14.　順序集合

植野真臣

電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

第１回　10月 6日：第1回 命題と証明
第２回　10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月20日：第3回 命題論理
第４回　10月27日：第4回 述語論理
第５回　11月　3日：第5回 述語と集合
第６回　11月10日：第6回 直積と冪集合　(出張中につきHPの資料でオンデマンドで自習してください)
第７回　11月17日：第7回 様々な証明法 (1)
　11月24日：調布祭の後片付けで休み

第８回　12月 1日：第8回 様々な証明法 (2)

第9回 12月8日　様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月15日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月22日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　1月5日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、

グラフによる表現
第１３回　1月19日：第13回 同値関係
第１４回　1月26日：第14回 順序関係：半順序集合、

ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　2月2日：第15回 期末試験

１．本日の目標

① 半順序
② 全順序
③ ハッセ図
④ 最大元，最小元
⑤ 極大元，極小元
⑥ 上界、下界
⑦ 上限、下限

復習：同値関係

Def 3.

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$　自分は自分と関係ある

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$　自分の関係者にとって自分は関係者

(3) 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$　関係者の関係者は関係者

１．順序集合

Def 1. 集合の要素間の「順序関係」が定義された集合の事。「順序」とは大小、高低、長短等の序列に関わる概念を抽象化したものである

例

整数、実数、など

2．半順序集合と全順序集合

「Aさんは Bさんの子孫である」という事を「A＜B」という順序関係とみなす事で人間全体の集合も順序集合と考えられる。　→

- 赤の他人には順序判定はできない。このように比較不可能のケースを許すことを強調した順序関係を半順序（関係）と呼び、その集合を半順序集合と呼ぶ。
- 半順序集合の中で順序が比較可能な部分集合を全順序（関係）と呼び、その集合を全順序集合と呼ぶ。

3.　半順序関係

Def. 2

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、 半順序(関係)と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U[xRx]$

(2) 反対称律　$xRy \land yRx \to x = y$

(3) 推移律　$xRy \land yRz \to xRz$

このとき，(U, R) を半順序集合と呼ぶ。

同値関係と何が違う？

Def 3.

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$　自分は自分と関係ある

(2) 対称律　$xRy \to yRx$　自分の関係者にとって自分は関係者

(3) 推移律　$xRy \land yRz \to xRz$　関係者の関係者は関係者

同値関係と半順序関係の違い

Def. 2

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、 半順序(関係)と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U[xRx]$

(2) 反対称律　$xRy \wedge yRx \rightarrow x = y$

(3) 推移律　$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R) を半順序集合と呼ぶ。

反対称律　の意味

$$xRy \land yRx \to x = y$$

$\Leftrightarrow$

$x \leftrightarrows y$ ならば$x = y$

反対称律　の意味

$$xRy \land yRx \to x = y$$

の対偶

$$x \neq y \to \neg(xRy \land yRx)$$
$$= \neg xRy \lor \neg yRx$$

異なる任意のx, yでは,かならず$x \leftrightarrows y$がない。

⇔

$x \to y$がない、または　$x \leftarrow y$がない

⇔

$x \to y$か$x \leftarrow y$か　→も←もつかないかのどれか。

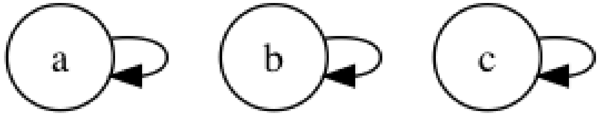
半順序関係の表現

半順序を表現するためによく使われる記号

$$\leq, \subseteq, \precsim, \lesssim, \preccurlyeq$$

など

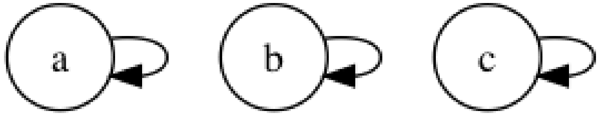
半順序の定義（有向グラフ）

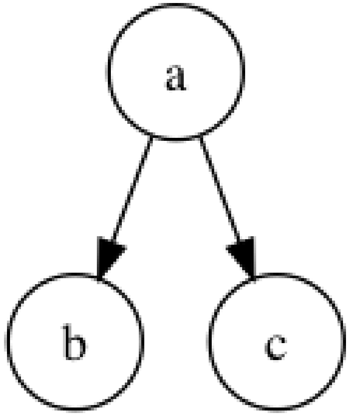


(1)反射律

自分に→が
つく

半順序の定義（有向グラフ）



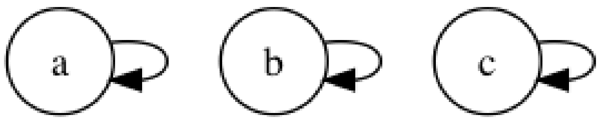


(1)反射律

自分に→がつく

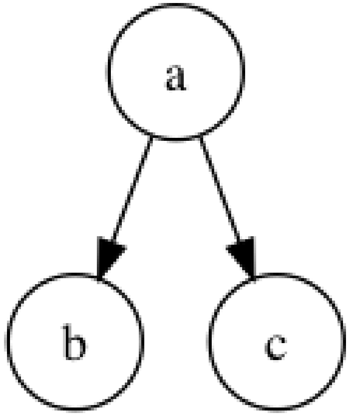
(2) 反対称律（両方の有向枝 ⇆ がついているところがないこと）

半順序の定義（有向グラフ）

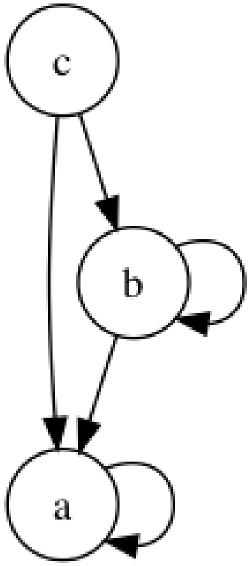


(1)反射律

自分に→がつく



(2) 反対称律（両方の有向枝 ⇆ がついているところがないこと）



(3)推移律（有向枝をたどっていける頂点には必ず直接、有向枝がついている）

再掲：　同値関係

Def 3.

