12.写像と関係

二項関係、関係行列、グラフによる表現

植野真臣

電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

第１回　10月 6日：第1回 命題と証明
第２回　10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月20日：第3回 命題論理
第４回　10月27日：第4回 述語論理
第５回　11月　3日：第5回 述語と集合
第６回　11月10日：第6回 直積と冪集合　(出張中につきHPの資料でオンデマンドで自習してください)
第７回　11月17日：第7回 様々な証明法 (1)
11月24日：調布祭の後片付けで休み

第８回　12月 1日：第8回 様々な証明法 (2)

第9回 12月8日　様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月15日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月22日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　1月5日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
第１３回　1月19日：第13回 同値関係
第１４回　1月26日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　2月2日：第15回 期末試験

1．本日の目標

①　関係（二項関係）
②　関係と写像
③　グラフによる表現
④　関係行列
⑤　有向グラフと無向グラフ
⑥　隣接集合と隣接行列
⑦　木、完全グラフ、クリーク
⑧　2部グラフ

1．関係（二項関係）

再掲５章：

Def 1.

二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合RをUからVへの「（二項）関係」という．

また，　$R \ni (a,b)$のとき　　aRb　：aとbは関係ある

　　　　$R \not\ni (a,b)$のとき　$a \not R b$　：aとbは関係なし

と書く．

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \qquad ○$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$R = \{(a, S)\}$ ○

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$ ×

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$ ○

$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S),$

$(c, T), (d, S), (d, T)\}$

$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$ ×

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \qquad ○$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \ ×$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \ ○$$

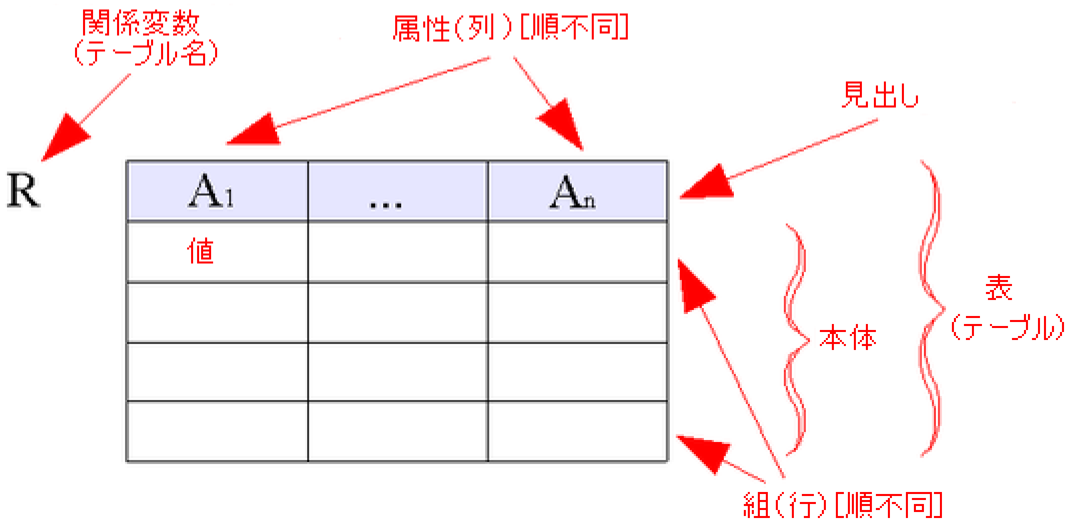
$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\} \ ○$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \ ×$$

参考：データベースとn項関係

データベース理論における関係モデルでは，関係の概念を n 項に拡張している．

すなわち，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$の部分集合として定義される．関係モデルの基礎的な要素は定義域、 instance ドメインである．



2. 関係の述語による内包的記述による定義

Def2.

自由変数$(a,b) \in U \times V$についての**2変数述語**

$P(a,b)$: $R \ni (a,b)$ の真理集合

$$\{(a,b)|P(a,b)\}$$

または

aRbの**真理集合**　$\{(a,b)|aRb\}$

をUからVへの「関係」，もしくは「二項関係」という．

３. 関係による写像の定義

Def 3.

自由変数$(a, b) \in U \times V$についての述語aRbが各aに対して一つのbが対応するとき,

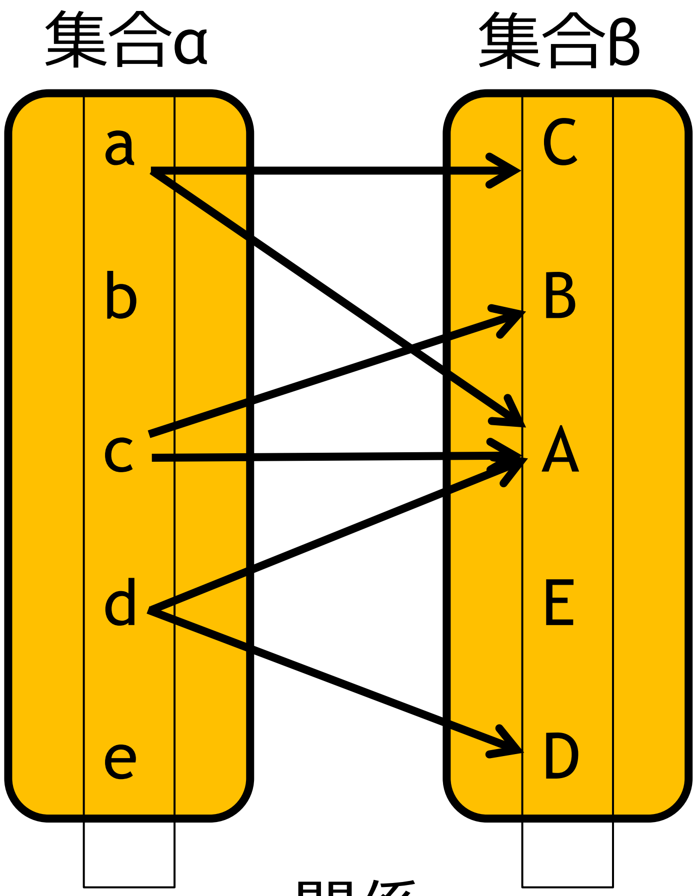
$$\{(a, b) | aRb\}$$

をUからVへの「写像」と呼ぶ.

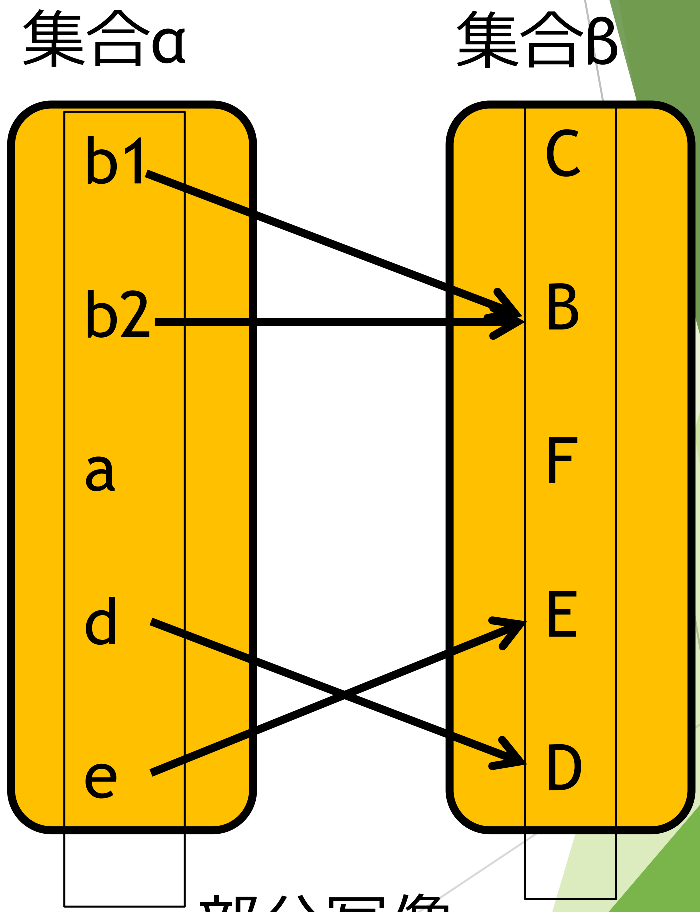
写像の中で対応するbがないaを許す場合，UからVへの「部分写像」と呼ぶ.

写像は、関係の特殊なケース.

