13.　同値関係

植野真臣

電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

第１回　10月 6日：第1回 命題と証明
第２回　10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月20日：第3回 命題論理
第４回　10月27日：第4回 述語論理
第５回　11月　3日：第5回 述語と集合
第６回　11月10日：第6回 直積と冪集合　(出張中につきHPの資料でオンデマンドで自習してください)
第７回　11月17日：第7回 様々な証明法 (1)
　11月24日：調布祭の後片付けで休み

第８回　12月 1日：第8回 様々な証明法 (2)

第9回 12月8日　様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月15日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月22日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　1月5日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、

グラフによる表現
第１３回　1月19日：第13回 同値関係
第１４回　1月26日：第14回 順序関係：半順序集合、

ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　2月2日：第15回 期末試験

１．本日の目標

①　整数の合同
②　剰余類
③　同値関係
④　反射律
⑤　対称律
⑥　推移律
⑦　同値類

１. 関係（二項関係）

再掲５章：

Def 1.

二つの集合U,Vの直積集合$U \times V$の部分集合RをUからVへの「（二項）関係」という.

また，　$R \ni (a,b)$のとき　aRb ：aとbは関係ある

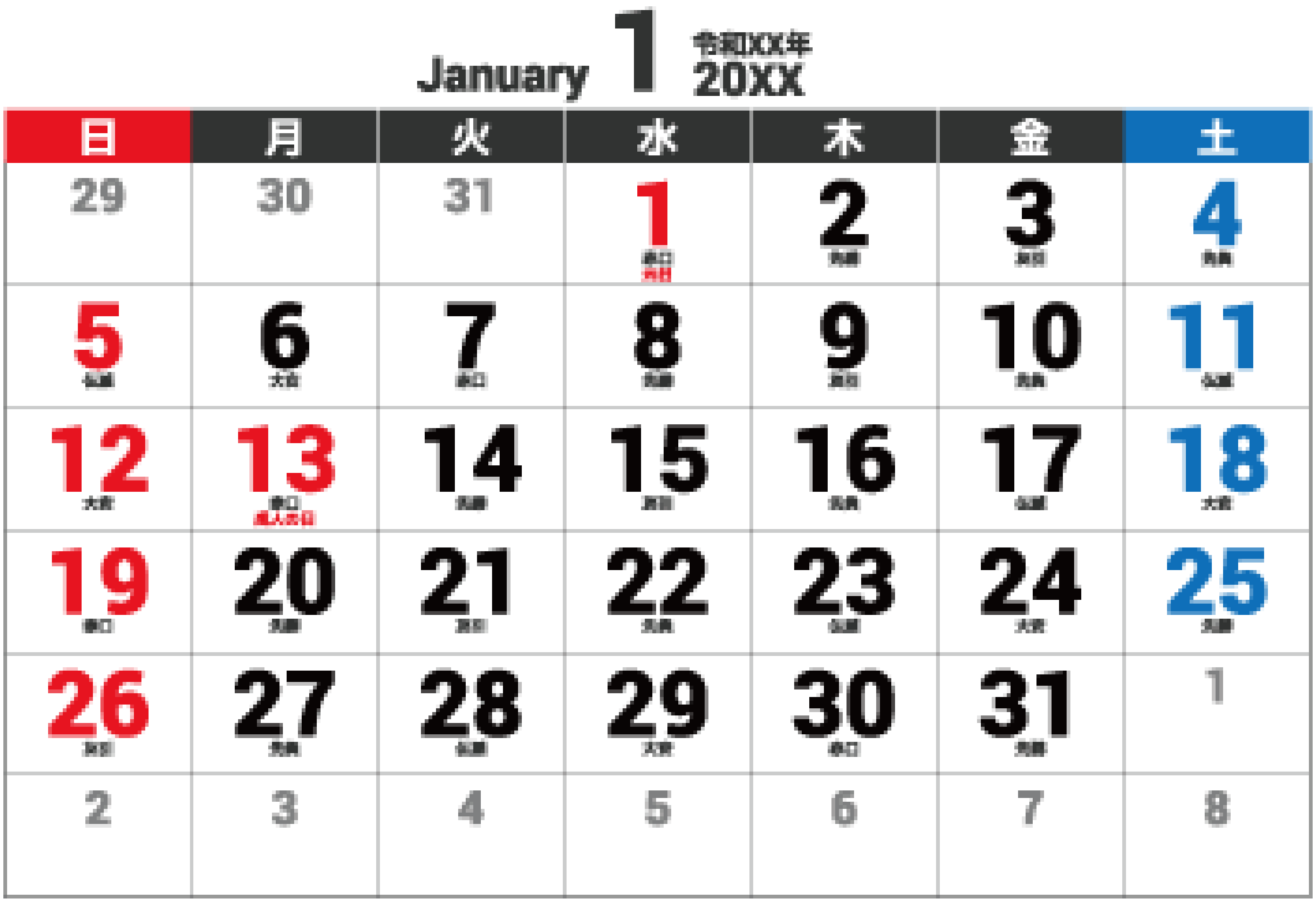
　　　$R \not\ni (a,b)$のとき　$a\not{R}b$ ：aとbは関係なし

と書く.

2. 同値関係のイメージ

二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

例：カレンダーの同値


January 1
令和XX年
20XX
日 月 火 水 木 金 土
29 30 31 1 2 3 4
5 6 7 8 9 10 11
12 13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24 25
26 27 28 29 30 31 1
2 3 4 5 6 7 8

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとbが同じ曜日である関係を定式化せよ。

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとb が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^+$について

aRb ：$\exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとb が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^{+}$について

aRb ：$\exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$

このような関係を「aとbが7を法として合同である」と呼ぶ。

3.整数の合同

整数の周期的な分類において同じ分類に入るもの。

離散数学の応用では、最も重要な概念の一つ。

3. 整数の合同

Def 1. 合同な整数

$m, n, p \in \mathbb{Z}$について

$$\exists q \in \mathbb{Z}[(m-n) = pq]$$

のとき，「mとn はpを法として合同である」といい，

$$m \equiv_p n$$

と書く。$\equiv_p$が合同関係を示す演算子。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　○
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　○
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　〇
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。　〇
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　○
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。　○
4. 18と15は3を法として合同である。　○
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　○
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。　○
4. 18と15は3を法として合同である。　○
5. 121と110は3を法として合同である。　×

4. 整数の剰余類

Def 2.整数の剰余類

pを法とするnの剰余類とは，　$n \in \mathbb{Z}$について

$$[n]_p = \{m \in \mathbb{Z} | \exists q \in \mathbb{Z}[(m-n) = pq]\}$$

と定義される。

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1$

(2) $[3]_2$

(3) $[4]_3$

(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2) $[3]_2$

(3) $[4]_3$

(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ \cdots\}$

(3) $[4]_3$

(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$

(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$

(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$

(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$

(4) $[1]_{10} = \{\cdots, -9, 1, 11, 21, \cdots\}$

整数の合同の応用

1. 暗号理論（情報セキュリティ）

- **RSA暗号:** 巨大な2つの素数の積を法（mod）としたべき乗計算を利用
- **開鍵暗号**

2. ハッシュ関数とデータ管理

- **ハッシュテーブル:** 膨大なデータをメモリ上のどこに保存するか決める際、データの値をある数で割った「余り」をアドレス（住所）として使用。

3. チェックディジット（誤り検出）

- **ISBN（書籍番号）やバーコード:** 番号の最後の1桁は、前の数字を特定の規則で計算し、ある数（10や11など）で割った余り。
- **マイナンバーやクレジットカード:** 入力ミスがあった場合、合同式による計算結果が合わなくなるため、即座にエラーとして検出。

4. 乱数生成

- シミュレーションやゲームで使われる「擬似乱数」の生成。
- **線形合同法:** 前の数に一定の値を掛け、さらに足したものをある数で割った「余り」を次の乱数とする。

5. ツェラーの公式: 西暦・月・日から曜日を導き出す公式は、複雑な合同式の組み合わせで構成。

ここまでのまとめ

- 整数の合同とは、ある周期で同じ分類ができること
- 同値関係は、その一般化。
- 二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

↓

次に数学的に同値関係を定義する。

5. 同値関係

Def 3.