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

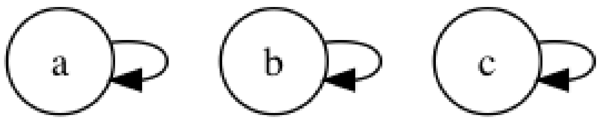
(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$

(2) 対称律　$xRy \to yRx$

(3) 推移律　$xRy \land yRz \to xRz$

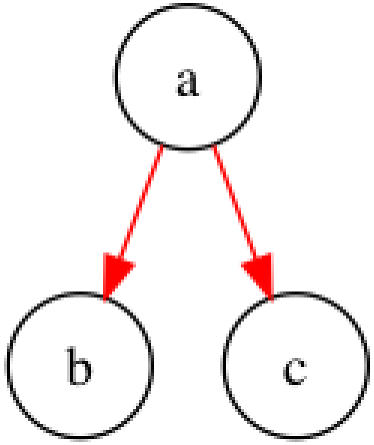
このとき，(U,R)を同値集合と呼ぶ。

半順序の定義（有向グラフ）

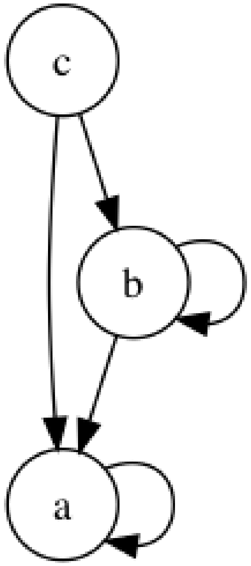


(1)反射律

自分に→が
つく



(2) 反対称律
ここが同値関係との違い
対象律：双方向有向枝
⇆　がない



(3)推移律
（有向枝をたどっていける頂点には必ず直接、有向枝がついている）

例題１

ℕ上の関係>は，半順序か？その理由を証明せよ。

例題 1

$\mathbb{N}$上の関係>は，半順序か？その理由を証明せよ。

[証明]

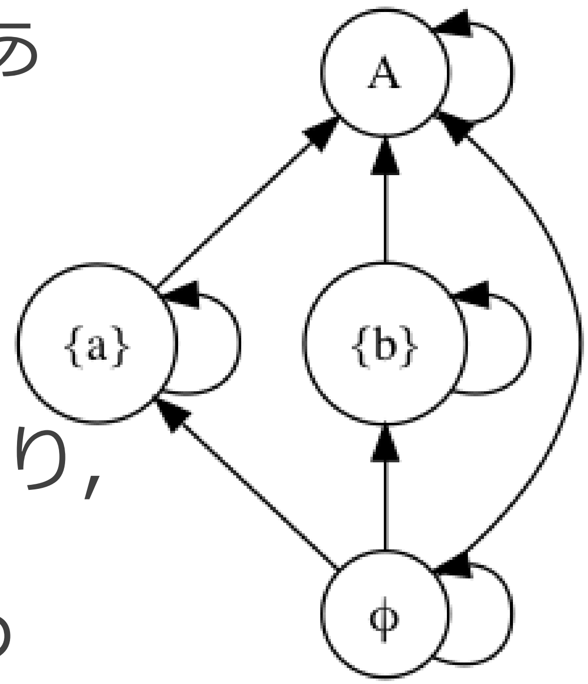
半順序関係でない。$x = 1$を仮定すると，$1 \ngtr 1$であり，　$\exists x \in \mathbb{N}[x \ngtr x]$。反射律　$\forall x \in A[xRx]$は成り立たない。$\mathbb{N}$上の関係>は，半順序でない。■

例題2.

$A = \{a, b\}$とし，　Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係$\subseteq$は半順序関係であることを証明せよ。

例題2.

$A=\{a,b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係であることを証明せよ。



[証明]

$$2^A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},A\}$$

$\emptyset\subseteq\emptyset$，$\{a\}\subseteq\{a\}$，$\{b\}\subseteq\{b\}$, $A\subseteq A$より，反射律を満たす。さらに$\emptyset\subseteq\{a\}$， $\emptyset\subseteq\{b\}$，$\emptyset\subseteq A$，$\{a\}\subseteq A$，$\{b\}\subseteq A$で　かつ関係グラフに双方向辺はないので反対称律を満たす。 $\emptyset\subseteq\{a\}$， $\emptyset\subseteq\{b\}$，$\emptyset\subseteq A$，$\{a\}\subseteq A$，$\{b\}\subseteq A$　および右図より、推移律を満たす。従って，包含関係⊆は半順序関係である。 ■

例題3.

$\mathbb{N}^+$上の関係 $|$ を　$x|y \Leftrightarrow x$はyの約数

と定義すると，$|$が半順序関係であることを証明せよ。

例題3.

$\mathbb{N}^+$上の関係 | を　$x|y \Leftrightarrow x$はyの約数

と定義すると，|が半順序関係であることを証明せよ。

[証明]

$\forall x \in \mathbb{N}^+[x = 1 \times x]$より $\forall x \in \mathbb{N}^+[x|x]$。反射律を満たす。$\exists k \in \mathbb{N}^+ s.t., y = kx \land \exists k' \in \mathbb{N}^+ s.t., x = k'y$は$k = k' = 1$のとき、$x = y$のときのみであり、反対称律を満たす。 $\exists k \in \mathbb{N}^+, s.t., y = kx \land \exists k' \in \mathbb{N}^+ s.t., z = k'y$のとき、 $z = kk'x$ より$\exists k'' = kk' \in \mathbb{N}^+; z = k''x$,推移律を満たす。

従って，|は半順序関係。 ■

例題4.

$(m,n),(m',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$に対し，$(m,n) \precsim (m',n') \Leftrightarrow (m \le m') \wedge (n \le n')$のとき，$\precsim$は半順序関係であることを証明せよ。

例題4.

$(m,n),(m',n') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$に対し，$(m,n) \precsim (m',n') \Leftrightarrow (m \le m') \wedge (n \le n')$のとき，$\precsim$は半順序関係であることを証明せよ。

[証明] $(m \le m) \wedge (n \le n)$より $(m,n) \precsim (m,n)$ 。反射律を満たす。$(m,n) \precsim (m',n')$かつ$(m',n') \precsim (m,n)$のとき，$(m \le m') \wedge (n \le n') \wedge\ (m' \le m) \wedge (n' \le n)$ より，$(m,n) = (m',n')$ 。反対称律を満たす。 $(m,n) \precsim (m',n')$かつ$(m',n') \precsim (m'',n'')$のとき，$(m \le m') \wedge (n \le n') \wedge (m' \le m'') \wedge (n' \le n'')$より, $(m \le m'') \wedge (n \le n'')$。推移律を満たす。従って，$\precsim$は半順序関係。 ■

4. 全順序関係

Def 3. U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、

全順序(関係)と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U[xRx]$

(2) 反対称律　$xRy \land yRx \rightarrow x = y$

(3) 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

(4) 完全性　$\forall x, \forall y \in U, [xRy \lor yRx]$

このとき，(U, R)を全順序集合と呼ぶ。

例題１.

(1)　$\mathbb{N}$上の関係$\leq$は,半順序,全順序か？

(2)　$\mathbb{N}$上の関係$<$は,半順序,全順序か？

例題１.

(1)　$\mathbb{N}$上の関係≤は,半順序,全順序か？

(2)　$\mathbb{N}$上の関係<は,半順序,全順序か？

[正答]

(1)反射律： $\forall n \in \mathbb{N}$について$n \leq n$. 反対称律： $\forall a, \forall b \in \mathbb{N}, a \leq b \wedge\ b \leq a \rightarrow a = b$.
推移律:$\forall a, \forall b, \forall c \in \mathbb{N}, a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$.
より, $\mathbb{N}$上の関係≤は半順序.さらに$\forall a, \forall b \in \mathbb{N}$について$a \leq b \vee\ b \leq a$.従って、全順序でもある.