「関係」の図示表現（関係を→で示す）



関係



部分写像

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

関係　　写像

(1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$

(2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$

(3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$

(4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$

(5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数

例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$		
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

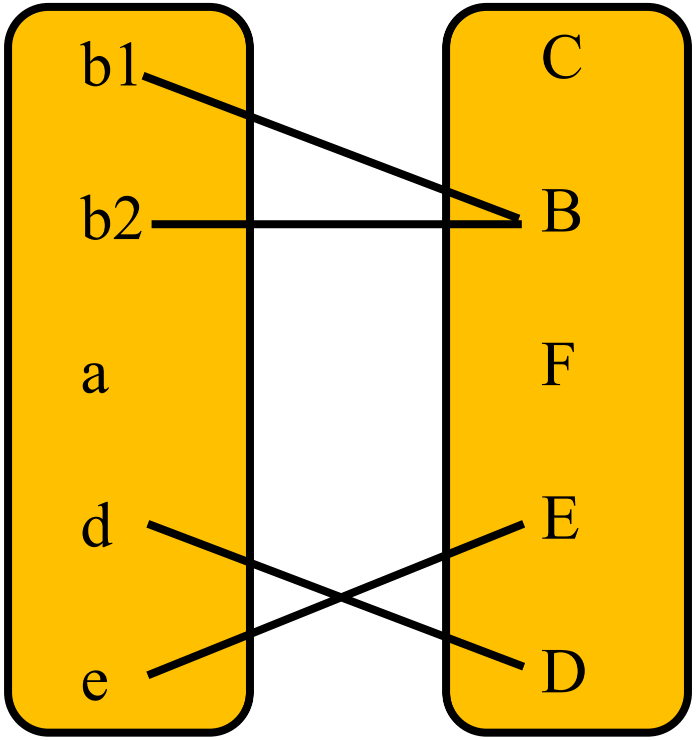
		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

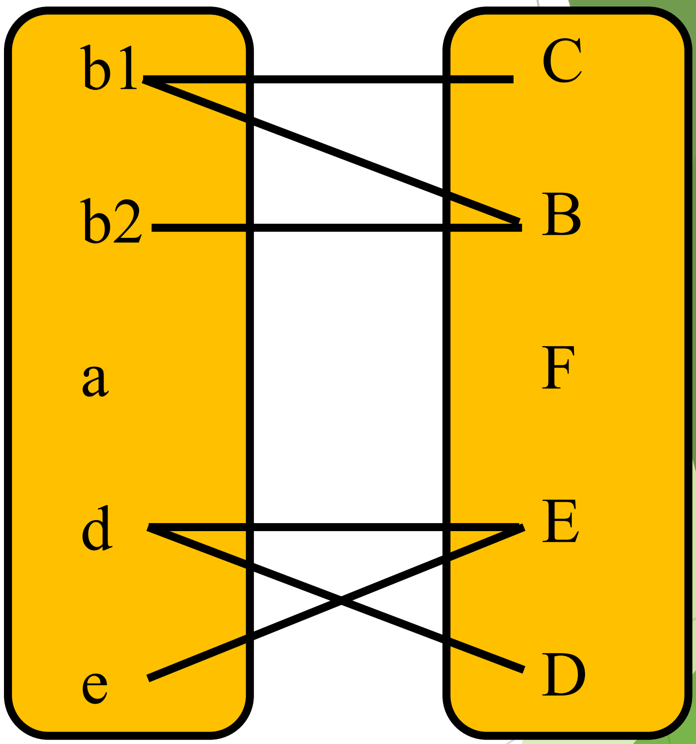
以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数	○	×

関係は部分写像の一般化



部分写像



関係

4. 関係行列

Def　4

二つの集合を $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$として，$A$から$B$への関係行列は　$R=\{r_{ij}\},(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$

$$r_{ij}=\begin{cases}1: a_iRb_j のとき\\0: a_i\not R b_j のとき\end{cases}$$

として定義される.

例題 1

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

例題 1

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例題２

$$U=\{a,b,c,d\},V=\{S,T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R=\{(a,S),(b,S),(b,T),(d,S)\}$$

例題２

$$U=\{a,b,c,d\},V=\{S,T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R=\{(a,S),(b,S),(b,T),(d,S)\}$$

解答

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

例題３

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

例題３

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 上への関係

Def 5

集合AからAの関係を，「A上の関係」（または「中の関係」）と呼ぶ.

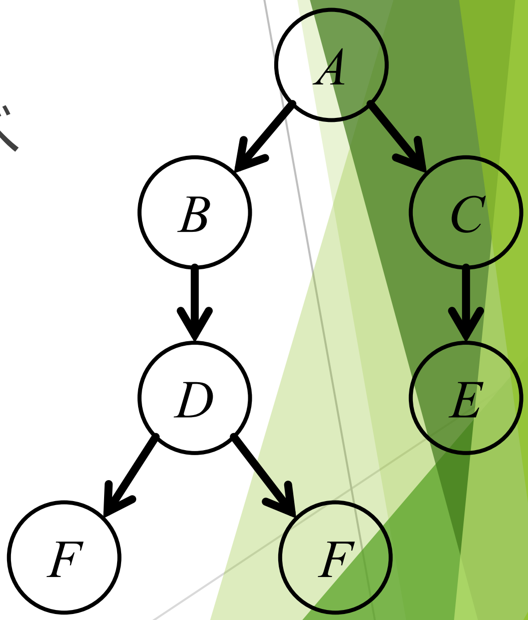
グラフによる関係の表現

Def 6

グラフ $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は二つの集合 $\mathbf{V}$ と $\mathbf{E}$ によって定義され， $\mathbf{V}$ は 頂点（Vertex）（または，節点・ノード）の有限集合 $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$で, $\mathbf{E}$ は辺(edge)（または枝、アーク）集合である．さらに，グラフは個々の頂点における二つの組を結合したすべての可能性のある集合の部分集合である．

Def 7

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$をグラフとする． $E_{ij} \in \mathbf{E}$ かつ $E_{ji} \notin \mathbf{E}$のとき，枝E_{ij} を**有向辺**（directed edge）と呼ぶ． V_i と V_jの有向辺は$V_i \to V_j$と書く．



有向グラフと無向グラフ

Def 8

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ をグラフとする． $E_{ij} \in \mathbf{E}$ かつ$E_{ji} \in \mathbf{E}$のとき，辺 E_{ij} を**無向辺**（undirected edge）と呼ぶ．V_i と V_jの無向辺は $V_i - V_j$ または$V_j - V_i$と書く．

Def 9

すべての辺が有向辺のグラフを**有向グラフ**（directed graph）と呼び，すべての辺が無向辺のグラフを**無向グラフ**（undirected graph）と呼ぶ.

例

有向グラフと無向グラフの例を図(a), (b) にそれぞれ示している．

有向グラフ(a) では，グラフは以下で与えられ，

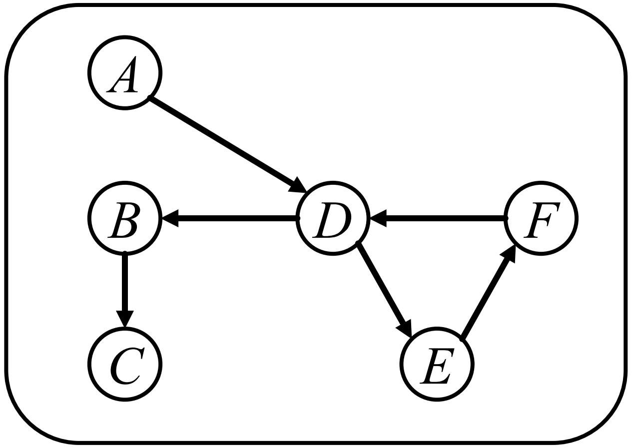
$$\mathbf{V} = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$\mathbf{E} = \{A \rightarrow D, B \rightarrow C, D \rightarrow B, F \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow F\}$$

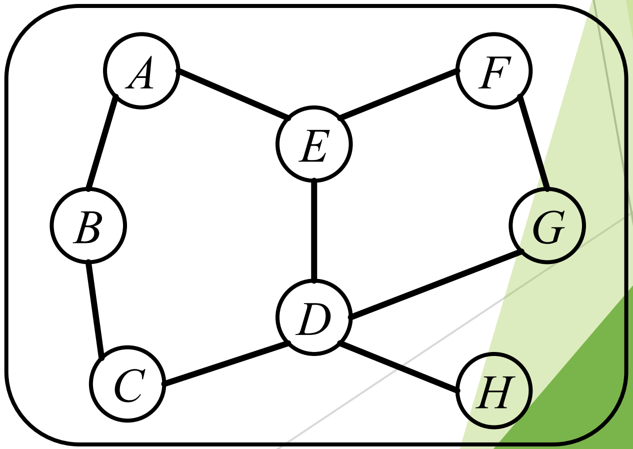
無向グラフ(b) では，グラフは以下で与えられる．

$$\mathbf{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$\mathbf{E} = \{A - B, B - C, C - D, D - E, E - A, E - F, F - G, G - D, D - H\}$$



(a)



(b)

二項関係とグラフは同値

有向グラフ　$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$において,

$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^2$であり, $\mathbf{E}$は$\mathbf{V}$上の二項関係

⇔

有限集合上の二項関係が定義されていると,二項関係を普遍集合の部分集合とみなせるので、有向グラフで表現できる

⇔「有限集合上の二項関係」

⇔「有向グラフ」

A上の関係Rのグラフ表現

A上の関係Rのグラフ表現を
頂点集合をAとして，
aRbであるときのみ，$a \to b$という有向辺による有向グラフで表現する。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

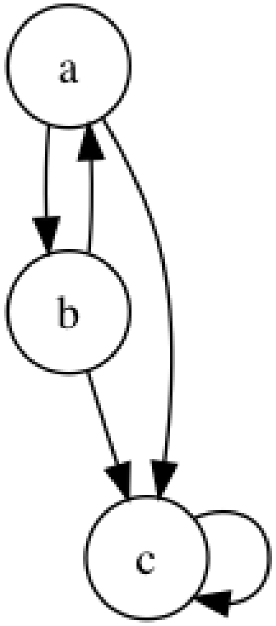
集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,c)\}$を有向グラフで示せ。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

[解答]



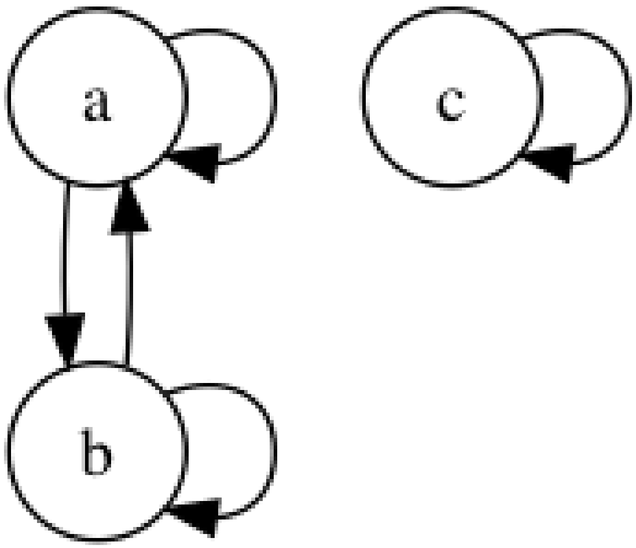
例題2

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

例題2

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

[解答]



6. A上の関係の関係行列

Def 10

集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$上の関係の関係行列は　$R=\{r_{ij}\},(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,m)$

$$r_{ij}=\begin{cases}1: a_i R a_j のとき\\ 0: a_i \not R a_j のとき\end{cases}$$

として定義される.