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

(1) 反射律 $\forall x \in U, xRx$

(2) 対称律 $xRy \rightarrow yRx$

(3) 推移律 $xRy \land yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R)を同値集合と呼ぶ。

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である
2. R　:違う住所に住んでいる
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$ ：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$ ：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　〇
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　〇
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

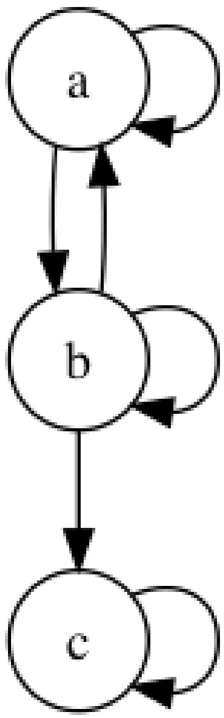
問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

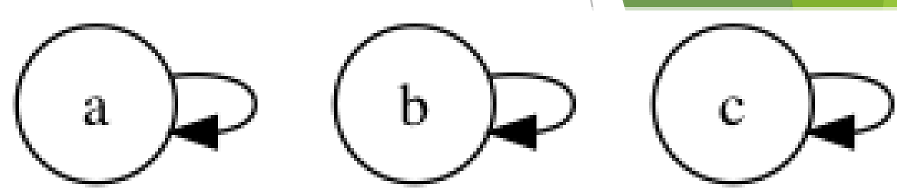
1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　○

問2　反射性を満たすものは

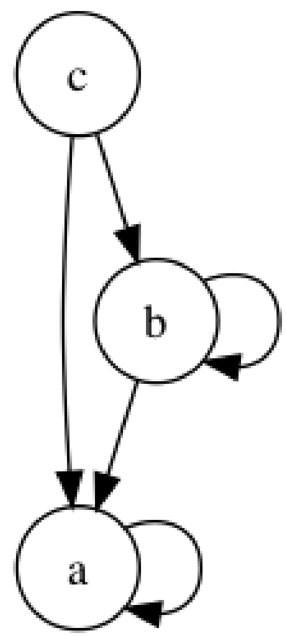
(1)



(2)

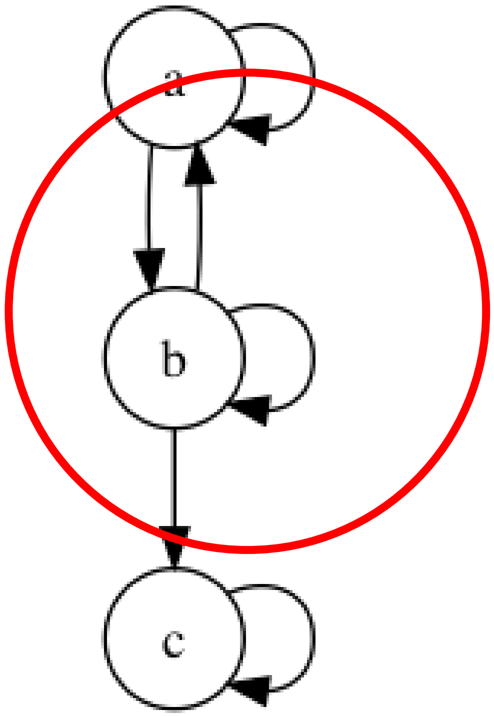


(3)

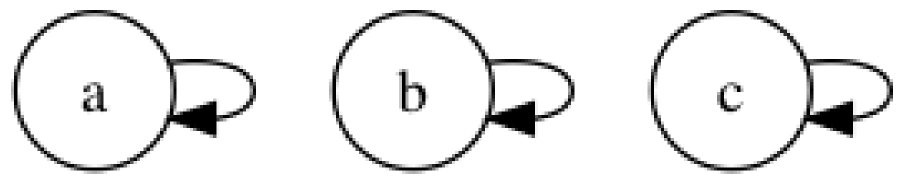


問2　反射性を満たすものは

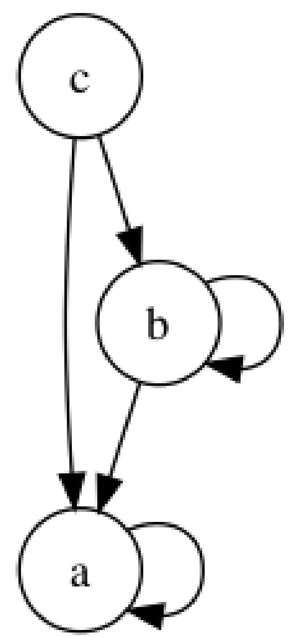
(1)



(2)

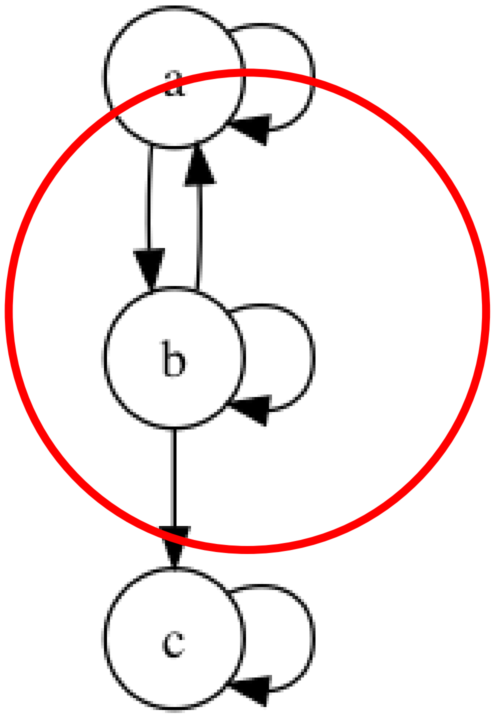


(3)

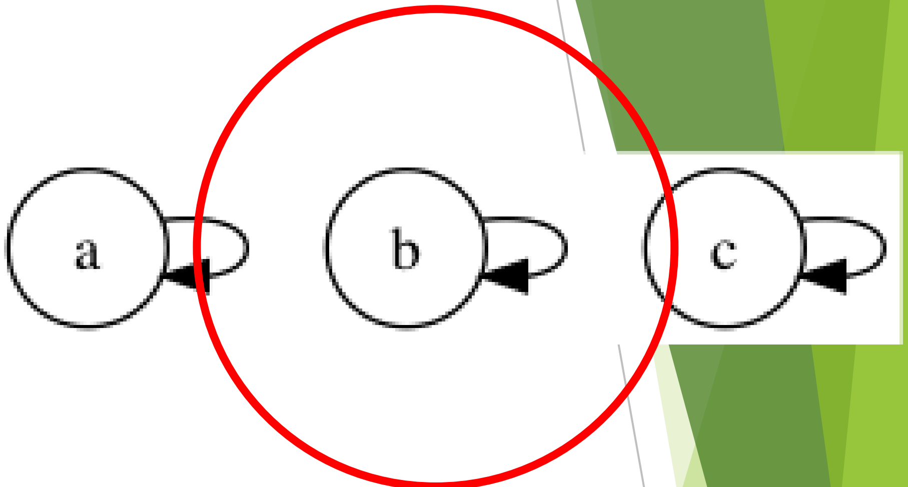


問2　反射性を満たすものは

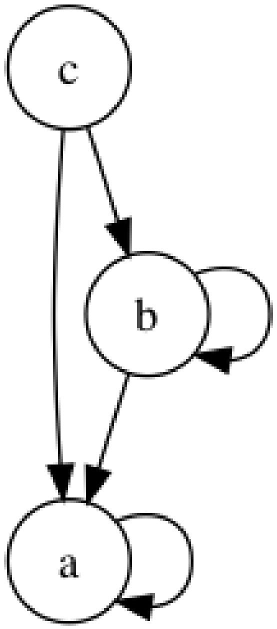
(1)



(2)

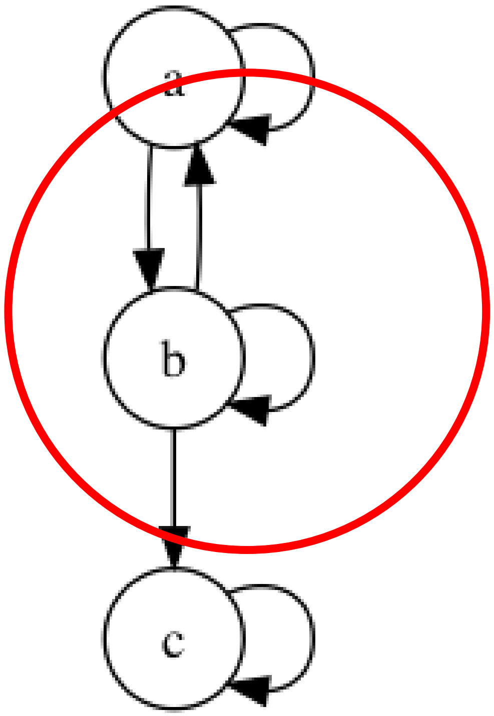


(3)

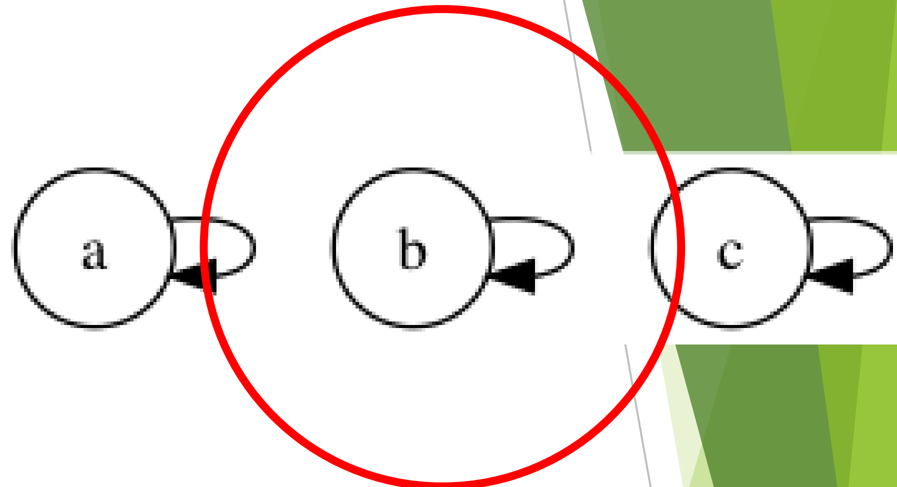


問2　反射性を満たすものは

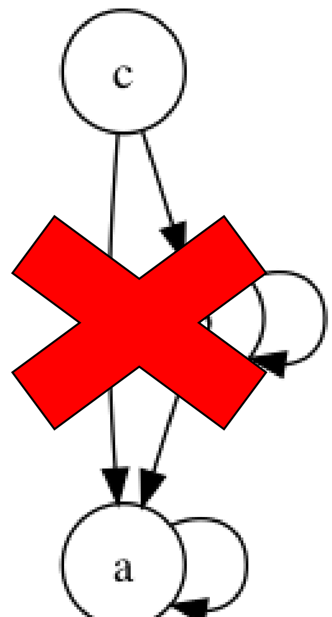
(1)