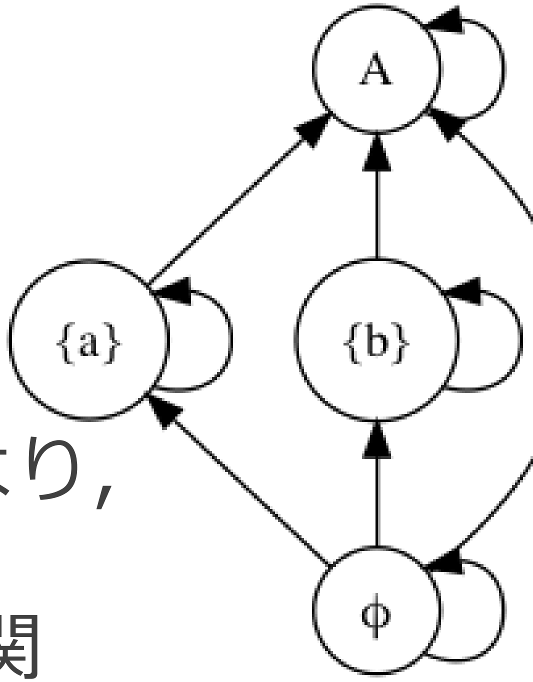
(2)反射律： $\forall n \in \mathbb{N}$について$n \nless n$.従って, $\mathbb{N}$上の関係<は半順序ではない.全順序でもない.

例題2.

$A=\{a,b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は全順序関係か？

例題2.

$A=\{a,b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は全順序関係か？



[正答]$2^A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},A\}$

$\emptyset\subseteq\emptyset$，$\{a\}\subseteq\{a\}$，$\{b\}\subseteq\{b\}$，$A\subseteq A$より，反射律を満たす。さらに$\emptyset\subseteq\{a\}$， $\emptyset\subseteq\{b\}$，$\emptyset\subseteq A$，$\{a\}\subseteq A$，$\{b\}\subseteq A$で　かつ関係グラフに双方向辺はないので反対称律を満たす。 $\emptyset\subseteq\{a\}$， $\emptyset\subseteq\{b\}$，$\emptyset\subseteq A$，$\{a\}\subseteq A$，$\{b\}\subseteq A$　および右図より、推移律を満たす。従って，包含関係⊆は半順序関係である。しかし，$\{a\},\{b\}$は比較不可能で完全性を満たさず全順序ではない。■

例題3

$A = \{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$:アルファベット文字列

で$a < b < c < \cdots x < y < z$と定義する.

任意の$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n$に対して,

$$x \precsim y : \left(\begin{array}{c} x_1 < y_1 \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 < y_3) \\ \vdots \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n < y_n) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n = y_n) \end{array} \right.$$

と定義すると, $\precsim$は全順序関係か？

例題3

$A = \{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$:アルファベット文字列

で$a < b < c < \cdots x < y < z$と定義する.

任意の$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n$に対して,

$$x \precsim y: \left(\begin{array}{c} x_1 < y_1 \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 < y_3) \\ \vdots \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n < y_n) \\ \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n = y_n) \end{array} \right.$$

と定義すると, $\precsim$は全順序関係か？

[正答]　反射律： $x \precsim x$. 反対称律： $\forall x, \forall y \in A^n, x \precsim y \wedge y \precsim x \to x = y$.
推移律:$\forall x, \forall y, \forall z \in A^n, x \precsim y \wedge y \precsim z$のとき、

$$\begin{array}{c} x_1 < z_1 \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 < z_2) \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 = z_2 \wedge x_3 < z_3) \cdots \\ \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = z_3 \cdots \wedge x_{n-1} = z_{n-1} \wedge x_n < z_n) \\ \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 = z_2 \wedge x_3 = z_3 \cdots \wedge x_{n-1} = z_{n-1} \wedge x_n = z_n) \end{array}$$

より, $x \precsim z$. すべての二つの$\forall x, \forall y$について$x \precsim y \vee y \precsim x$, 全順序でもある. ■

例題３の定義の順序関係

辞書式順序
と呼ぶ.

例

arc $\precsim$ are $\precsim$ arm $\precsim$ book

半順序の図示化

$A = \{a, b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係

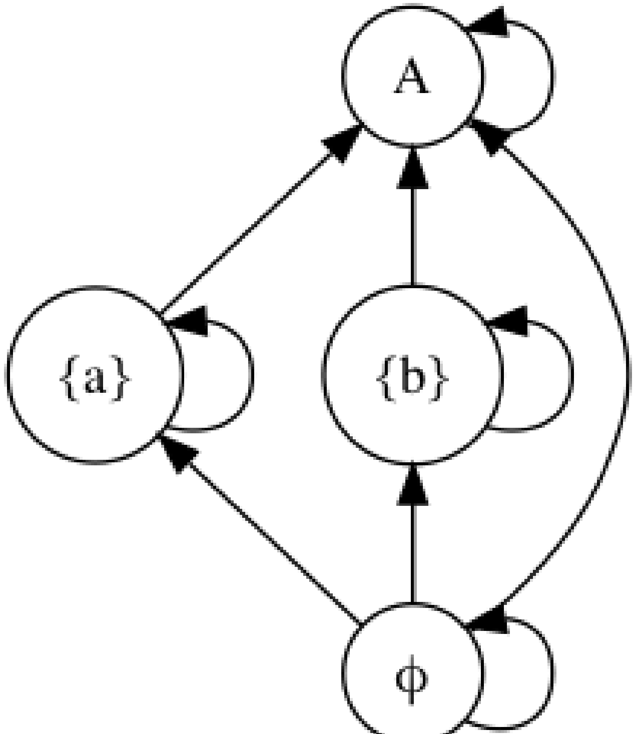
を図示化せよ.

半順序の図示化

$A=\{a,b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係

を図示化せよ.

[回答]

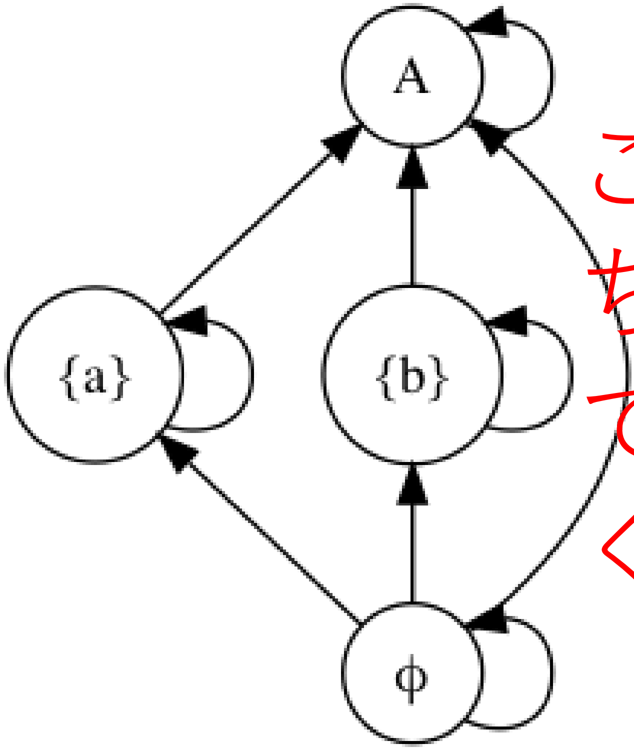


半順序の図示化

$A=\{a,b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係

を図示化せよ.