例題1

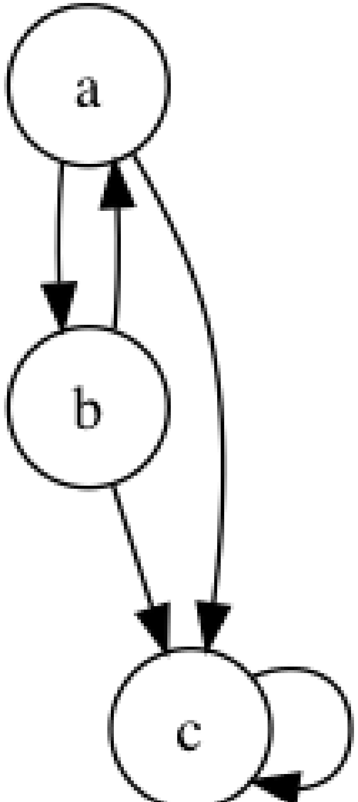
集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

例題1

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題2

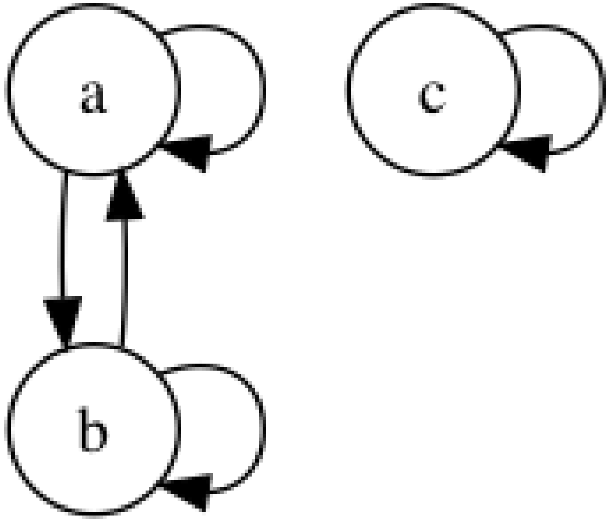
集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

例題2

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題3

$A=\{a,b,c,d\}$上の関係Rについて，次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(d,a),(d,d)\}$$

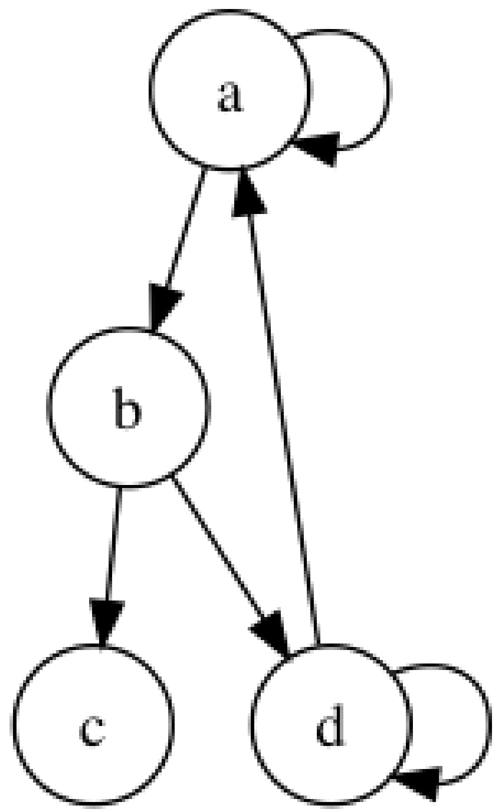
例題3

$A=\{a,b,c,d\}$上の関係Rについて，次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(d,a),(d,d)\}$$

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$



7. 具体的な関係

例題１

$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R\ni(a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

7. 具体的な関係

例題１

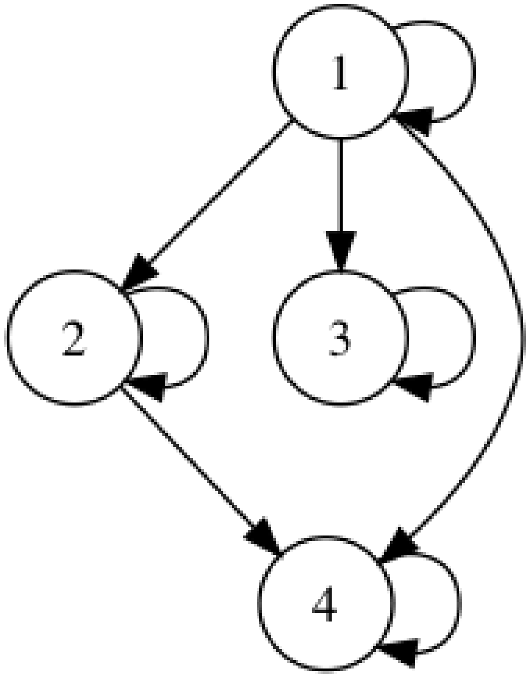
$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R \ni (a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



例題 2

$A=\{a,b\}$の冪集合2^A上の関係Rについて

$X,Y\in 2^A$のとき　$XRY\ :X\subseteq Y$ とすると，

関係行列と有向グラフを書け。

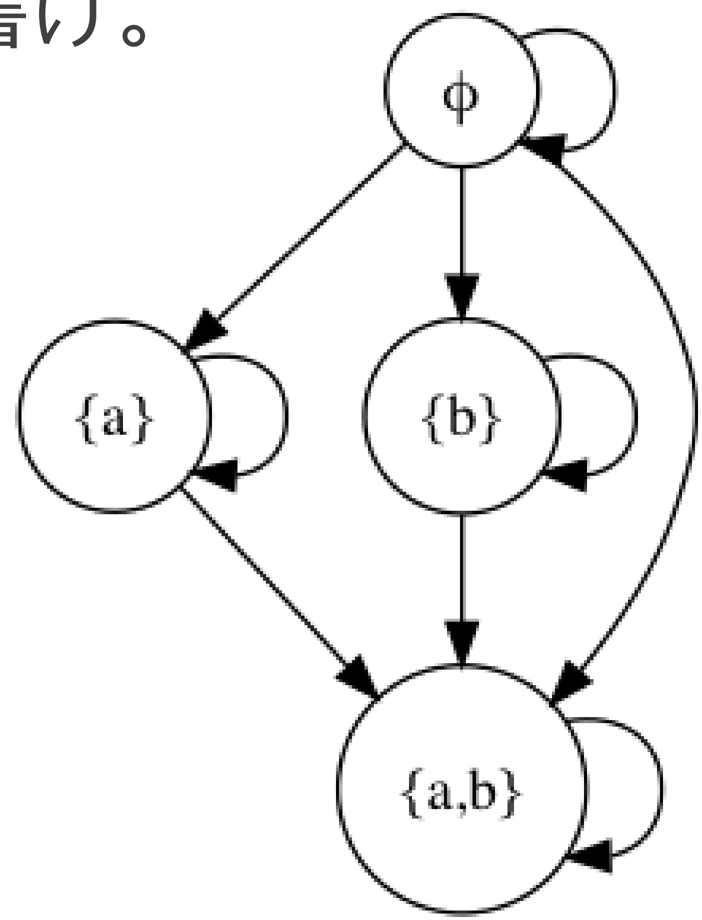
例題２

$A=\{a,b\}$の冪集合2^A上の関係Rについて
$X,Y\in 2^A$のとき　$XRY\ :X\subseteq Y$ とすると，
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$2^A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



例題3

$A = \{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$x, y \in A$のとき　xRy ：$x < y$ とすると,
関係行列と有向グラフを書け。

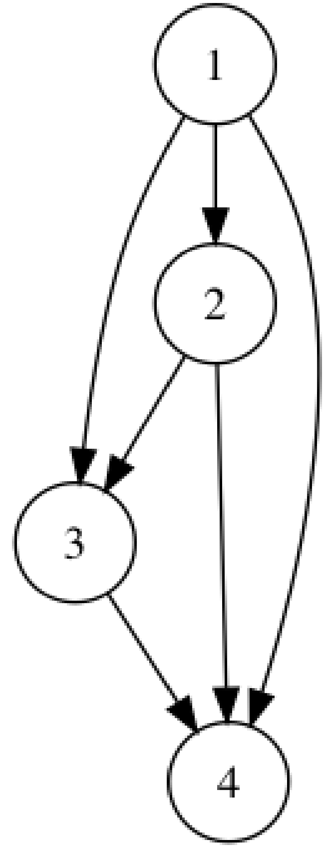
例題3

$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$x,y\in A$のとき　xRy ：$x<y$ とすると,
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



ここから
グラフ理論の基礎を学びます

9．隣接頂点集合

Def 11

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，V_iの隣接頂点集合（adjacency vertexes set）は，V_iから直接辺が引かれた頂点集合

$Adj(V_i) = \{V_j \in \mathbf{V} | E_{ij} \in \mathbf{E}\}$を示す.

