3 次のうち命題はどれか？

- (1) 坂本龍馬は土佐の人であった。
- (2) 地球外の天体に生命が存在するかもしれない。
- (3) $f(x) = x^2 + x - 2$ とすると $f(2) = 0$
- (4) アインシュタインはかしこい。
- (5) $n \geq 3$ の整数のとき, $a^n + b^n = c^n$ を満たす実数 (a, b, c) は存在しない。
- (6) $100000 \neq 100001$
- (7) $100000 \doteq 100001$