[回答]



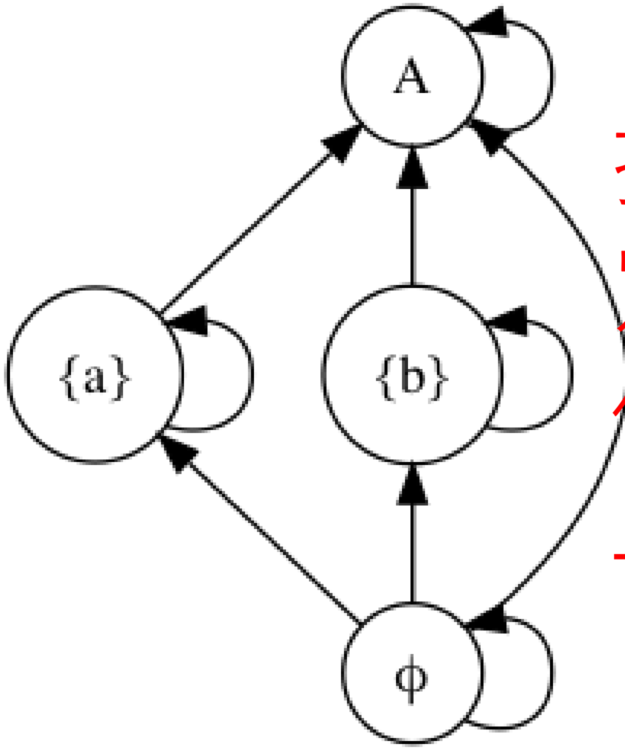
ごちゃご
ちゃしてい
てわかりに
くい！！

半順序の図示化

$A = \{a, b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係

を図示化せよ.

[回答]



推移律で判定できる関係は削除
→ハッセ図

5. ハッセ図

半順序集合の図示手法.

Def . 4.

有限な半順序集合Uについて,

$u, v \in U, s.t. u \ll v$のとき,点vを点uの上に描き,線で結んだものをハッセ図と呼ぶ.

ただし, $u \ll v$: $u < v$かつ $[u < x < v]$となるxは存在しない.

$u \ll v$は, uがvの直後に来る要素を示している.

半順序集合(U,R)のハッセ図の描き方

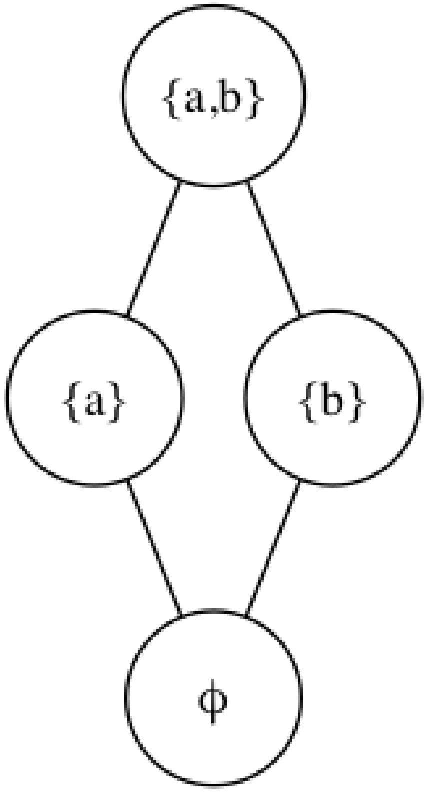
1. Uの各要素を頂点とする.
2. Rで小さい頂点を下に大きい頂点を上に描く.
3. $u,v \in U, s.t. u \ll v$のとき,点vと点uに辺を描く.
4. どの辺も下から上に単調に描かれる.

半順序の図示化

$A=\{a,b\}$とし， Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係

のハッセ図を描け.

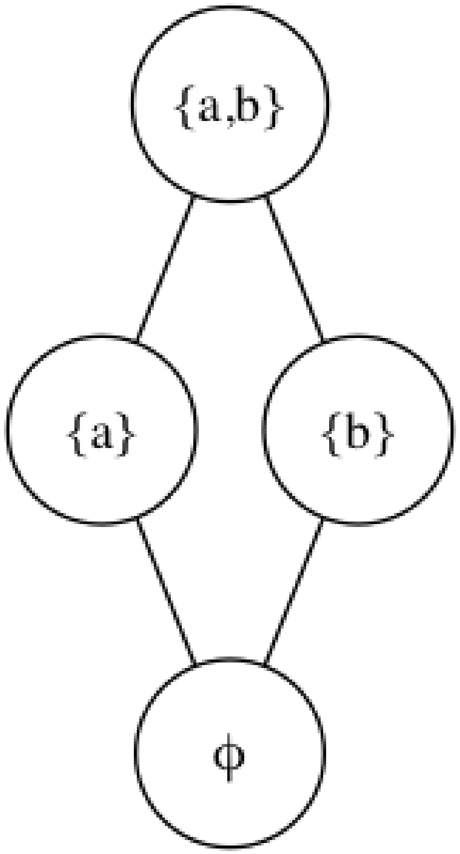
[回答]



すっきり！！

ハッセ図の意味

x, yが比較可能$\Leftrightarrow$ x, yを結ぶ下から上への（上から下への）単調な道が存在する



(a,b)とa　比較可能
(a,b)とb　比較可能
(a,b)と∅　比較可能
aとb　　比較不可能
aと∅　　比較可能
bと∅　　比較可能

例題1

$A=\{x,y,z\}$の冪集合2^Aは包含関係について半順序集合である．　そのハッセ図を描け.

例題1

$A=\{x,y,z\}$の冪集合2^Aは包含関係について半順序集合である．　そのハッセ図を描け.

[回答]

まず2^A　を列挙する.

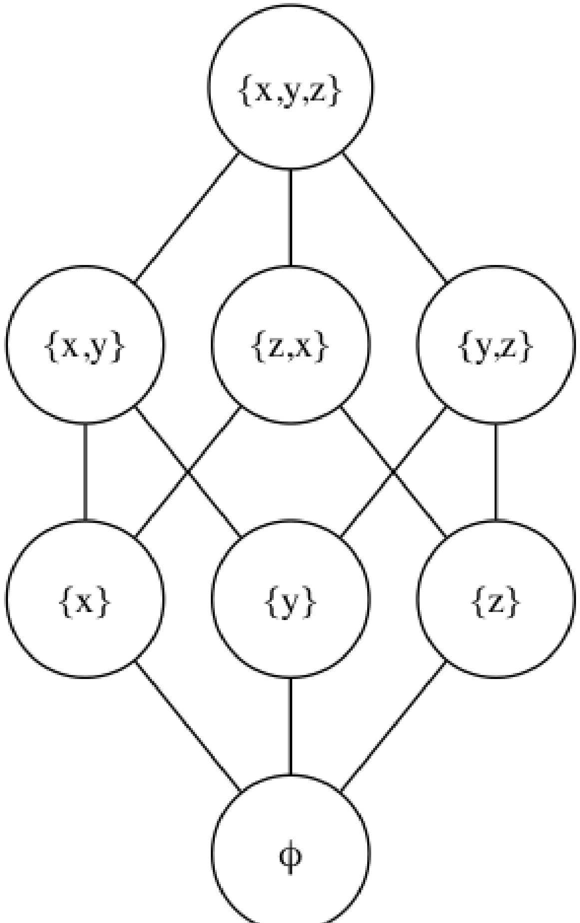
$2^A=\{\{\emptyset\},\{x\},\{y\},\{z\},\{x,y\},\{x,z\},\{y,z\},\{x,y,z\}\}$

2^Aの要素についてa $\ll b$の関係にある要素についてbをaの上に描き,線を引く.