Def 12

グラフGでV_iに接続する辺の数をV_iの次数といい， $\mathrm{d}(V_i)$と書く.

Th. 1

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，

$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \cdots V_i\ , \cdots\ V_N\}$で辺の数が$q$のとき，

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i)\ = 2q$$

Th. 1

$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ について，$\mathbf{V}=\{V_1, V_2, \cdots V_i, \cdots V_N\}$ で辺の数がqのとき，

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$$

[証明] 一つの辺は次数としてはかならず両端を含めて2と数えられるので，$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$

■

隣接行列

Def 12

$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ について， $\mathbf{V}=\{V_1,V_2,\cdots V_i,\cdots V_N\}$

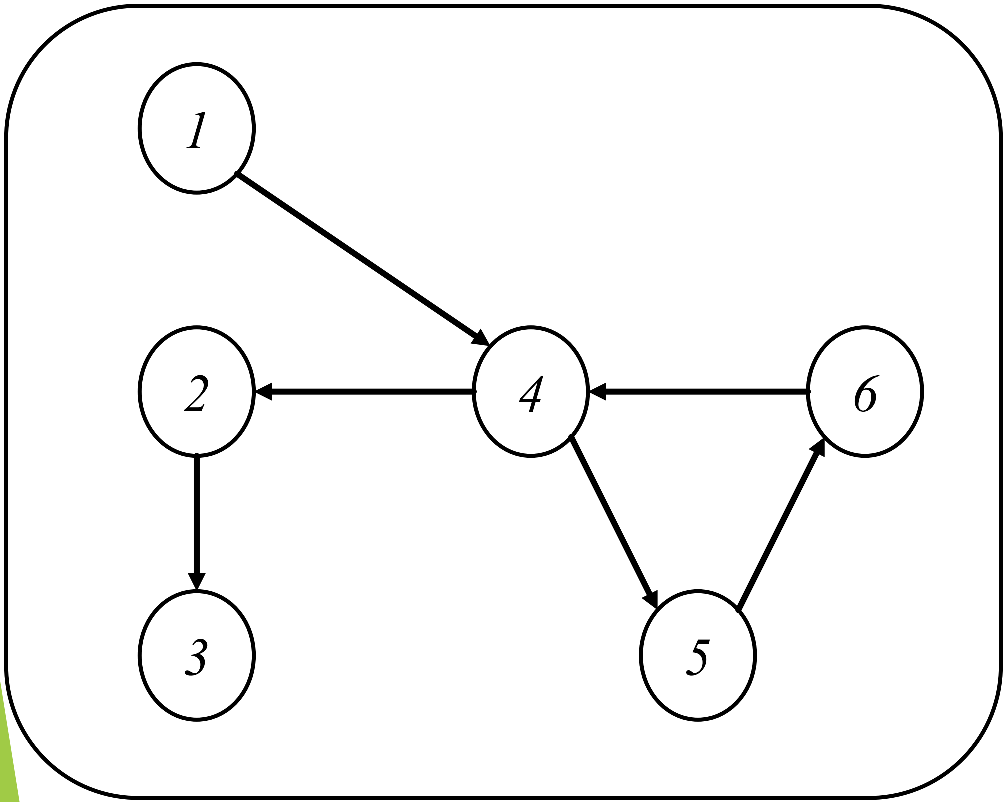
のとき，以下の行列

$$R=\{r_{ij}\},(i=1,\cdots,N,j=1,\cdots,N)$$

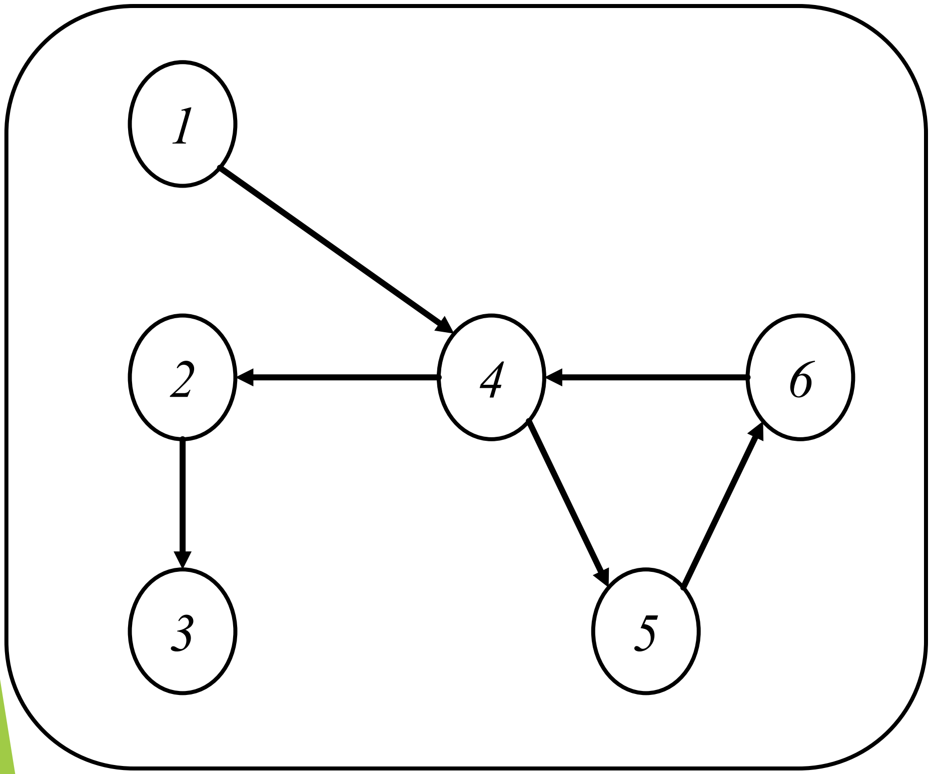
$r_{ij}=V_i$とV_jを結ぶ辺数

をGの隣接行列と呼ぶ。

例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Th. 2

関係行列は，二頂点間の辺があるかないかを示した隣接行列である。

10.歩道

Def. 13　V_i からV_j への**歩道（walk）**（または散歩）は，$V_{i_1} = V_i$で始まり，$V_{i_r} = V_j$ で終わるような以下を満たす順序化された頂点集合$(V_{i_1}, \dots, V_{i_r})$ を示す.

$$V_{i_{k+1}} \in Adj(V_{i_k}).\quad (k = 1, \dots, r - 1)$$

10. 経路と小道、閉路 （用語は教科書によって違う場合がある）

Def.14すべての頂点が異なる経路を**経路(path)**

(または道、単純道、路)と呼ぶ．(「最短ルート」や「一方通行の旅」。一度訪れた場所には二度と戻れない。)

すべての辺が異なる経路を**小道 (trail)**

（または跡、辺道）と呼ぶ．（一筆書きのように進み、交差点となる頂点には戻ってもよい。道は交差点となる頂点にも戻れない。）

Def.15 始点と終点が同じ頂点となる場合

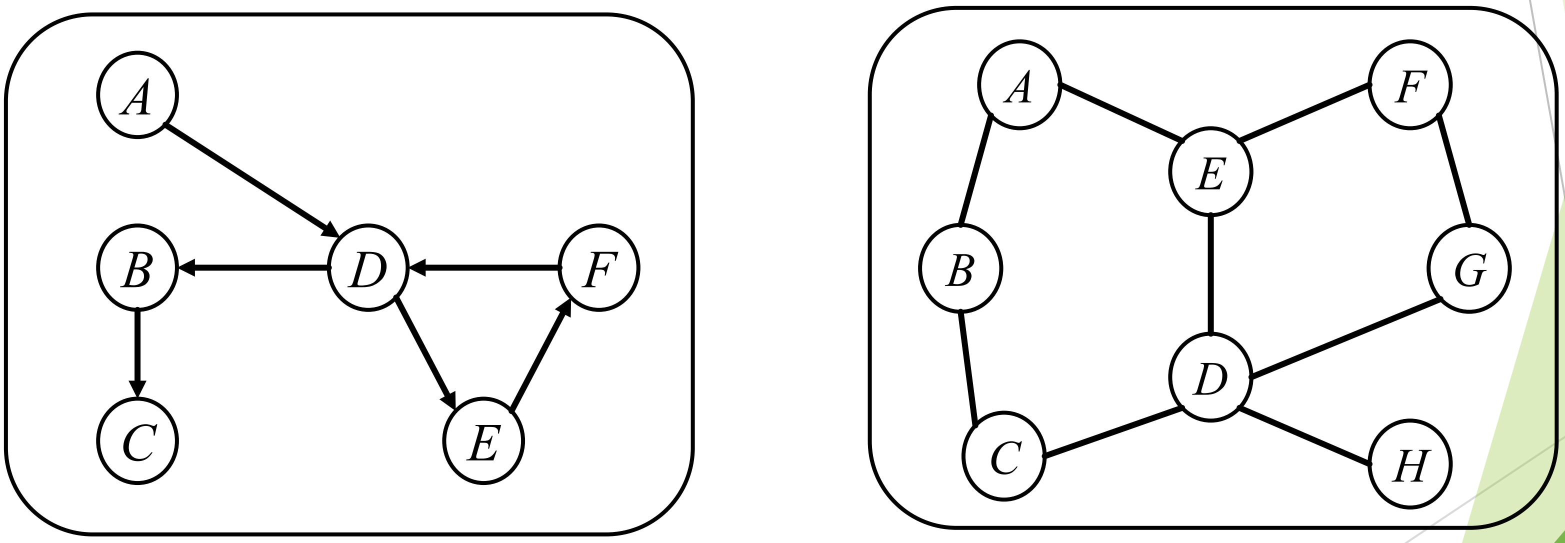
（すなわち，$V_{i_1} = V_{i_r}$），路 $(V_{i_1}, \ldots, V_{i_r})$

は**閉路**（closed path）と呼ばれる.