(2)



(3)



問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ (2) $R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

(3) $R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ (4) $R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1)\quad R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \text{[illegible]} & 1 \\ 1 & 1 & \text{[illegible]} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である
2. R:違う住所に住んでいる
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \le b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \ge 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　○
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である　〇
2. R:違う住所に住んでいる　〇
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　○
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　○
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である　〇
2. R:違う住所に住んでいる　〇
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　〇
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　×
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　○
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　○
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　×
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　○
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問4 対称性を持つものは？

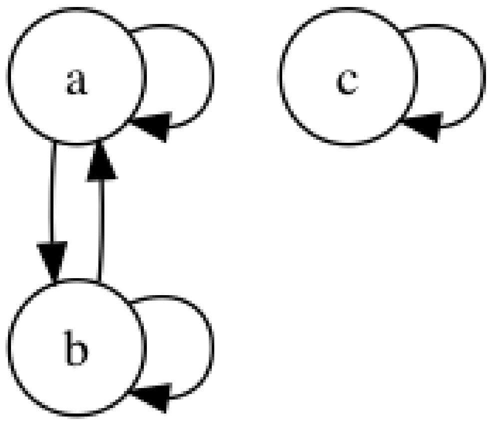
Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

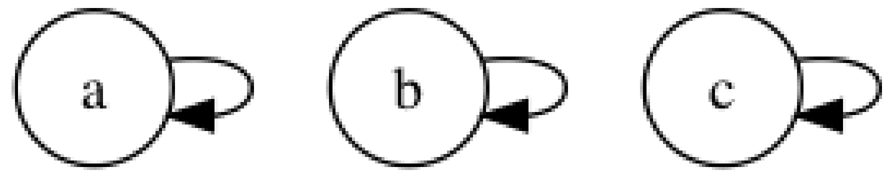
1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　○
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　○
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　×
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　○
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$　○

問5 対称性を持つものは？

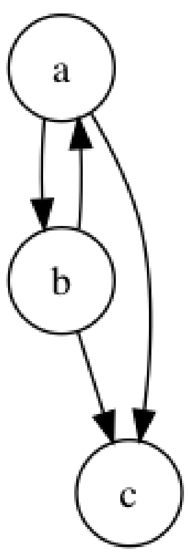
(1)



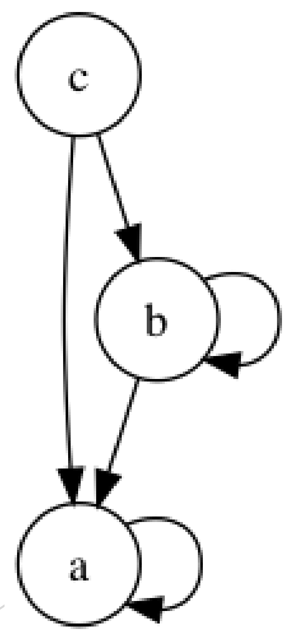
(2)



(3)

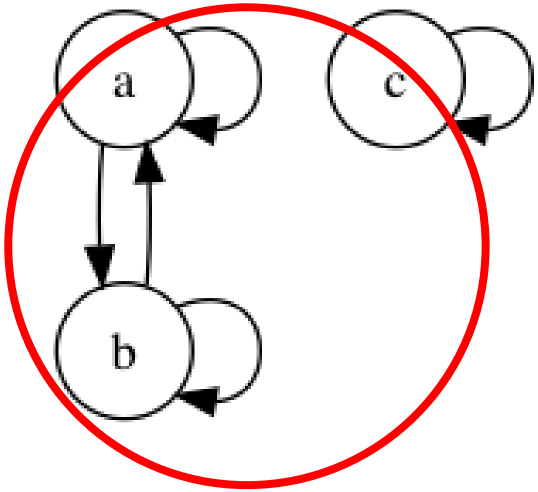


(4)

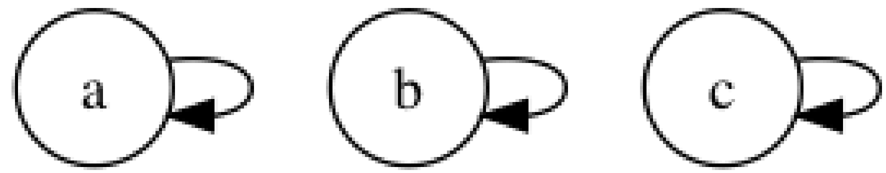


問5 対称性を持つものは？

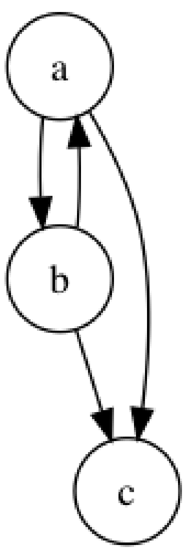
(1)



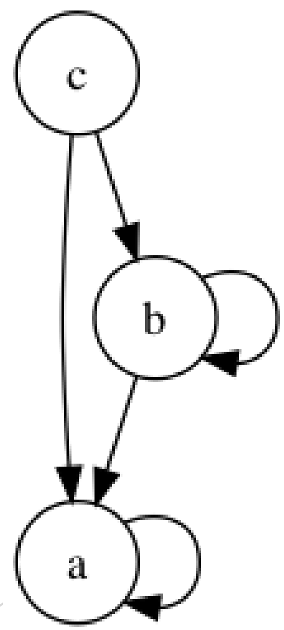
(2)



(3)

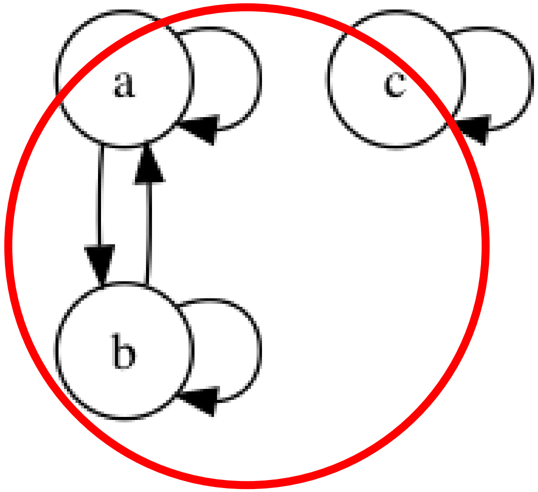


(4)

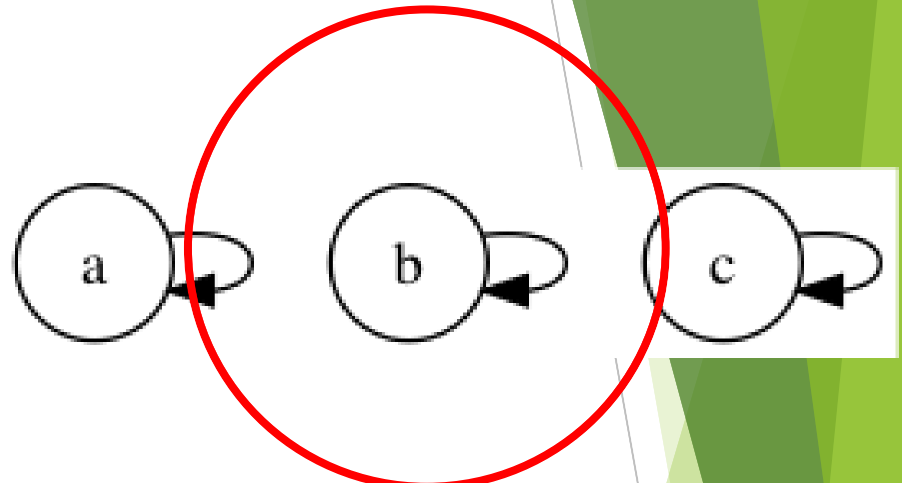


問5 対称性を持つものは？

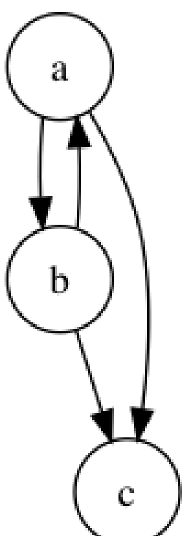
(1)



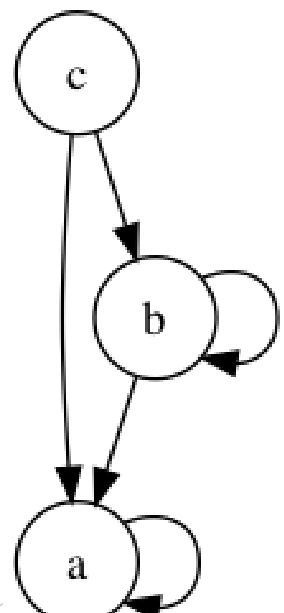
(2)



(3)