例題1

$A = \{x, y, z\}$の冪集合2^Aは包含関係について半順序集合である．　そのハッセ図を描け．

[回答]



例題2

$A = \{1,2,3,6,12,18,24\}$のとき，半順序集合 $(A, x|y(x$はyの約数$))$

とするとき，ハッセ図を描け.

例題2

$A=\{1,2,3,6,12,18,24\}$のとき，半順序集合
$(A, x|y(x$はyの約数$))$

とするとき，ハッセ図を描け.

[解答]

$1 \ll 2, 1 \ll 3,\ 2 \ll 6, 3 \ll 6, 6 \ll 12, 6 \ll 18, 12 \ll 24$

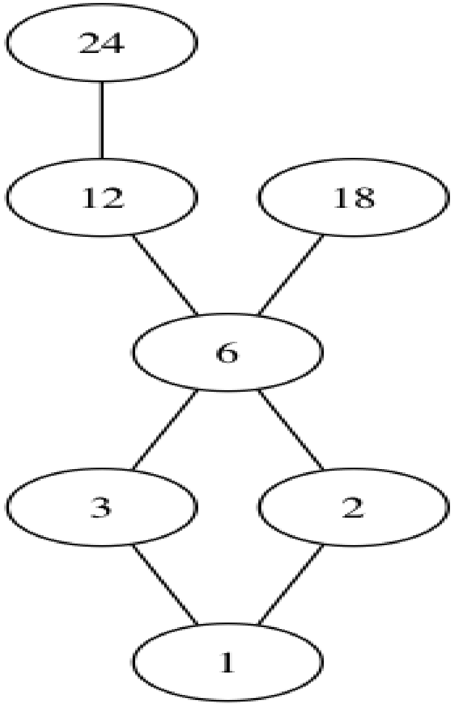
例題2

$A=\{1,2,3,6,12,18,24\}$のとき，半順序集合$(A, x|y(x$はyの約数$))$

とするとき，ハッセ図を描け.

[解答]

$1 \ll 2, 1 \ll 3,\ 2 \ll 6, 3 \ll 6, 6 \ll 12, 6 \ll 18, 12 \ll 24$



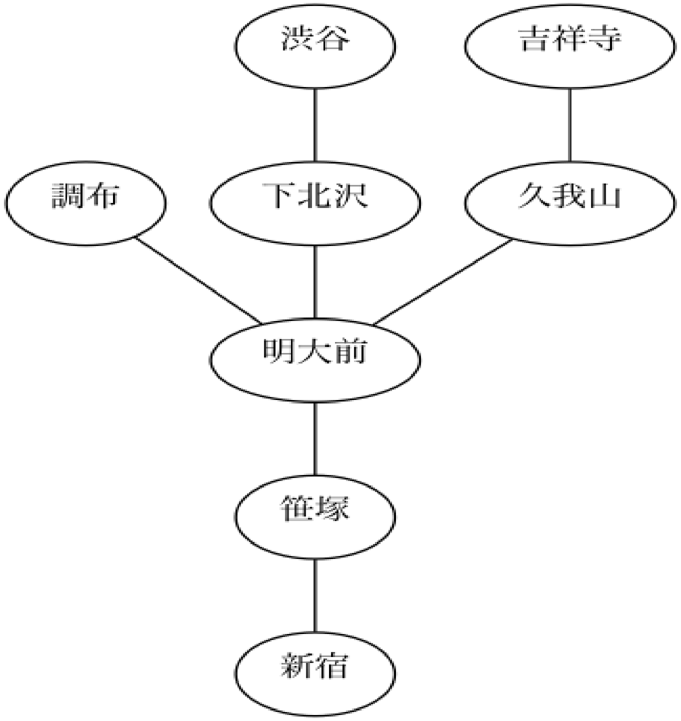
例題3

京王線,井の頭線で, $a \precsim b$を新宿駅から　a駅を通って, b駅に最短距離で着くこと、とする.{新宿,　笹塚,　明大前,　久我山、吉祥寺、下北沢、渋谷、調布}上での$\precsim$の順序関係をハッセ図で示せ.

例題3

京王線,井の頭線で, $a \precsim b$を新宿駅から　a駅を通って, b駅に最短距離で着くこと、とする.{新宿,　笹塚,　明大前,　久我山、吉祥寺、下北沢、渋谷、調布}上での$\precsim$の順序関係をハッセ図で示せ.

[回答]



6. 最大元，最小元

Def. 5

$(U,\leq)$を半順序集合とする.

$u\in U, s.t. \forall x\in U,\ x\leq u$を$U$の最大元といい，

$\max U$と書く.

$v\ \in U, s.t. \forall x\in U,\ v\leq x$を$U$の最小元といい，

$\min U$と書く.

6. 最大元，最小元

Def. 5

$(U, \leq)$を半順序集合とする.

$u \in U, s.t. \forall x \in U,\ x \leq u$を$U$の最大元といい,

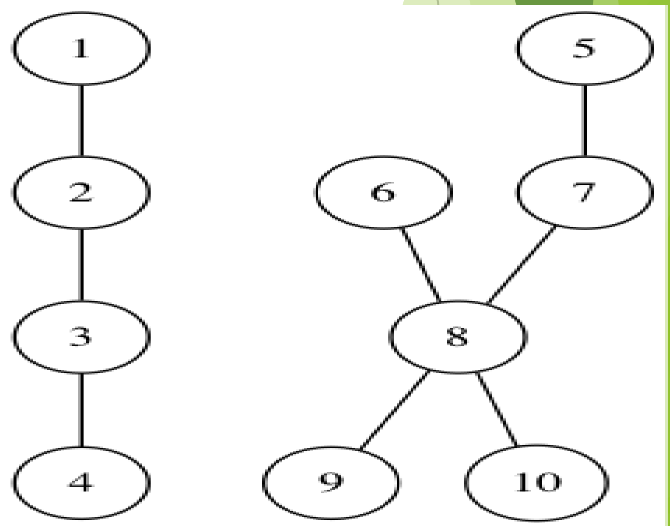
$\max U$と書く.

$v \in U, s.t. \forall x \in U,\ v \leq x$を$U$の最小元といい,

$\min U$と書く.

ただし，$\max U$や$\min U$は

存在しない場合もある.



7. 極大元，極小元

Def. 6

$(U, \leq)$を半順序集合とする.

$u \in U, s.t. \forall x \in U, u \leq x \rightarrow u = x$を$U$の極大元という.

(uより大きいものはない)

$v \in U, s.t. \forall x \in U, x \leq v \rightarrow v = x$ をUの極小元という.

(vより小さいものはない)

極大元、極小元は有限半順序集合

には必ず存在する

7. 極大元，極小元

Def. 6

$(U,\leq)$を半順序集合とする.