例

有向グラフ(a)の経路$D \to E \to F \to D$ は**閉路**である.

無向グラフ(b)の経路$A - B - C - D - E - A$ は**閉路**である.



(a) (b)

Th. 3

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，

$\forall V_i \in \mathbf{V}, \mathrm{d}(V_i) \geq 2$のとき，必ず$G$は閉路を含む.

Def 16 同型

二つのグラフ$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ と$G' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ について,

$\mathbf{V} = \mathbf{V}'\quad \land \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}'$

のとき,二つのグラフは同型であるという。

$G \cong G'$

と書く.

11．完全グラフと完全集合

Def 17

すべての頂点間に辺が張られた無向グラフを**完全グラフ**（complete graph）と呼ぶ．N 頂点の完全グラフを K_N と示す．

Def 19

グラフGの部分頂点集合S が，すべての頂点間に辺が張られている場合，S を**完全集合**（complete set）と呼ぶ．

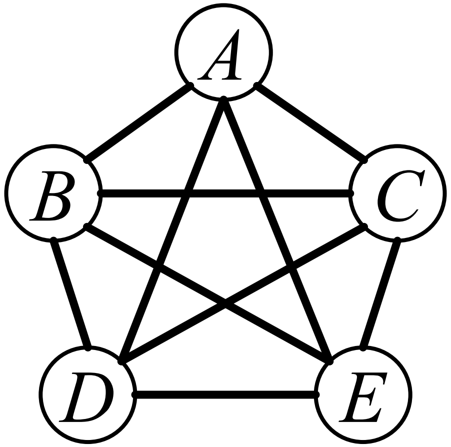


図　完全グラフK_5

12. クリーク

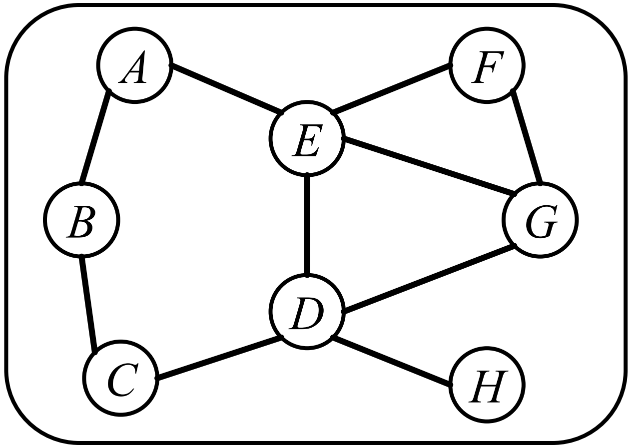
Def 18

完全集合Cが他のどの完全集合の部分集合にもなっていない場合，すなわち，最大の完全集合である場合，Cを**クリーク**（clique）と呼ぶ.

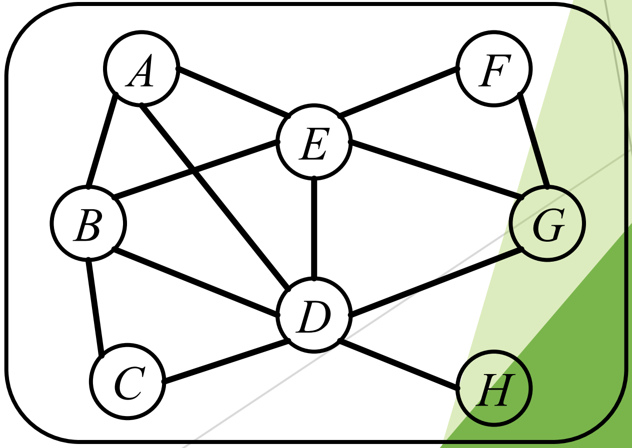
例

図 は，二つの異なるグラフのクリークを示している．グラフ(a)は，クリーク$C_1=\{A,B\}$，$C_2=\{B,C\}$，$C_3=\{C,D\}$，$C_4=\{D,H\}$，$C_5=\{A,E\}$，$C_6=\{D,E,G\}$，$C_7=\{F,E,G\}$を含む．

グラフ(b) は，クリーク$C_1=\{A,B,D,E\}$，$C_2=\{B,C,D\}$，$C_3=\{D,H\}$，$C_4=\{D,E,G\}$，$C_5=\{E,F,G\}$を含む．



(a)



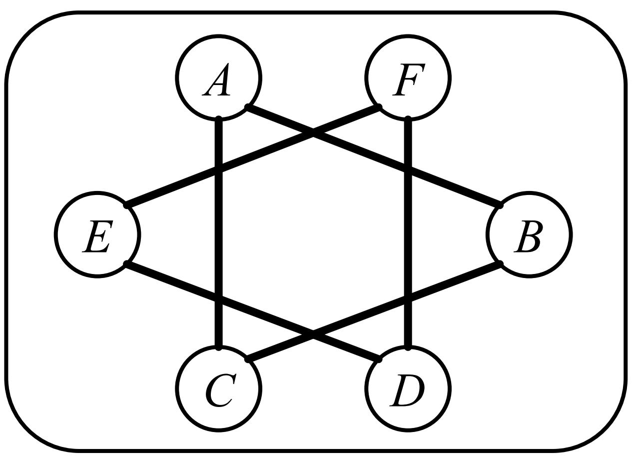
(b)

Def . 19　連結グラフと非連結グラフ

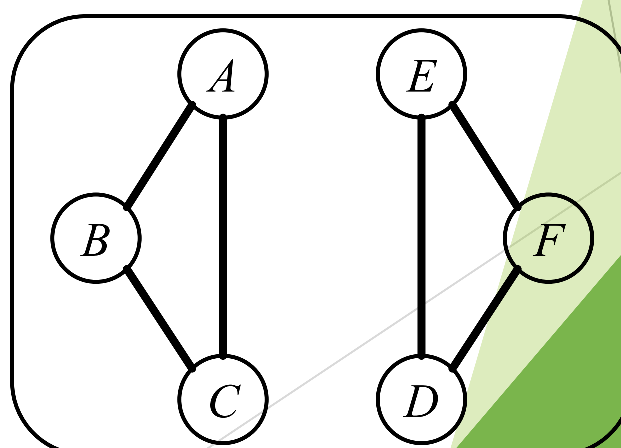
無向グラフのすべての二つの頂点間で少なくとも一つの歩道が存在するとき，**連結グラフ**（connected graph）と呼ぶ.
それ以外を**非連結グラフ**（disconnected graph）と呼ぶ.

例18

図 は，同じ構造をもつ非連結グラフの異なる二つの表現である．図(a) はエッジが交差しており，非連結には見えないが，図(b) のように交差を外し，分離すればより非連結性が強調される.



(a)



(b
)

Def. 20　木

閉路を持たない連結グラフTを木(tree)とよぶ.

Th. 5　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ の　$\forall V_i \ \forall V_j \in \mathbf{V}$について，$V_i$と$V_j$を結ぶただ１つの道が存在する．

Th. 6　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は連結であり，　どの辺を除いても連結ではなくなる.

Th. 7　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は閉路を持たず、　辺をどのように一つ加えても閉路を一つ持つグラフになる.

Th. 8

*N*個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は，*N-1*個の辺を持つことである.

*N*個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は，*N-1*個の辺を持つことである.

[証明]　数学的帰納法を用いる.

(1) 頂点数が2のとき,辺が１つで木である.

(2) 頂点数がNのとき,木の必要十分条件はN-1個の辺であるとする.