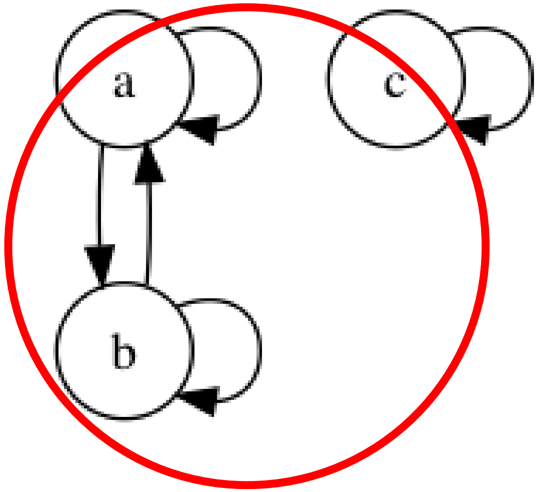


(4)

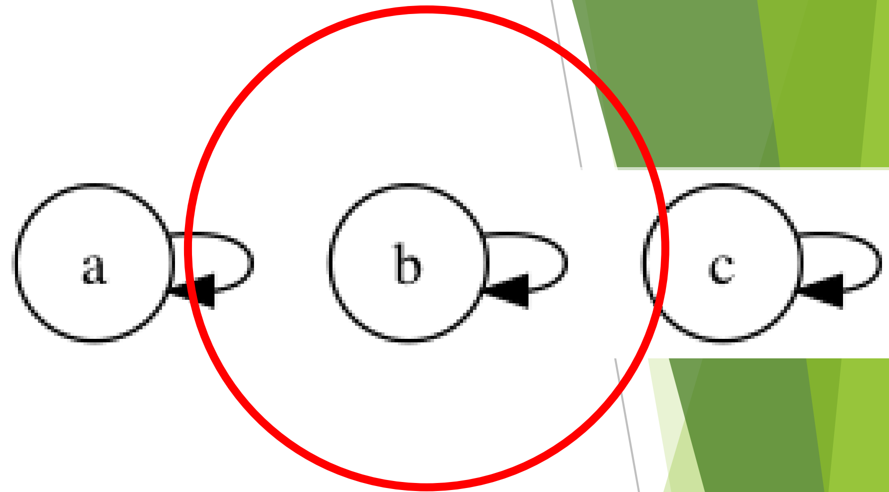


問5 対称性を持つものは？

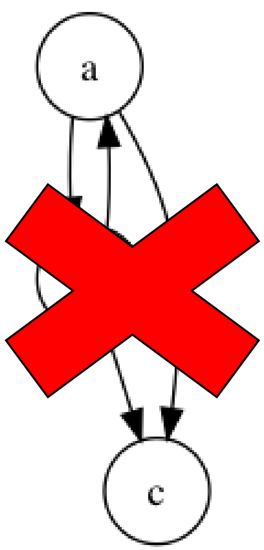
(1)



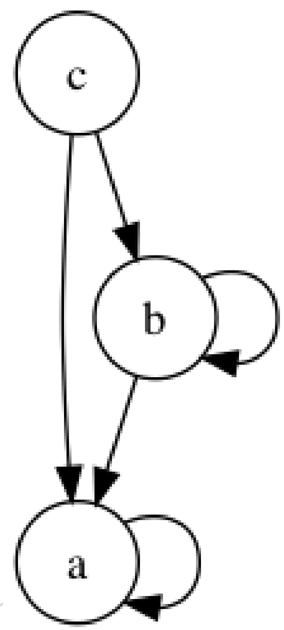
(2)



(3)

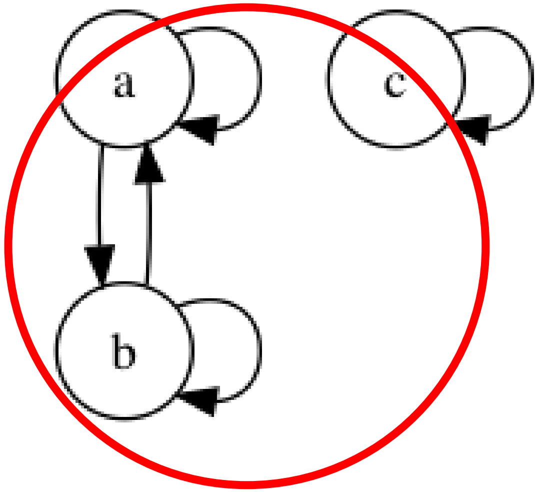


(4)

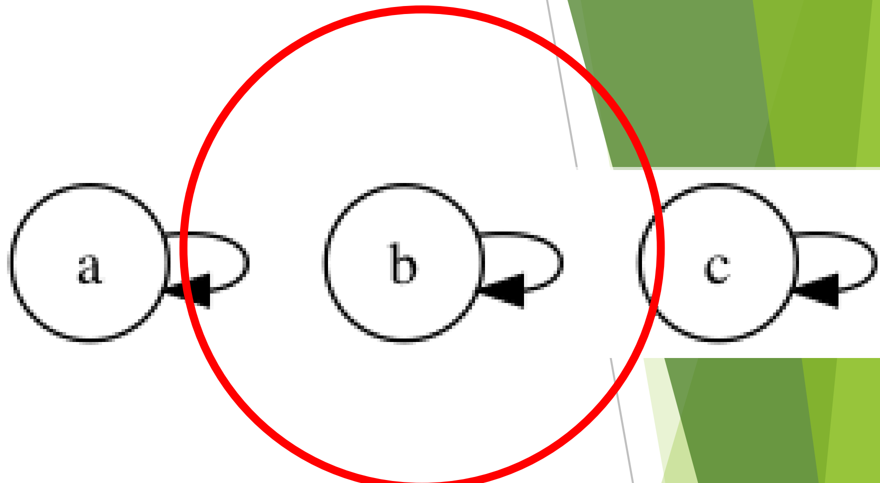


問5 対称性を持つものは？

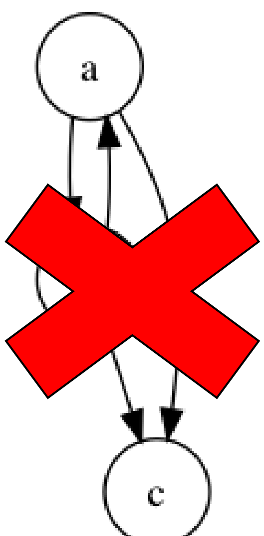
(1)



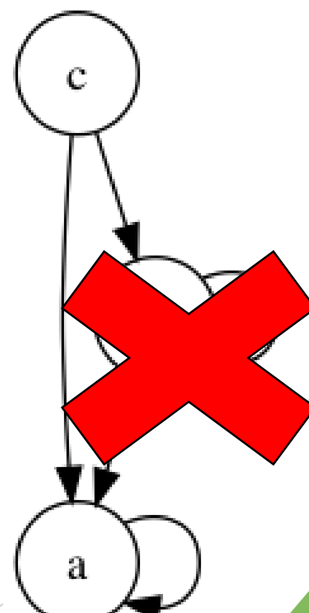
(2)



(3)



(4)



問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \text{[illegible]} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

$$(1)\quad R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\qquad (2)\ R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$(3)\ R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&\text{[illegible]}&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\qquad (4)\ R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&\text{[illegible]}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

問7　推移性を満たすものは?

Def　推移律　$xRy \land yRz \to xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である
2. R:違う住所に住んでいる
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def　推移律　　$xRy \wedge yRz \to xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である　　○
2. R:違う住所に住んでいる
3. R:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def　推移律　$xRy \wedge yRz \to xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　×
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def　推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　×
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def　推移律　$xRy \wedge yRz \to xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def　推移律　$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \wedge yRz \to xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　× 反例　$x = -1, y = 0, z = 1$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

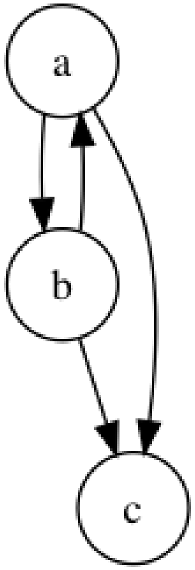
Def　推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

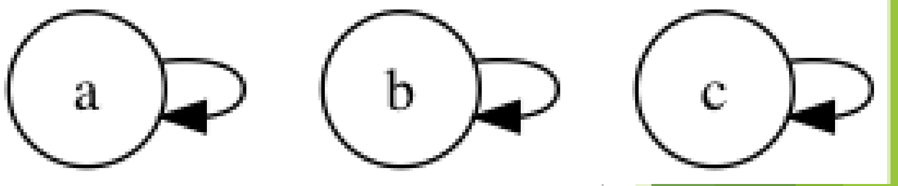
1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる　×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　× 反例　$x = -1, y = 0, z = 1$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$　○

問8　推移性を満たすものは

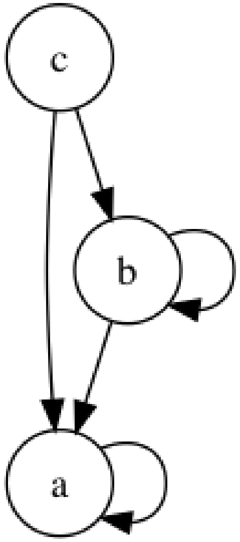
(1)



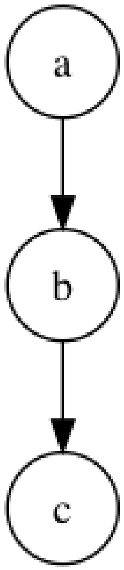
(2)



(3)