$u\in U, s.t. \forall x\in U, u\leq x\rightarrow u=x$を$U$の極大元という.

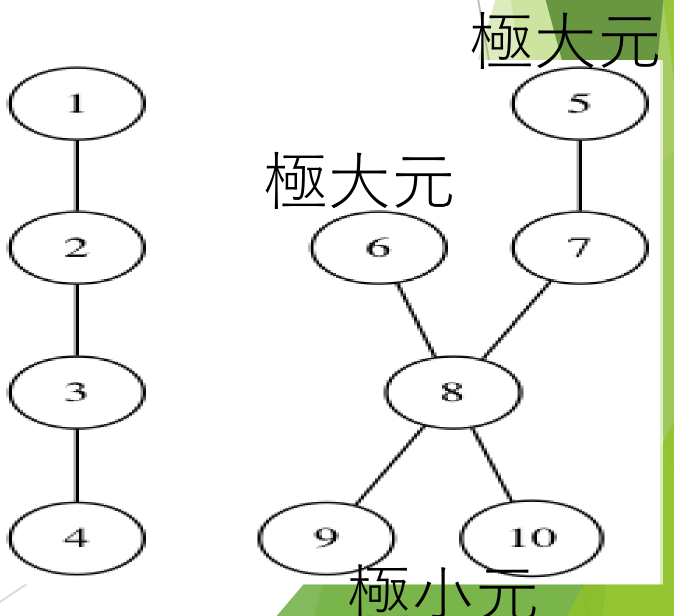
(uより大きいものはない)

$v\in U, s.t. \forall x\in U, x\leq v\rightarrow v=x$ をUの極小元という.

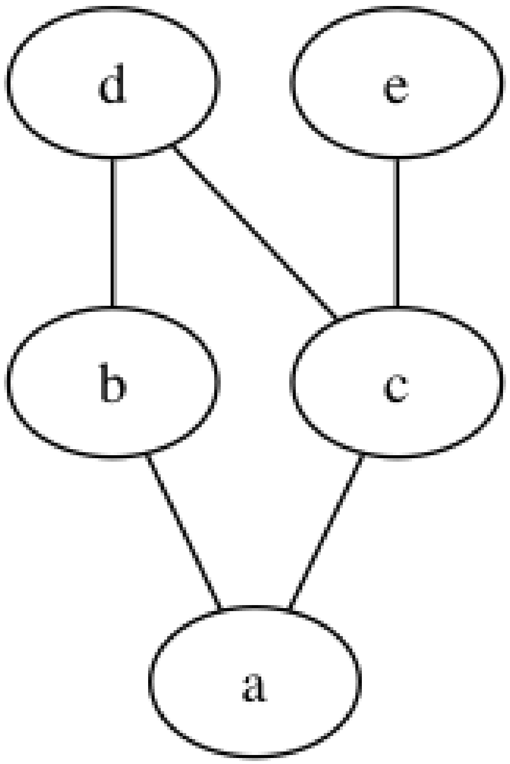
(vより小さいものはない)

極大元、極小元は有限半順序集合

には必ず存在する



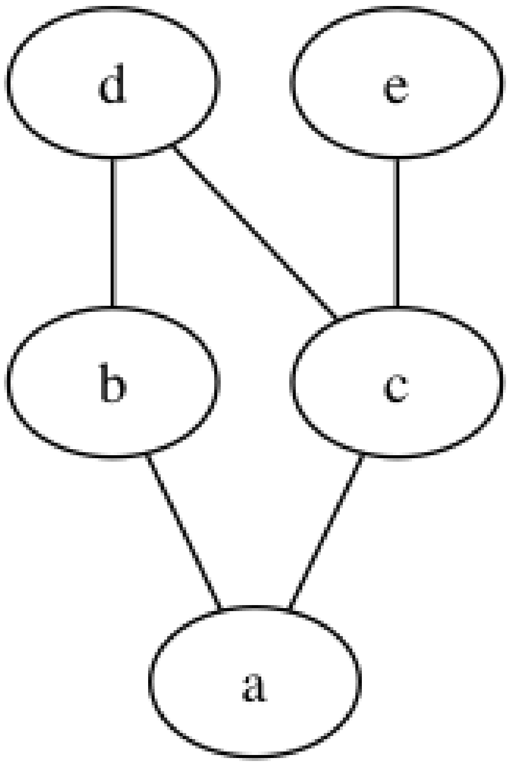
例題



左のハッセ図で，最大元、最小元があれば求めよ.

極大元，極小元をすべて求めよ.

例題



左のハッセ図で，最大元、最小元があれば求めよ．

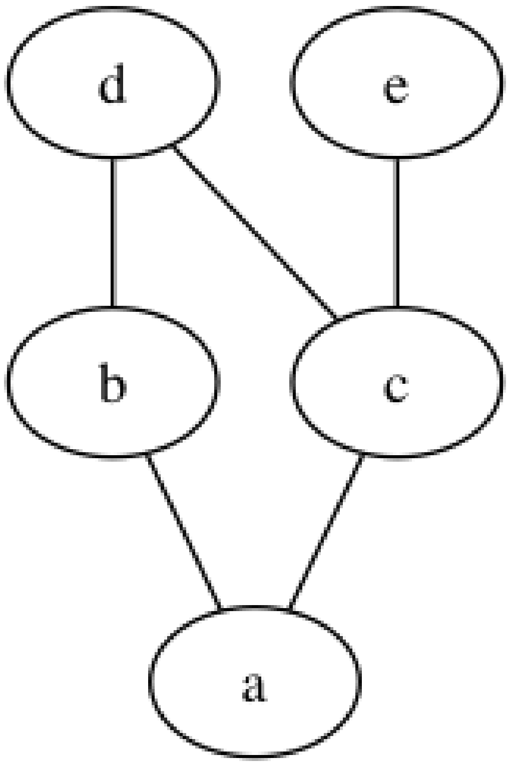
極大元，極小元をすべて求めよ．

[解答]

最大元 なし

最小元　a

例題



左のハッセ図で，最大元、 最小元があれば求めよ.

極大元，極小元をすべて求めよ.