頂点数がN+1のとき,閉路を持たない連結グラフになるように1つの辺をN+1番目の頂点とそれ以外の1つの頂点の間に加えなければならない.このとき,頂点数-1の辺が存在することになる.　■

Def 21. 2部グラフ

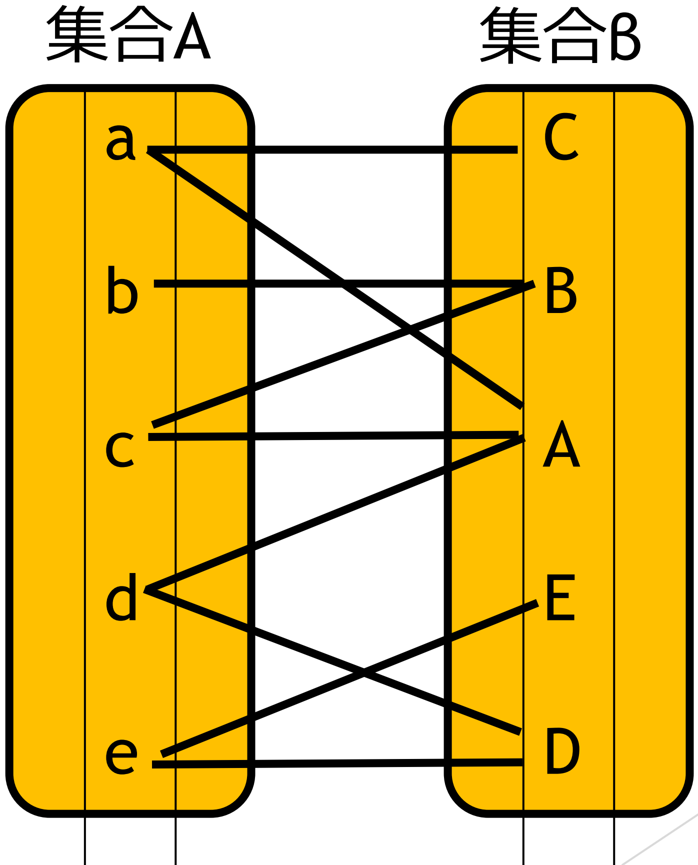
$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$とし, $\mathbf{E}$の要素である辺は

$\mathbf{V}=V_1\cup V_2$, $V_1\cap V_2=\emptyset$, $(V_1\neq\emptyset, V_2\neq\emptyset)$ となるような$\mathbf{V}$の部分集合V_1, V_2の頂点を結ぶようにできるとき, Gを2部グラフと呼ぶ.（頂点を2つのグループに分けたとき、同じグループ内には線が引かれないグラフのこと）

さらに　V_1とV_2のすべての頂点が互いに結ばれてる2部グラフを,完全2部グラフと呼び, $K(m,n)$で示す. $m=|V_1|$, $n=|V_2|$.

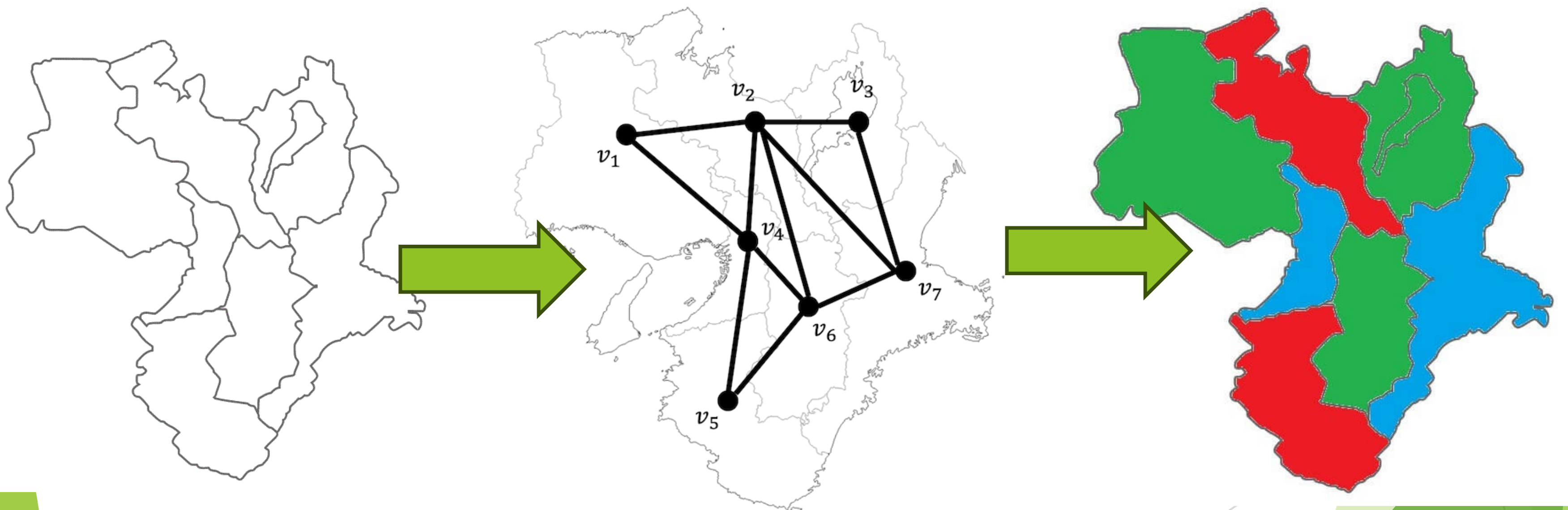
2部グラフとは

頂点集合を二つの部分集合に分割して各集合内の頂点同士の間には辺が無いようにできるグラフ



応用：２部グラフによる色彩問題

隣り合っている部分が異なる色になるように色分けする



応用：異なる2つの属性を持つものの同士の関係のモデル化

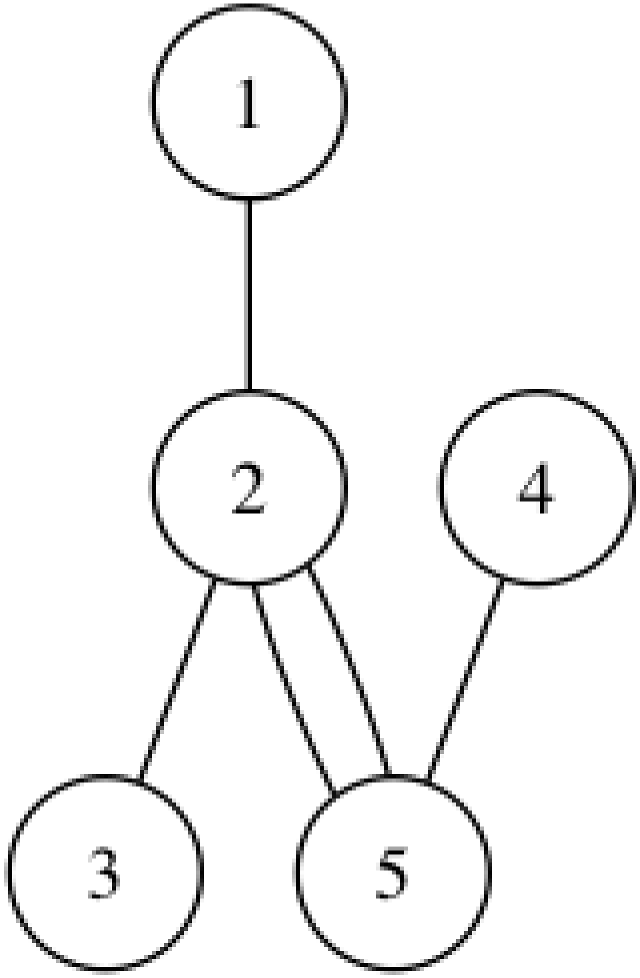
① マッチング問題（割り当て）

- **就活・採用：** 「学生の集合」と「企業の集合」があり、お互いの希望を枝で結ぶ。最適なペアをいくつ作れるか（最大マッチング）を計算。
- **婚活・合コン：** 「男性」と「女性」のグループ間で、好意がある同士を結ぶ。
- **タスク割り当て：** 「作業員」と「仕事」の集合。誰がどの仕事を担当できるかを整理。
- **② 推薦システム（リコメンド）**
- AmazonやNetflixなどの裏側でも使われている。
- **ユーザーと商品：** 「ユーザー」と「購入した商品」を2部グラフにする。自分と似たような商品を買っている別のユーザーを探すことで、「あなたへのおすすめ」を導き出す。