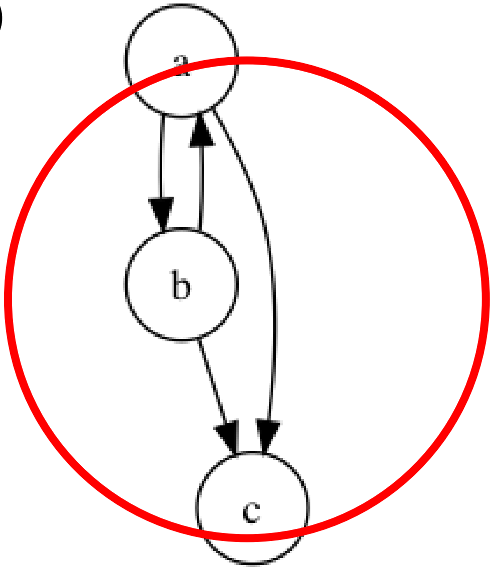


(4)

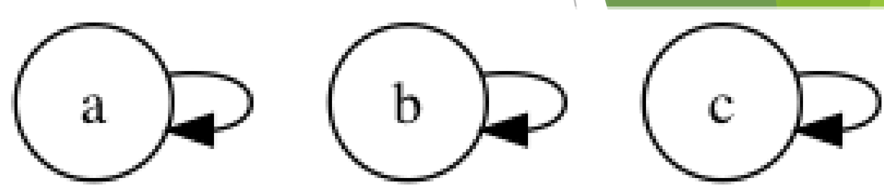


問8　推移性を満たすものは

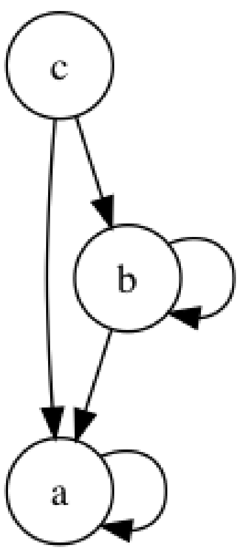
(1)



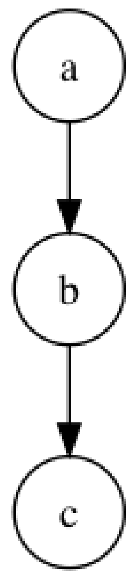
(2)



(3)

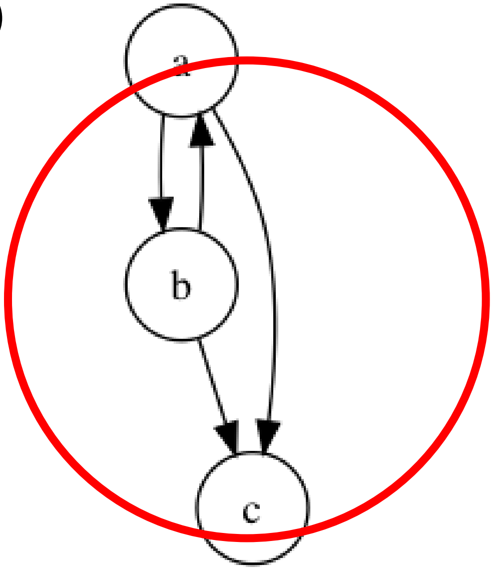


(4)

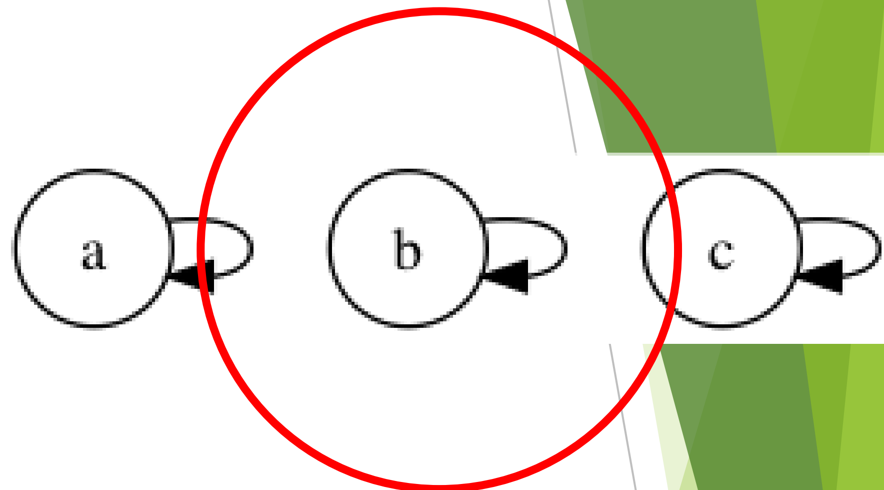


問8　推移性を満たすものは

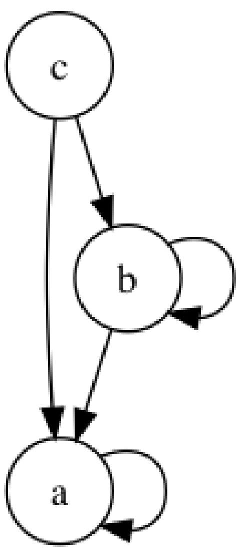
(1)



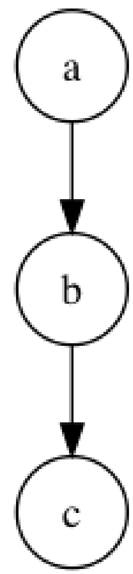
(2)



(3)

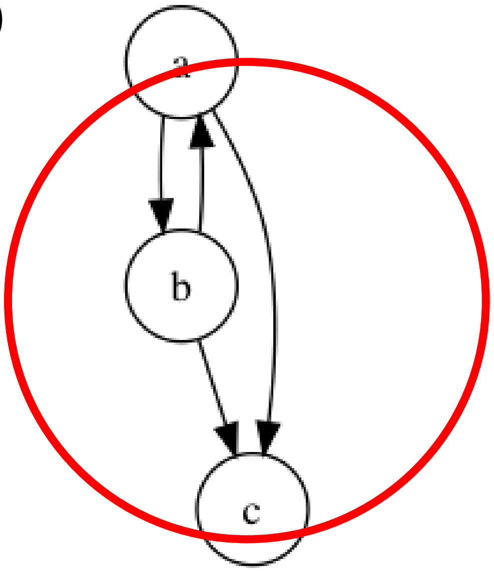


(4)

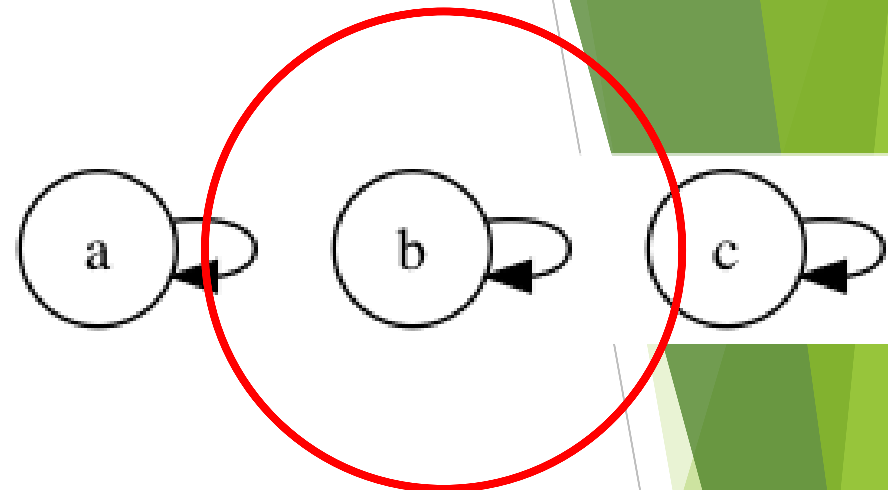


問8　推移性を満たすものは

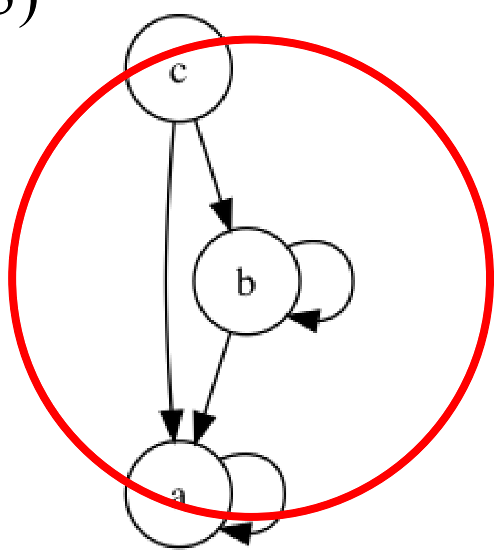
(1)



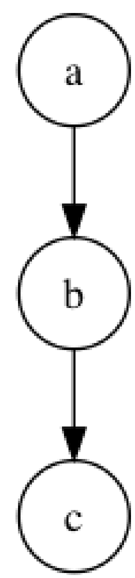
(2)



(3)

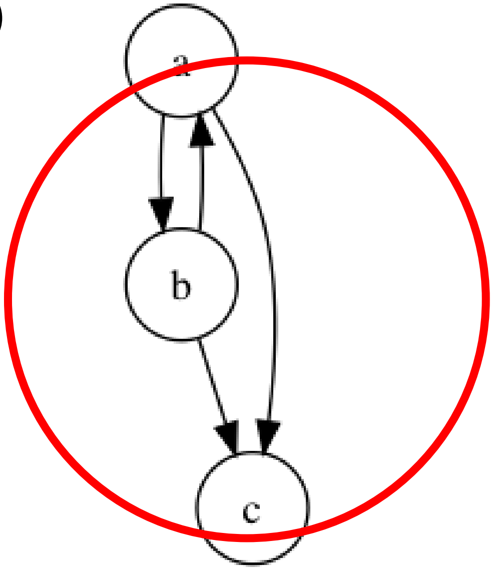


(4)