[解答]

最大元 なし

最小元　a

極大元 d, e

極小元 a

8. 上限，下限

Def. 7

$(U, \leq)$を半順序集合とする．

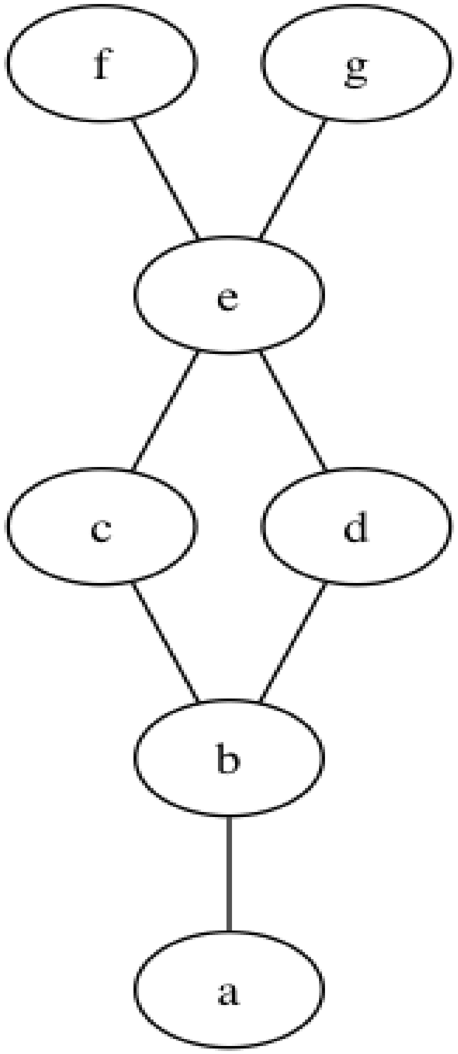
$X \subset U, \forall x \in X, u \in U, x \leq u$のとき，$u$を$X$の上界という． Xのすべての上界の最小元が存在するとき，それをXの上限といい，$\sup(X)$と書く．

Def. 8

$(U, \leq)$を半順序集合とする．

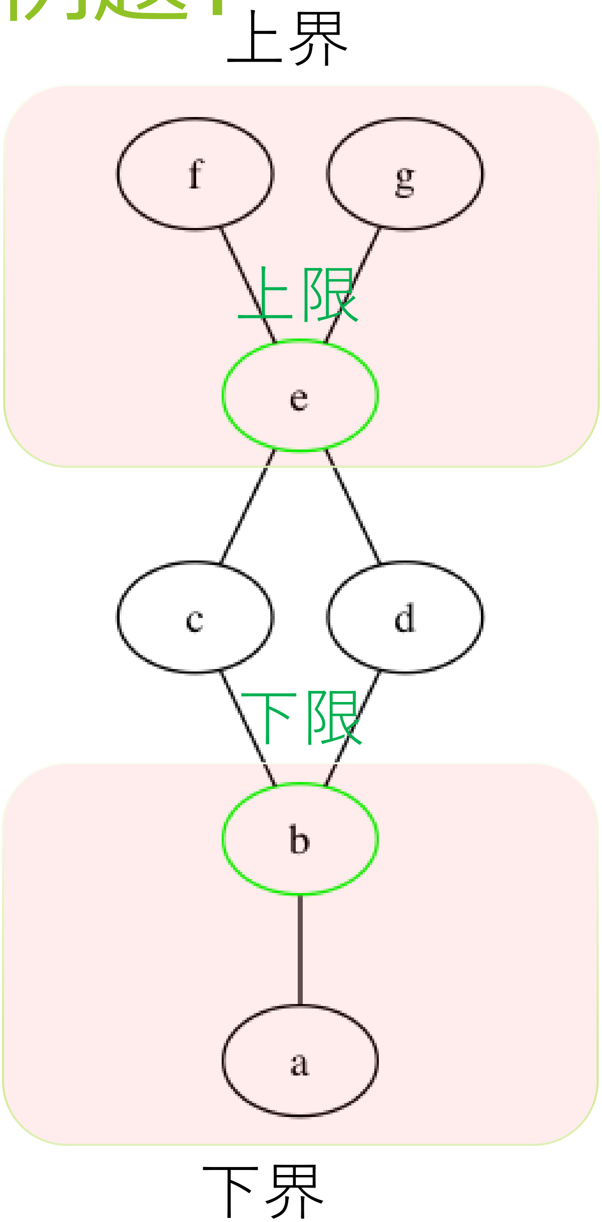
$X \subset U, \forall x \in X, v \in U, v \leq x$のとき，$v$を$X$の下界という． Xのすべての下界の最大元が存在するとき，それをXの下限といい，$\inf(X)$と書く．

例題1



左図のハッセ図で$X = \{b, c, d, e\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

例題1



左図のハッセ図で$X = \{b, c, d, e\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ.

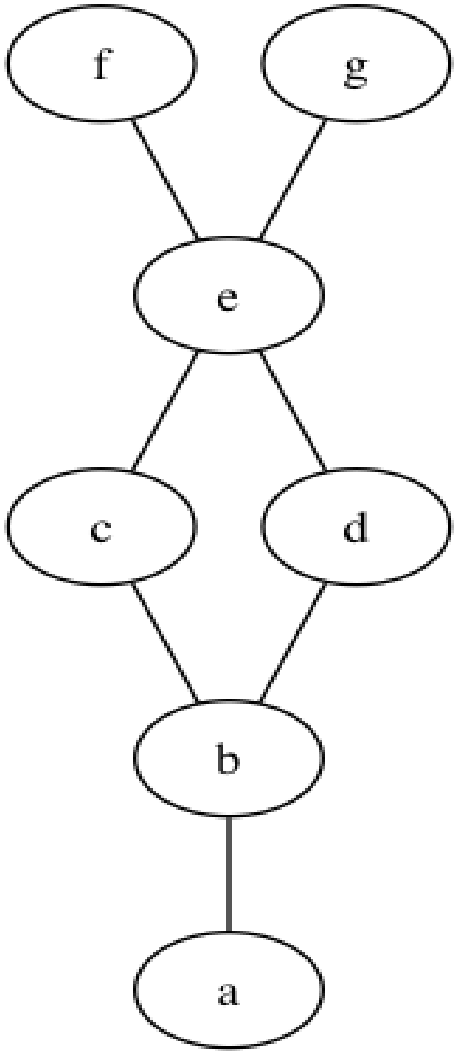
[解答]

上界　$\{e, f, g\}$ 下界$\{a, b\}$

上限　$\sup(X) = e$

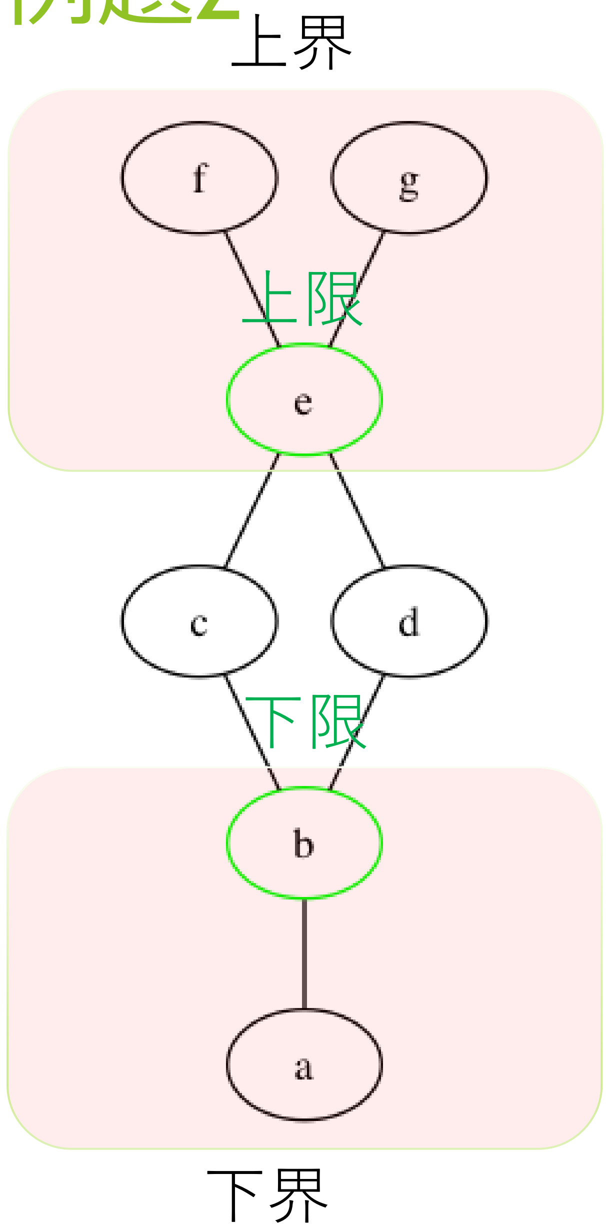
下限　$\inf(X) = b$

例題2



左図のハッセ図で$X = \{c, d\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ.