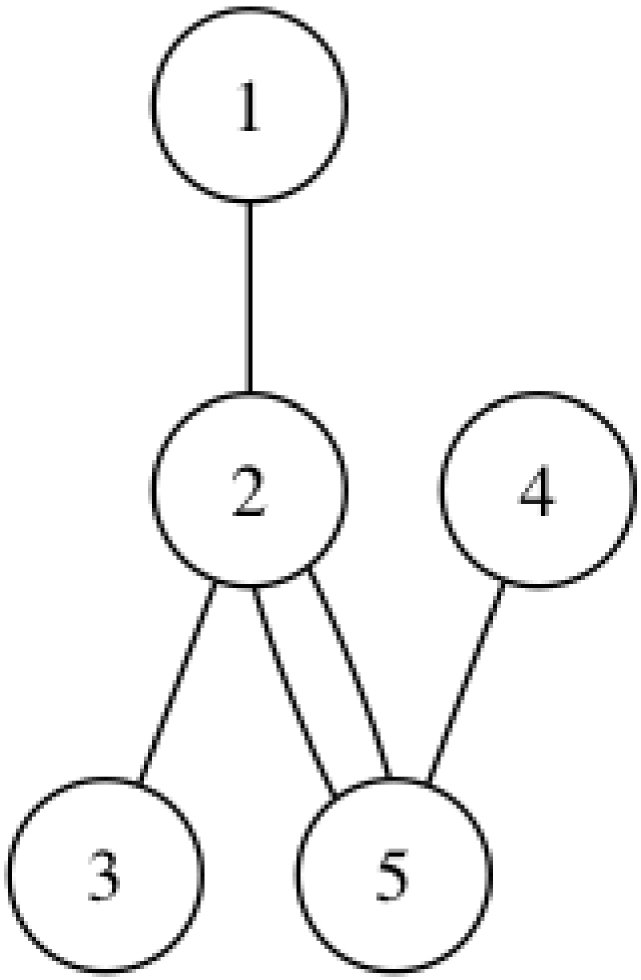
③ ネットワーク構造の解析

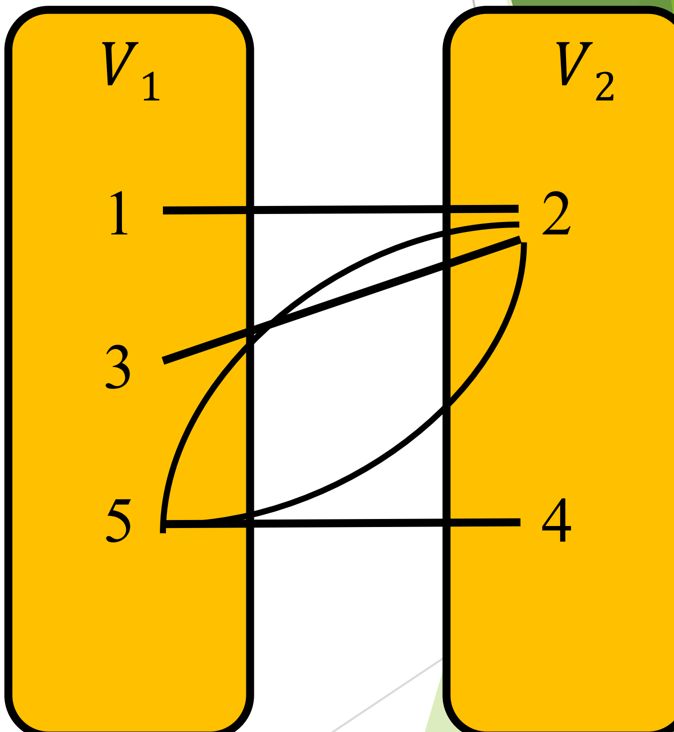
- **共著関係：** 「論文」と「著者」のグラフ。どの著者がどの論文を書いたかを整理し、研究者のつながりを分析。
- **アフィリエイト・広告：** 「広告主」と「掲載サイト」の関係など。

例題１　以下のグラフは2部グラフか。

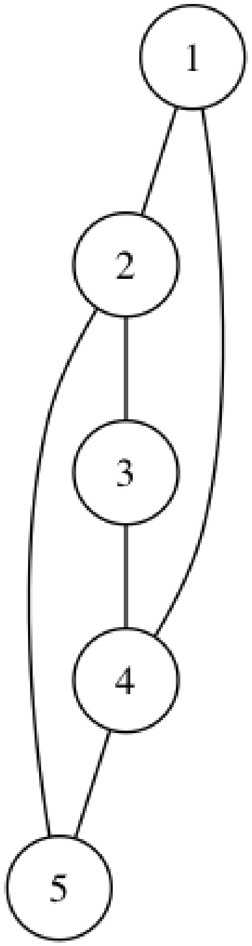


例題１　以下のグラフは2部グラフか。

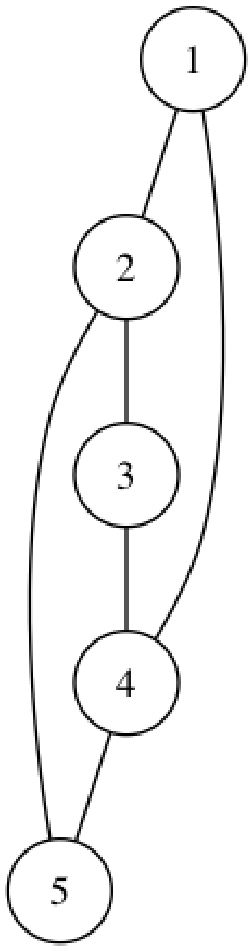


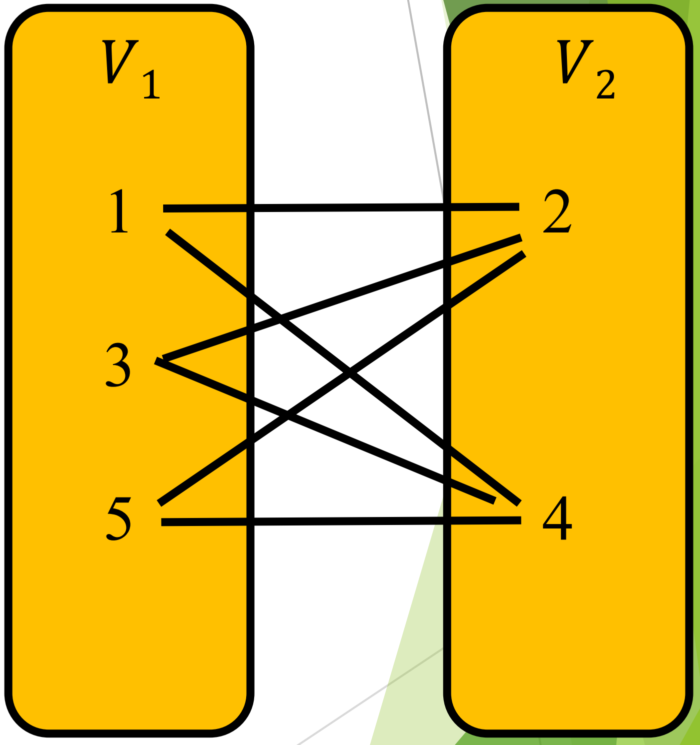


例題２　以下のグラフは2部グラフか。



例題２　以下のグラフは2部グラフか。





完全2部グラフ $K(3,2)$

Def　オイラーグラフ

すべての辺をちょうど1回ずつ通って出発点に戻る閉じた小道が存在するグラフ　（一筆書き）

- 連結であること
- すべての頂点の次数が「偶数」であること

Th 9

連結グラフGがオイラーグラフであるための必要十分条件は, Gの頂点がすべて偶頂点（次数が偶数である頂点）であることである.

Def　準オイラーグラフ

オイラーグラフの条件を緩和：元の場所に戻らなくてもいい。周遊可能なグラフともいう。

- 連結であること

Gの頂点がすべて偶頂点か同じ奇頂点が0個か２個存在すること。

オイラーグラフの応用

1. **郵便配達・ゴミ収集・除雪ルート（中国郵便配達問題）**

- 郵便配達員がすべての通りを少なくとも1回は通って、出発した郵便局に戻る最短ルートを求める問題は、グラフ理論では**「中国郵便配達問題（Chinese Postman Problem）」**と呼ばれている。
- **グラフがオイラーグラフの場合：** すべての辺を1回ずつ通るだけで済むため、それがそのまま最短ルートとなる。
- **オイラーグラフでない場合：** 奇数次数の頂点（行き止まりや三叉路など）を結ぶ辺を、どこか「重複して」通る必要がある。どの辺を重複させれば最短距離になるかを計算するのに、一筆書きの考え方が使われる。

2. **DNA配列の復元（ゲノムアセンブリ）**

- 現代バイオテクノロジーの 膨大なDNA配列を読み取るとき、一度にすべてを読むことはできない。まずバラバラの断片（k-mer）として読み取り、それをつなぎ合わせる必要がある。
- **ド・ブラウン・グラフ（De Bruijn graph）：** DNAの断片を辺とし、それらが重なり合う部分を頂点としたグラフを作ります。このグラフの中で、**すべての断片（辺）を1回ずつ通る道（オイラー路）**を見つけることが、元の正しいDNA配列を復元することに相当する。

3. **回路設計と製造（CMOSレイアウト）**

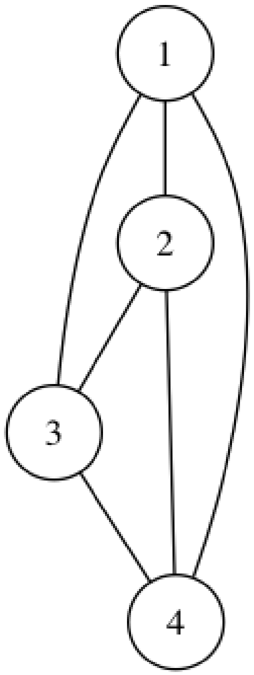
- ICチップなどの電子回路の設計において、配線を効率よく、かつ面積を小さく収めるためにオイラーグラフが使われる。半導体上のトランジスタを配置する際、接続部分を「一筆書き」にできるレイアウトにすると、配線の重なりや無駄なスペースを劇的に減らすことができ、製造コストの削減や動作の高速化に繋がる。

4. **道路・鉄道の点検ルート**

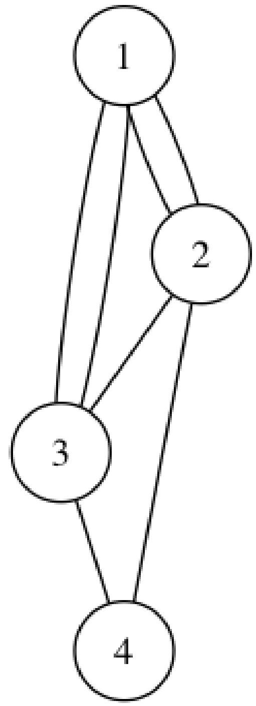
- **橋梁や線路の点検：** 点検車両が、すべての路線（辺）を漏れなく、かつ最短時間で回るルートを算出する際に、オイラーグラフのアルゴリズムが組み込まれたソフトが使われる。

例題1 以下のグラフは準オイラーグラフか、オイラーグラフか？

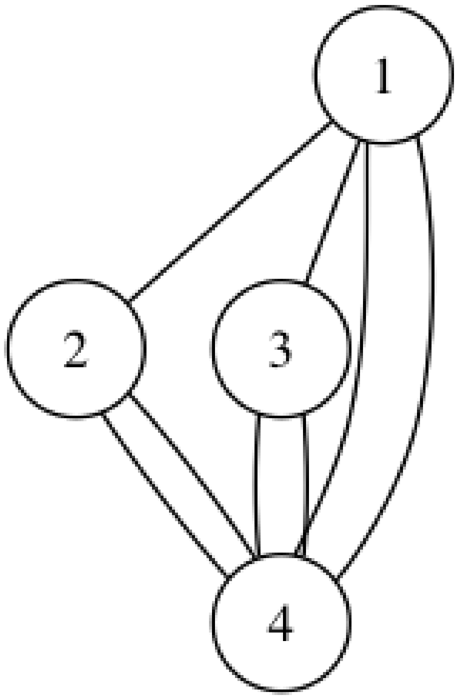
（１）



(2)