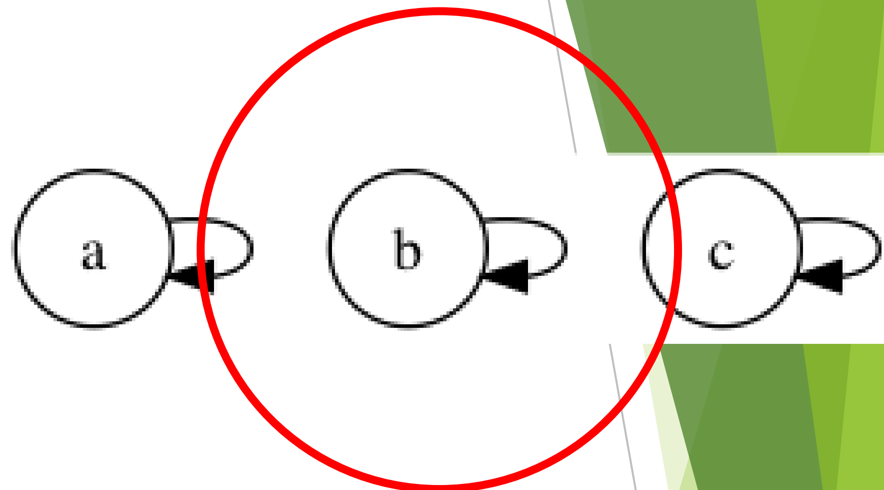


問8　推移性を満たすものは

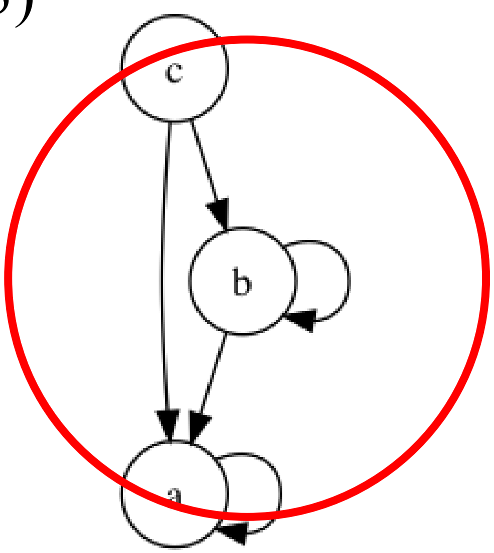
(1)



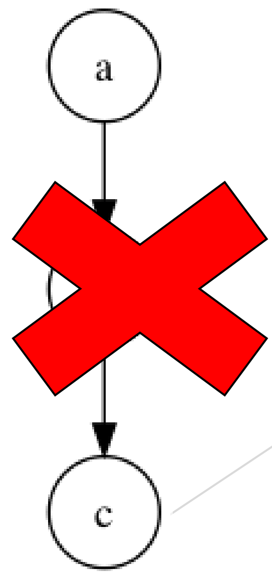
(2)



(3)



(4)



問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である
2. R:違う住所に住んでいる
3. $R:\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$
4. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$
5. $R:\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$
6. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$
7. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b>0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　　　○
2. R:違う住所に住んでいる
3. $R:\{(a,b)\in\mathbb{N}^2|a>b\}$
4. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\times b<0\}$
5. $R:\{(a,b)\in\mathbb{N}^2|a\leq b\}$
6. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\times b\geq 0\}$
7. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\times b>0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$ ×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$ ×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　〇
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$ ×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$ ×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$ ×
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　〇
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$ ×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$ ×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$ ×
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$ ×
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b)\in\mathbb{N}^2|a>b\}$ ×
4. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\times b<0\}$ ×
5. $R:\{(a,b)\in\mathbb{N}^2|a\leq b\}$ ×
6. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\times b\geq 0\}$ ×
7. $R:\{(a,b)\in\mathbb{R}^2|a\times b>0\}$ ○

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である ○ 同級生という共通グループ
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$ ×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$ ×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$ ×
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$ ×
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$ ○ 同一符号という共通グループ

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

同値関係とは共通の性質を持つ関係

1. R:同じ学年である　○ 同級生という共通グループ
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$ ×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$ ×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$ ×
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$ ×
7. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b > 0\}$ ○ 同一符号という共通グループ

Def 4　分割

集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists\, X \in C, s.t., x \in X$

を満たすCをいう.

例. $U = \{a, b, c, d, e, f\}$のとき,

$C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$は集合$U$の分割.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,
xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.
このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明]　（１）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

例題 1

U上の関係Rを,$\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを

証明せよ.

[証明]　（１） 反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

例題 1

U上の関係Rを,$\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを

証明せよ.

[証明]　（１）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

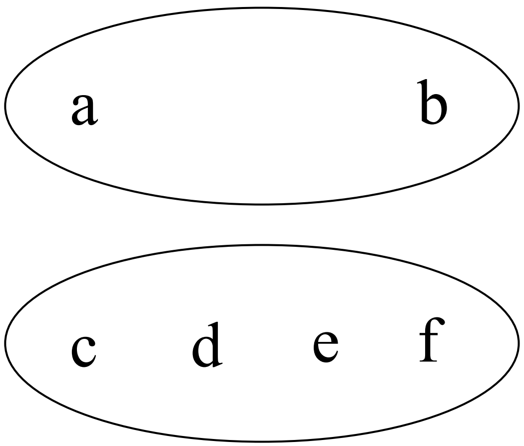
xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

(3) 推移律　$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

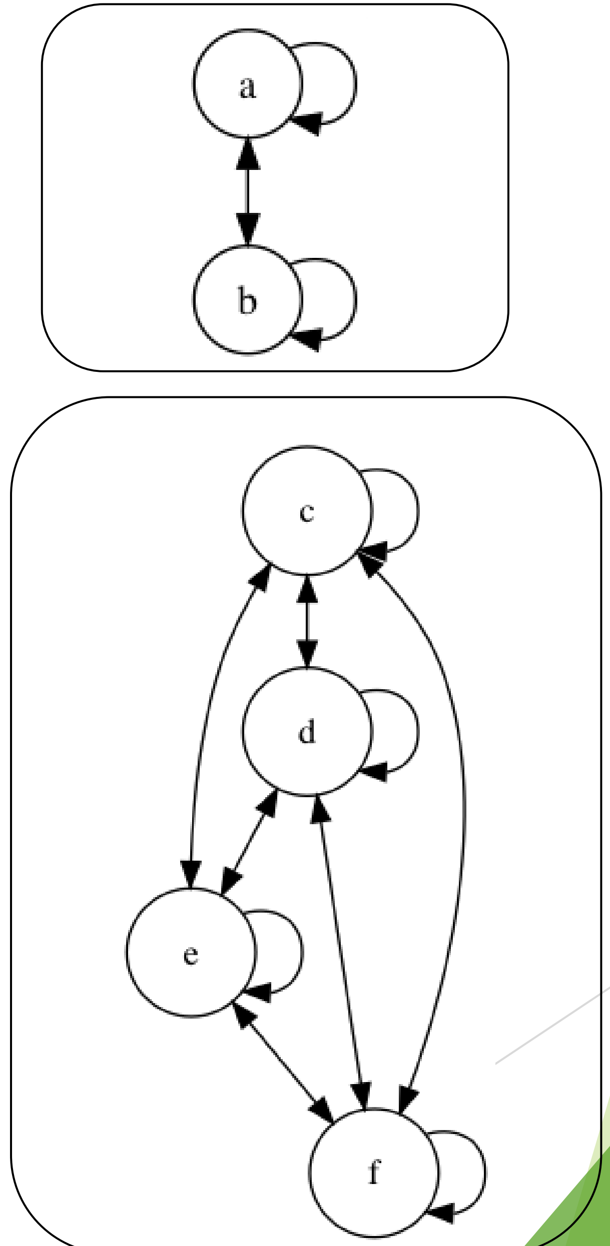
$xRy \wedge yRz$より, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

従って, (1)-(3)より, Rは同値関係　■

分割された同グループ要素⇒同値関係



⇒



例題2

$a, b, n \in \mathbb{Z}$に対して，

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b) = nm]$$

のとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

例題2

$a, b, n \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b) = nm]$

のとき，~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律： $a - a = 0, m = 0$のとき$0 = n \times 0$より，

$a \sim a$

対称律： $a - b = nm$より， $b - a = (-1)nm$

従って、 $a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： $a - b = nm, b - c = nm', m' \in \mathbb{Z}$のとき，

$a - c = nm + nm' = n(m + m'), m + m' \in \mathbb{Z}$

これらより， ~は同値関係 ■

例題3

A を三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき，$\sim$は同値関係であることを証明せよ。

例題3

A を三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき，$\sim$は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：aとaは合同なので，$a \sim a$

対称律：aとbが合同のとき，bとaも合同。

従って、$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律：aとb，bとcがそれぞれ合同のとき，

aとcも合同。これらより，$\sim$は同値関係　■

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき，$\sim$は同値関係であることを証明せよ。ただし、すべての頂点は自分に有向辺を持っている。 また$a \sim b$かつ$b \sim c$のとき，aからcにも経路がある。

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき，~は同値関係であることを証明せよ。ただし、すべての頂点は自分に有向辺を持っている。また$a \sim b$かつ$b \sim c$のとき，aからcにも経路がある。