例題2



左図のハッセ図で$X = \{c, d\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

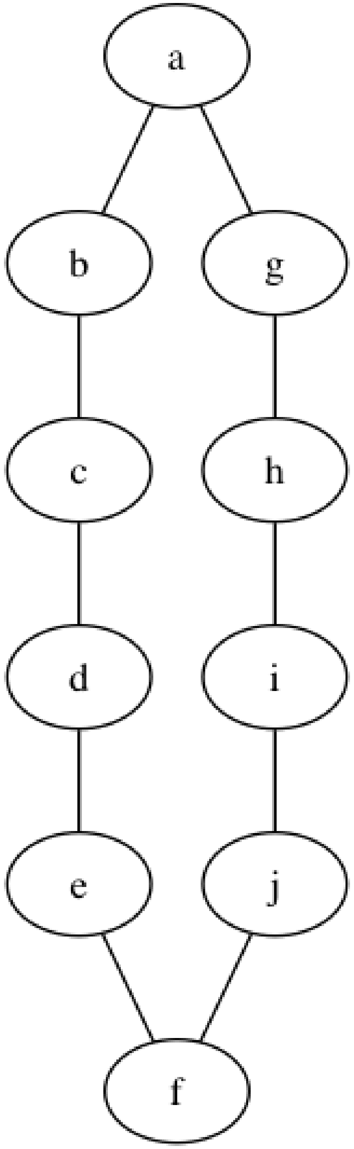
[解答]

上界　$\{e, f, g\}$ 下界 $\{a, b\}$

上限 $\sup(X) = e$

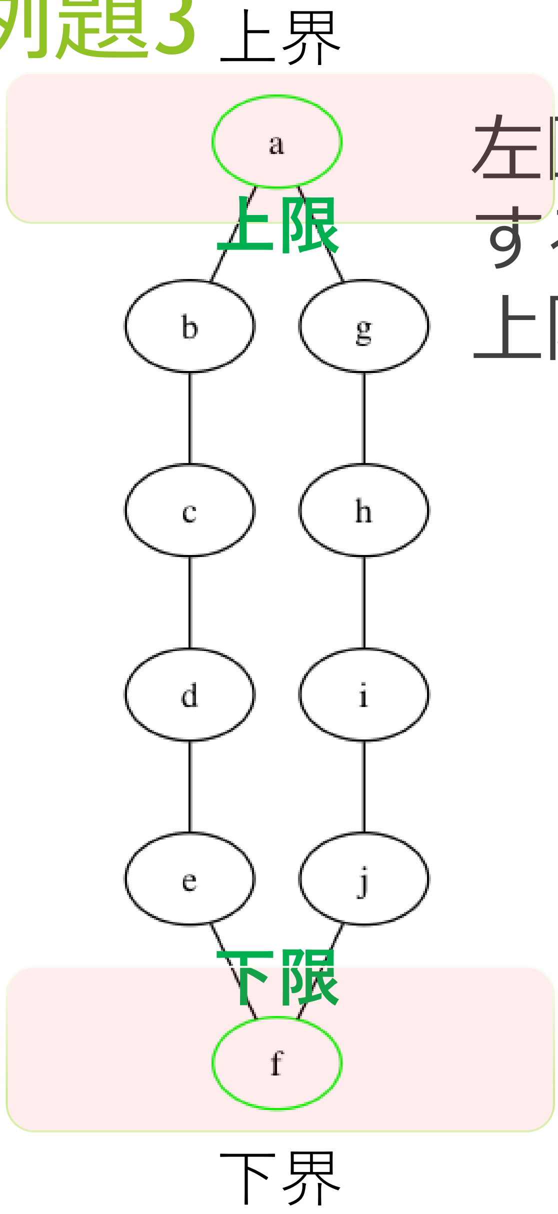
下限 $\inf(X) = b$

例題3



左図のハッセ図で$X = \{d, i\}$とする．このとき， Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

例題3



左図のハッセ図で$X=\{d,i\}$とする．このとき， Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

[解答]
上界　$\{a\}$ 下界$\{f\}$
上限 $\sup(X)=a$
下限 $\inf(X)=f$

順序関係、半順序関係の応用

順序関係、半順序関係、そしてそれらに基づく探索アルゴリズムは、コンピュータサイエンスにおけるデータ構造と効率的な情報検索の基礎となる概念。データがどのように並んでいるか（あるいは並んでいないか）の特性を利用して、探索や整列（ソート）を高速化する。

1. 順序関係の探索

特徴：データ構造が一列に並ぶ「線」。

- 二分探索（Binary Search）：データが全順序に従ってソートされている場合、計算量 O(logn)cap O open paren log n close paren$O(\log n)$で高速に探索可能

2. 半順序関係（Partial Order）と探索

特徴: 構造は「線」ではなく、DAG（有向非巡回グラフ）として表現される。

- トポロジカルソート: 半順序関係（依存関係）を矛盾なく一列に並べる手法です。タスクスケジューリングの探索などに使われる。
- 深さ優先探索（DFS）/ 幅優先探索（BFS）：グラフ構造における依存関係を辿るために使用される。
- 最長経路問題: 半順序関係における最大の連鎖（Chain）を見つける探索。

6.　まとめ

①　半順序
②　全順序
③　ハッセ図
④　最大元，最小元
⑤　極大元，極小元
⑥　上界、下界
⑦　上限、下限

演習問題

問題1

次の関係のうち，半順序関係でないのはどれか.

(1)整数の集合上で，「等しいか，より大きい」という関係.

(2)集合のクラスで，「部分集合である」という関係.

(3)集合のクラスで，「真の部分集合である」という関係.

問題2

$A = \{a, b, c\}$に次のように半順序≦が入っているとき、ハッセ図で表わせ。

(1) $\mathrm{b} \leqq a, c \leqq a$

(2) $\mathrm{b} \leqq c$

問題3

$(X, \leq)$を順序集合，AをXの空でない任意の部分集合とすると，$(A, \leq)$も順序集合になることを証明せよ.

問題4

Fを集合A上のすべての半順序関係の集合とする．

F上の関係Rを次のように定義する：

Fの任意の要素αとβについて，集合Aの任意の要素xとyに対して，「$x\alpha y \Leftrightarrow x\beta y$」が真であれば，$\alpha R\beta$が成立する．

このように定めたRはF上の半順序関係であることを証明せよ．