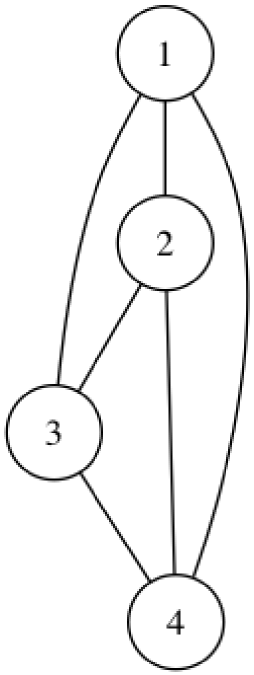


(3)



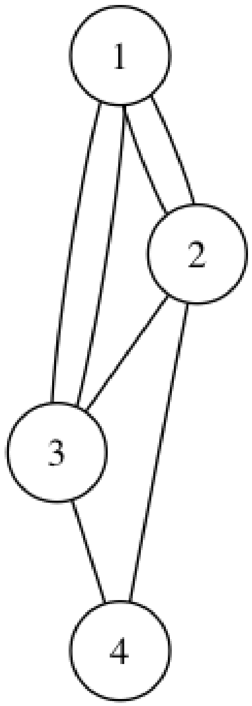
例題1 以下のグラフは準オイラーグラフか、オイラーグラフか？

（1）

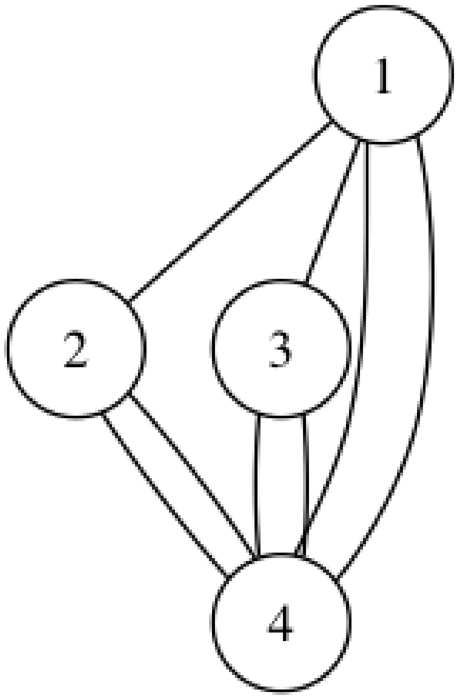


すべて次数が3で準オイラーグラフでなく,オイラーグラフでない。

(2)

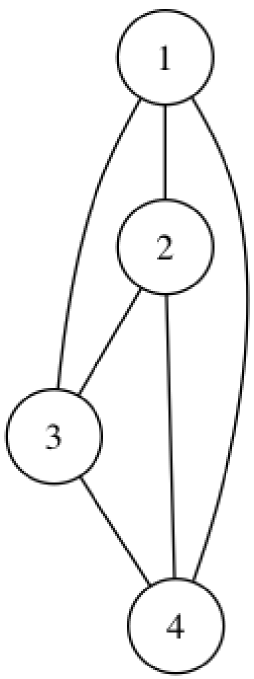


(3)



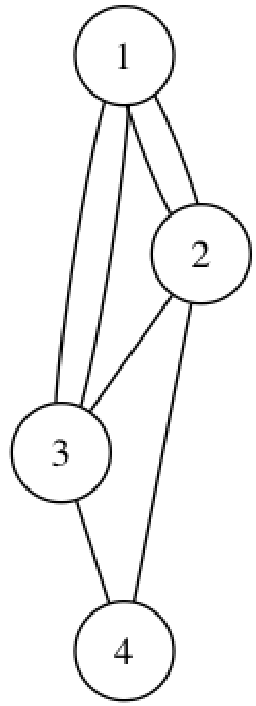
例題1 以下のグラフは準オイラーグラフか、オイラーグラフか？

（1）



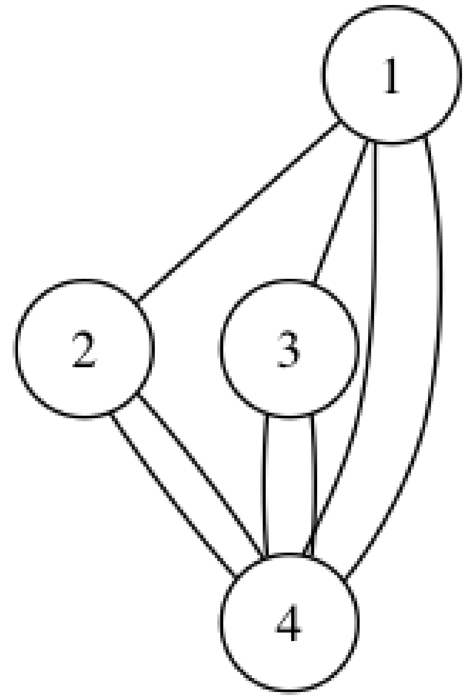
すべて次数が3で準オイラーグラフでなく,オイラーグラフでない。

(2)



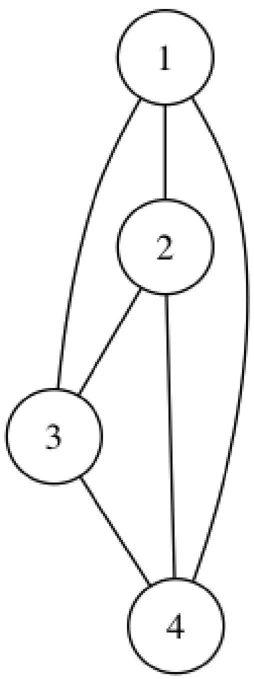
すべての次数が偶数なので準オイラーグラフで,オイラーグラフである。

(3)



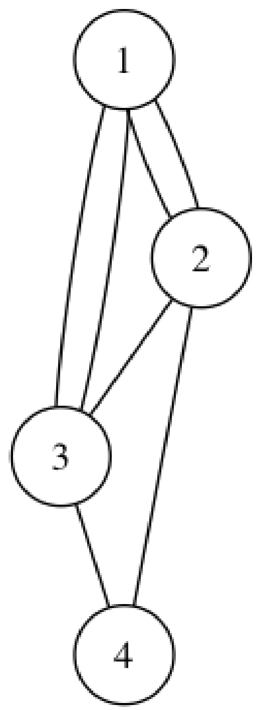
例題1 以下のグラフは準オイラーグラフか、オイラーグラフか？

（1）



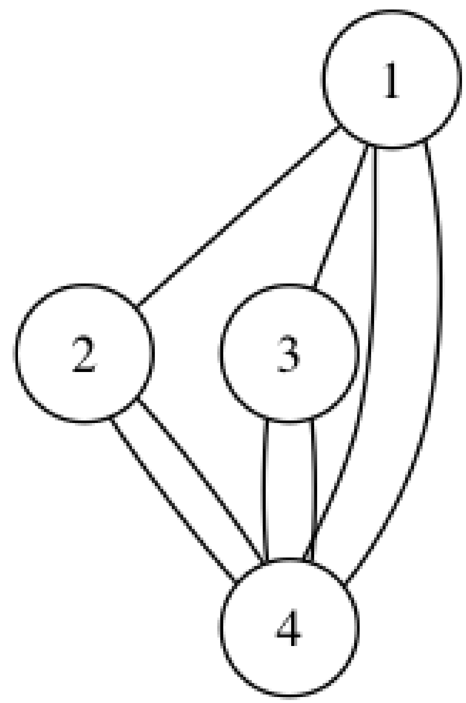
すべて次数が3で
周遊可能でなく,
オイラーグラフ
でない.

(2)



すべての次数が
偶数なので周遊
可能で,オイラー
グラフである.

(3)



奇頂点がちょうど2つ
なので準オイラーグラ
フで,オイラーグラフ
でない.

まとめ

①　関係（二項関係）
②　関係と写像
③　グラフによる表現
④　関係行列
⑤　有向グラフと無向グラフ
⑥　隣接集合と隣接行列
⑦　木、完全グラフ、クリーク
⑧　2部グラフ

演習問題

問題1

$A=\{a,b,c,d,e,f\}$とし，A上の関係

$$R=\left\{\begin{array}{l}(a,a),(a,d),(a,e),(b,b),(c,c),(c,f),(d,d),\\ (d,a),(d,e),(e,e),(e,a),(e,d),(f,f),(f,c)\end{array}\right\}$$

について，有向グラフを用いてRを表せ.

問題2

$A=\{1,2,3,4,5\}$上の関係Rについて

$x,y\in A$のとき　xRy ：$x>y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

問題3

$A = \{n \mid -2 \le n \le 5, n \in \mathbb{Z}\}$において，
関係R：「$\equiv (mod. 3)$」を

$m \equiv n \ (mod. 3) \ \Leftrightarrow m - n$は3の倍数

と定義するとき，この関係を直積A^2の
部分集合Rとして表せ.

また，Rを有向グラフで表せ.