[証明]

反射律：すべての頂点は自分に有向辺を持っているので$a \sim a$

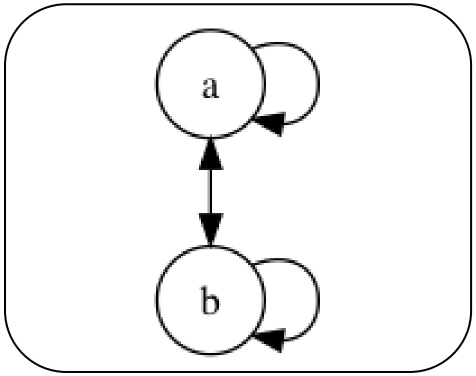
対称律： aからbに経路があり， bからaにも経路があるので　$a \sim b \rightarrow b \sim a$

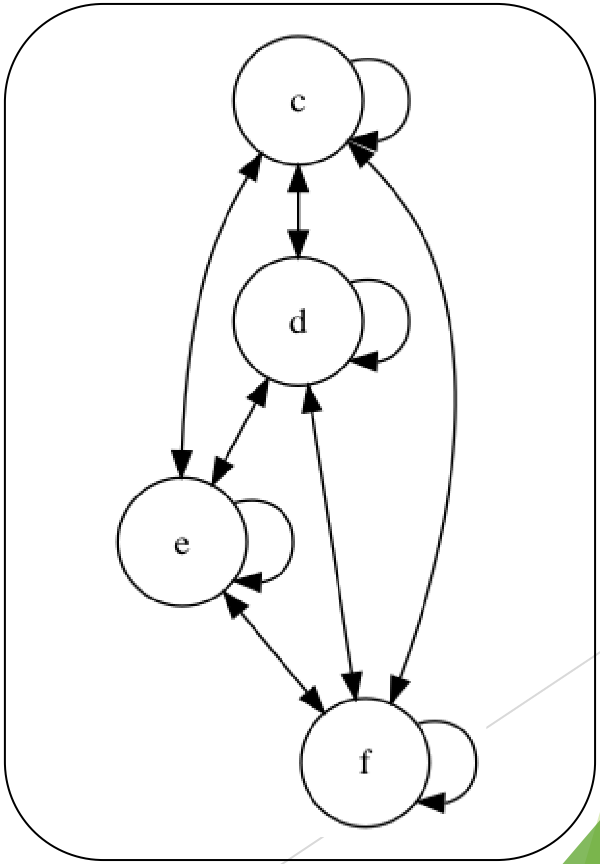
推移律： $a \sim b$かつ$b \sim c$のとき，aからcにも経路があるので$a \sim c$

これらより， ~は同値関係　■

補足

この同値関係による頂点のグループ分け（お互いに行き来可能な頂点集合）をグラフの強連結成分分解という。





例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$,　$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，　$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

[証明]

反射律：$f(x) = f(x)$なので$x \sim x$

対称律： $f(x_1) = f(x_2)$ならば$f(x_2) = f(x_1)$

　$x_1 \sim x_2 \to x_2 \sim x_1$

推移律：$x_1 \sim x_2$かつ$x_2 \sim x_3$のとき，　$f(x_1) = f(x_2)$かつ$f(x_2) = f(x_3)$。このとき，　$f(x_1) = f(x_3)$より　　$x_1 \sim x_3$

これらより，　~は同値関係　■

6．同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1)　$x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2)　「$x \in P \wedge xRz$」$\rightarrow z \in P$

を満たすとき，PをRに関する**同値類**という。

6．同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1)　$x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2)　「$x \in P \wedge xRz$」$\rightarrow z \in P$

を満たすとき，PをRに関する同値類という。

各同値類に属する各要素をその同値類の代表元と呼ぶ.Rで関係づけられた代表元aの同値関係の要素をすべて集めた集合をaの同値類と呼び，$[a]_R$と書く。同値類の集合は$\{[a]_R \mid a \in U\}$であり、商集合と呼ばれ，

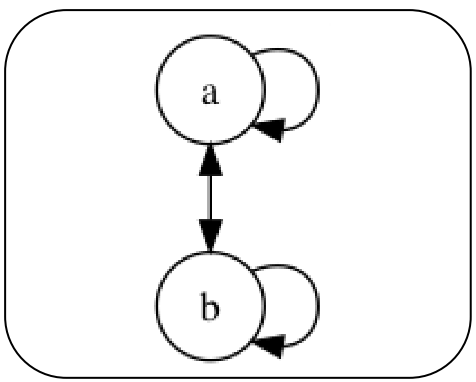
U / R と書く。

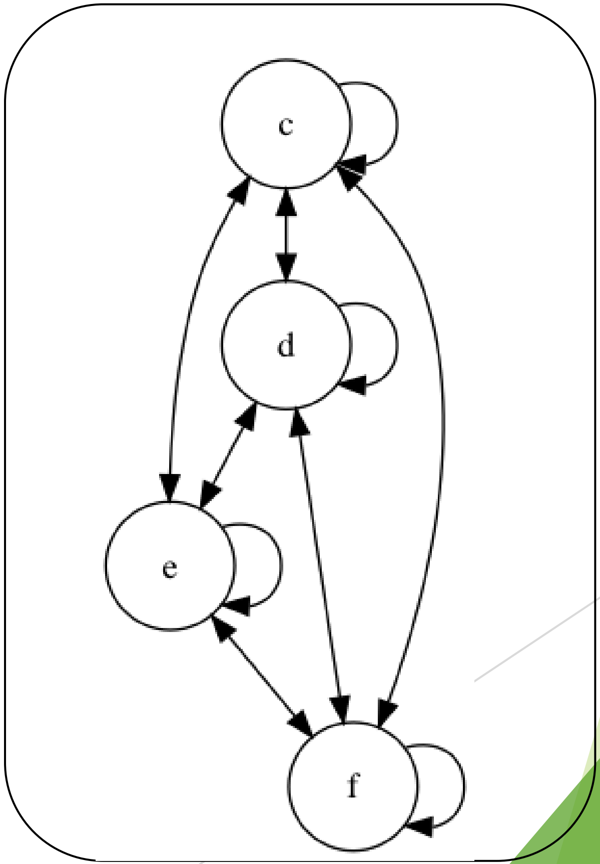
例　$U = \{a, b, c, d, e, f\}$の同値類と商集合

同値類　$[a]_R = \{a, b\}$, $[b]_R = \{a, b\}$, $[c]_R = \{\mathrm{c, d, e, f}\}$,

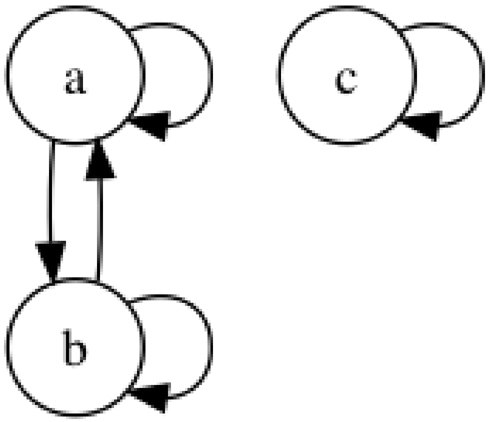
$[d]_R = \{\mathrm{c, d, e, f}\}$, $[e]_R = \{\mathrm{c, d, e, f}\}$, $[f]_R = \{\mathrm{c, d, e, f}\}$

商集合$U / R = \{[a]_R \mid a \in U\} = \{\{\mathrm{a, b}\}, \{\mathrm{c, d, e, f}\}\}$





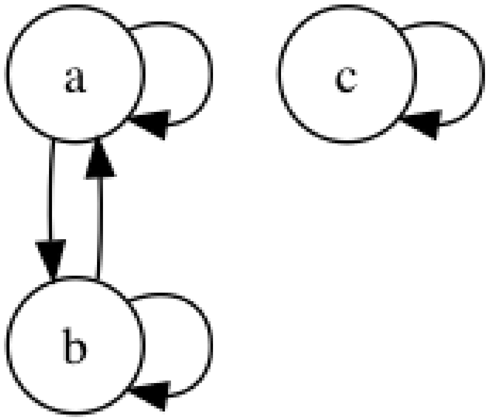
例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。 $a, b \in G$ に対して,**同値関係**$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり， bからaにも経路があるとき、と定義する。

左のグラフの頂点集合の商集合$V/\sim$を求めよ。

例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，**同値関係**$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり， bからaにも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V/\sim$を求めよ。

[解答]
商集合$V/\sim = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
注意　要素が一つでも同値類になる

例題2

写像$f: U \mapsto U; f(x)$， $x_1, x_2 \in U$ について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
とする。 $U = \{a, b, c, d\}$のU上の同値関係
$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$
のとき， ~の商集合$U /\sim$を求めよ。

例題2

写像$f: U \mapsto U; f(x)$， $x_1, x_2 \in U$ について

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

とする。$U = \{a, b, c, d\}$のU上の同値関係

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$$

のとき， ~の商集合U /~を求めよ。

[解答]

$$U/\sim = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$$

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

定義に帰れ！！

商集合$U\ /\ R$が分割の定義

「集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists\, X \in C,\ \boldsymbol{s.t.},\ x \in X$

を満たすCをいう.」

を満たしていることを順に証明していく.

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \land X \neq \emptyset$を証明する.

商集合の定義より,$X \in U/R, s.t, \exists a \in U,$

$X = [a]_R$. 同値類の定義より,$[a]_R \subseteq U$.

よって　$X \subseteq U$.

同値関係の反射性より, aRa.従って$[a]_R \neq \emptyset$.

したがって, $X \neq \emptyset$.

よって　$\forall X \in C, X \subseteq U \land X \neq \emptyset$

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(2) $\forall X, Y \in U / R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ を証明する.

$X, Y \in U / R$と仮定する.

$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ の対偶$X \cap Y \neq \emptyset \longrightarrow X = Y$を証明する.

$X \cap Y \neq \emptyset$を仮定する.商集合の定義より,$X \in U/R, s.t,$

$\exists a \in U, X = [a]_R, Y \in U/R, s.t, \exists a' \in U, Y = [a']_R$.

$X \cap Y \neq \emptyset$より, $\exists a'' \in U, s.t.\ a'' \in X \wedge a'' \in Y$.

すなわち, $a'' \in [a]_R$かつ$a'' \in [a']_R$.同値類の定義より,

$a''Ra$かつ$a''Ra'$.同値関係の対称性より, aRa''.

aRa''と$a''Ra'$と同値関係の推移性からaRa'.これより

$[a]_R = [a']_R$.

従って, $X = Y$. 以上より$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(3)$\forall x \in U, \exists X \in U / R, \mathbf{s.t.}, x \in X$を証明する.

$x \in U$を仮定する.

反射性から，　xRx.

同値類の定義より，　$x \in [x]_R$.

従って，　$\exists X \in U / R, \mathbf{s.t.}, x \in X$.

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \land X \neq \emptyset$

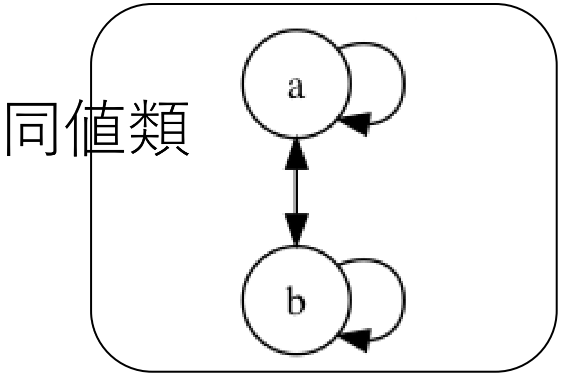
(2) $\forall X, Y \in U\ /\ R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

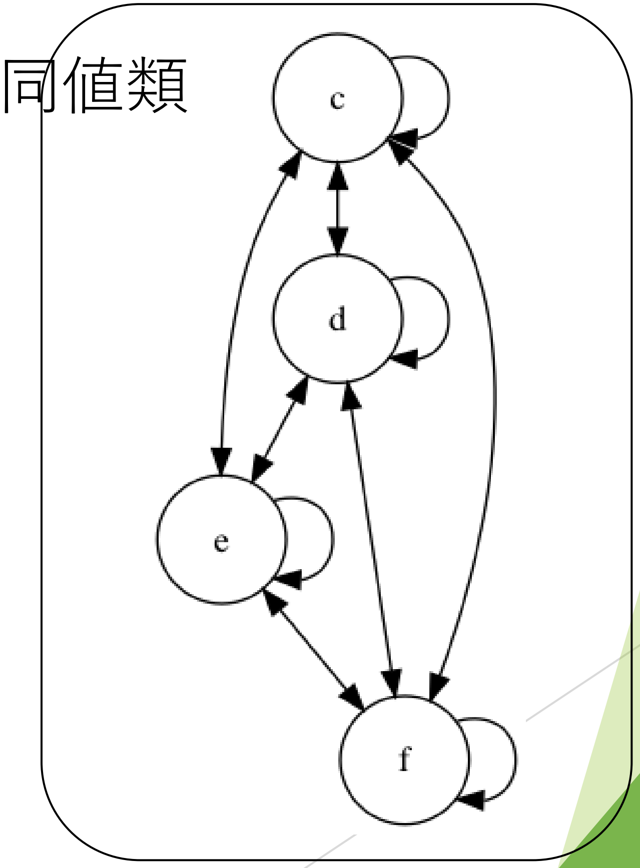
(3) $\forall x \in U,\ \exists\ X \in U\ /\ R,\ s.t.,\ x \in X$

より,

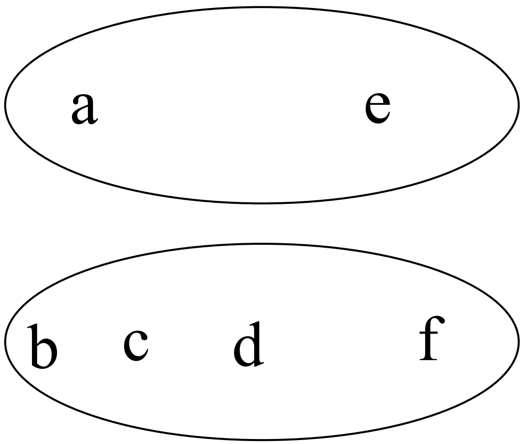
商集合$U\ /\ R$はUの分割である. ■

商集合のことを同値分割ともいう

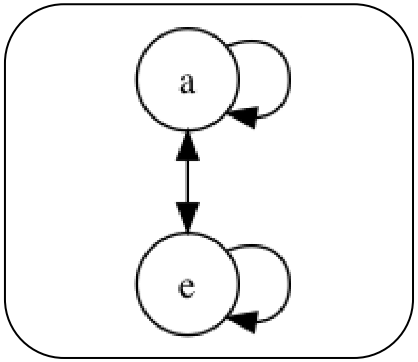


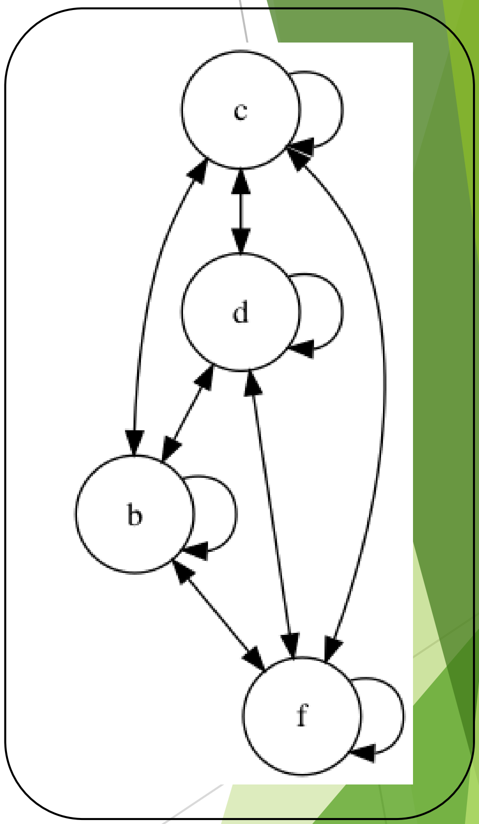


つまり同値関係⇔あるルール（関係、もしくは２変数述語＝２変数条件）によって分割された同グループ要素



⇔





xRy: xが母音のときyも母音　またはxが子音のときyも子音.

同値類

- 同値類⇔あるルール（関係、もしくは２変数述語＝２変数条件）によって余すところなく、　背反に分割されたグループ
- 同値関係とは、すべての要素を背反にグループ化するための２変数述語（＝２変数条件）．

同値関係の応用

1. データの分類と商集合（情報の要約）

- 同値関係の最大の役割は、集合を「同値類」という重複のないグループに分割（直和分割）。
- **商集合の作成:** 似たもの同士を一つにまとめることで、データのサイズを大幅に削減。**例:** 膨大なユーザーデータを「年齢が同じ」という同値関係で分ければ、個々のユーザーではなく「年代別」という単位で分析できるようになる。

2. ソフトウェアテスト（同値分割法）

- プログラムが正しく動くかテストする際、すべての入力パターンを試すのは不可能。**例:** 「1～100の数値を入力する」フォームなら、有効な値（1個）、小さすぎる値（1個）、大きすぎる値（1個）の計3回テストすれば、論理的に十分だと判断。

3. コンピュータサイエンスの基本アルゴリズム

- **Union-Find木（素集合データ構造）:** 「AとBが同じグループか？」を高速に判定・統合するアルゴリズム。これは同値関係の維持そのもの。**応用:** ネットワークの接続確認、画像のラベル付け（同じ色のピクセルをまとめる）など。
- **グラフ理論:** グラフの「連結成分（つながっている頂点の塊）」は、頂点間の「道が存在する」という同値関係によって定義される。

４．プログラミング言語とコンパイラ

- コードが「論理的に等しいか」を判断する際にも使われる。。

5. 数学的な構造の定義（一般化）

- 抽象的な概念を具体化するために使われます。
- **有理数の定義:** 分数 21 と 42 は見た目は違うが、 1×4=2×2 という関係から「同じ値」とみなされる。これは「分数」という集合に同値関係を導入して「有理数」を定義していることになる。。
- **合同式 (mod):** 「余りが等しい」という関係も、同値関係。

6.　まとめ

①　整数の合同
②　剰余類
③　同値関係
④　反射律
⑤　対称律
⑥　推移律
⑦　同値類

演習問題

問題1

$n \in \mathbb{N}^+$とする．$\mathbb{Z}$上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (a+b) = nk$$

は同値関係でないことを証明せよ。

問題2

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^2,$

$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = y_1 - y_2)$

のとき,

$\sim$ が同値関係となることを証明せよ.

問題3

$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$とする.

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$,

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

のとき,

$\sim$ が同値関係となることを証明せよ.