10.写像（関数）（1）

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

第１回　10月 6日：第1回 命題と証明
第２回　10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月20日：第3回 命題論理
第４回　10月27日：第4回 述語論理
第５回　11月　3日：第5回 述語と集合
第６回　11月10日：第6回 直積と冪集合　(出張中につきHPの資料でオンデマンドで自習してください)
第７回　11月17日：第7回 様々な証明法 (1)
11月24日：調布祭の後片付けで休み

第８回　12月 1日：第8回 様々な証明法 (2)

第9回 12月8日　様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月15日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月22日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　1月5日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、

グラフによる表現
第１３回　1月19日：第13回 同値関係
第１４回　1月26日：第14回 順序関係：半順序集合、

ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　2月2日：第15回 期末試験

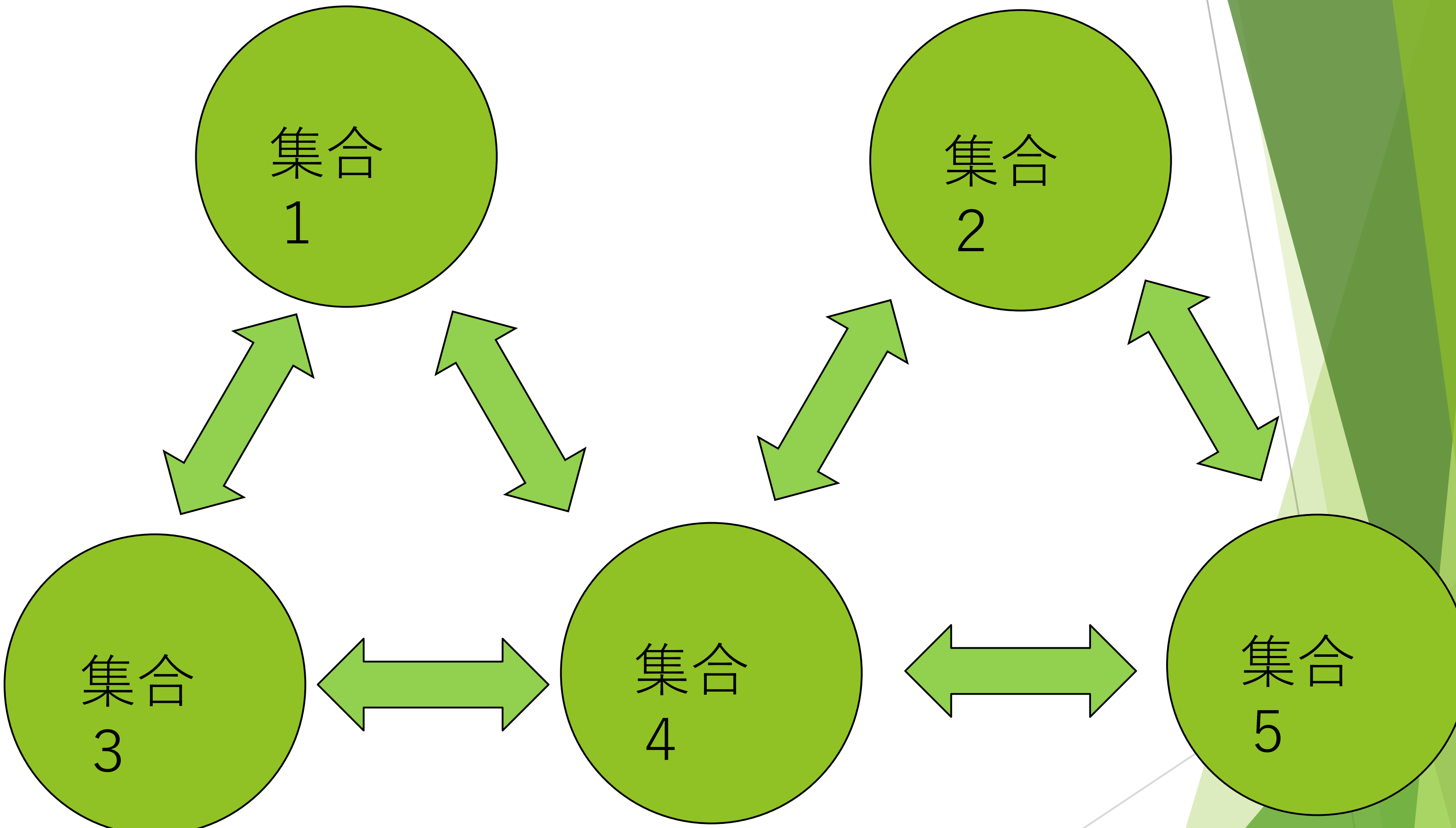
１．本日の目標

①　関係の紹介
②　関係の中の関数、写像
③　部分写像と写像
④　単射と全射、全単射

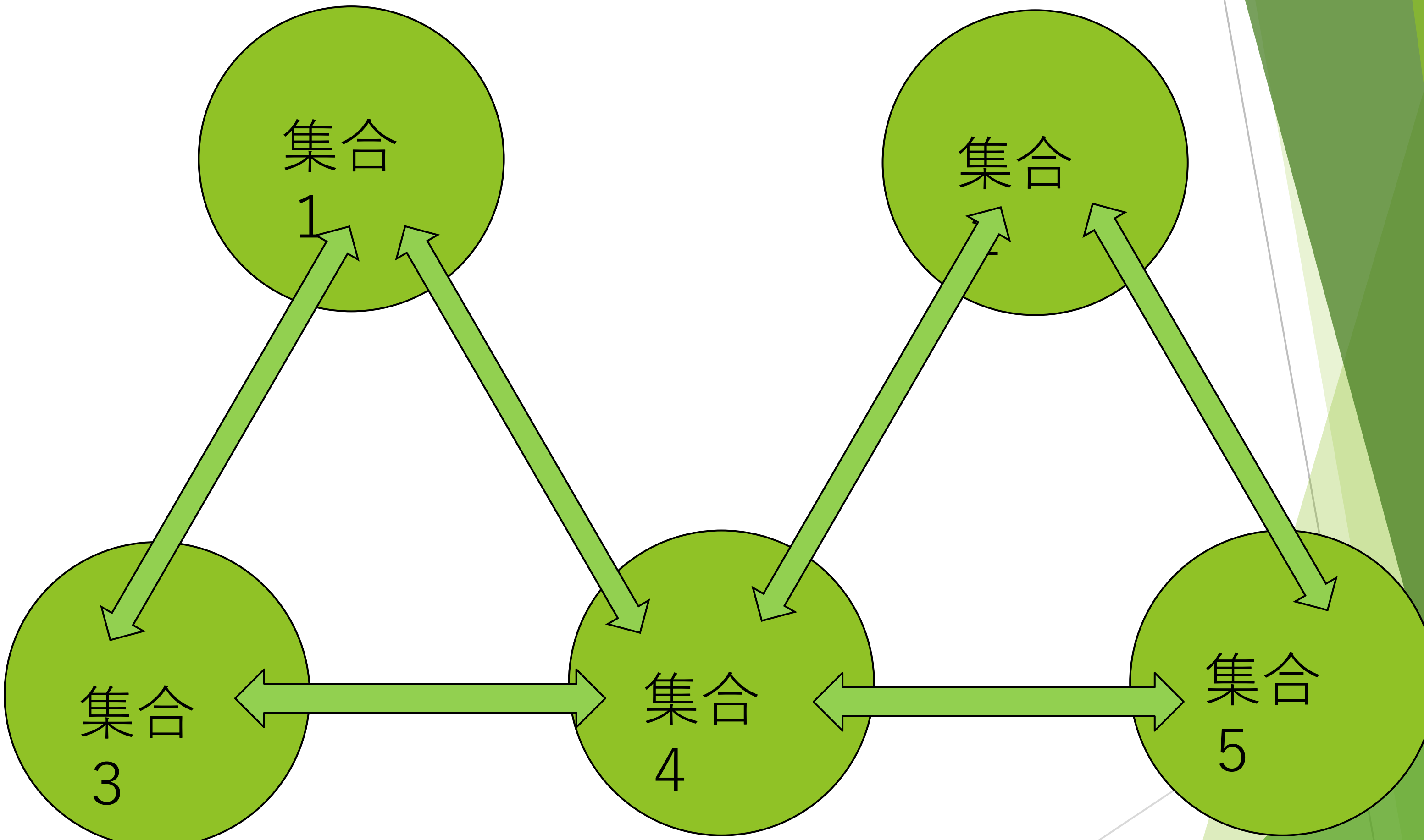
これまで学んできた概念

- 述語
- 集合
- 直積集合
- 冪集合
- 集合系

2. これまで集合と集合同士の関係について学んできた



2. これから学ぶこと（集合の要素間の関係）



3. 関係

再掲５章：

Def 1.
二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合RをUからVへの「関係」という.

また， $R \ni (a, b)$のとき　aRb ：aとbは関係ある
　　$R \not\ni (a, b)$のとき　$a\cancel{R}b$ ：aとbは関係なし
と書く.

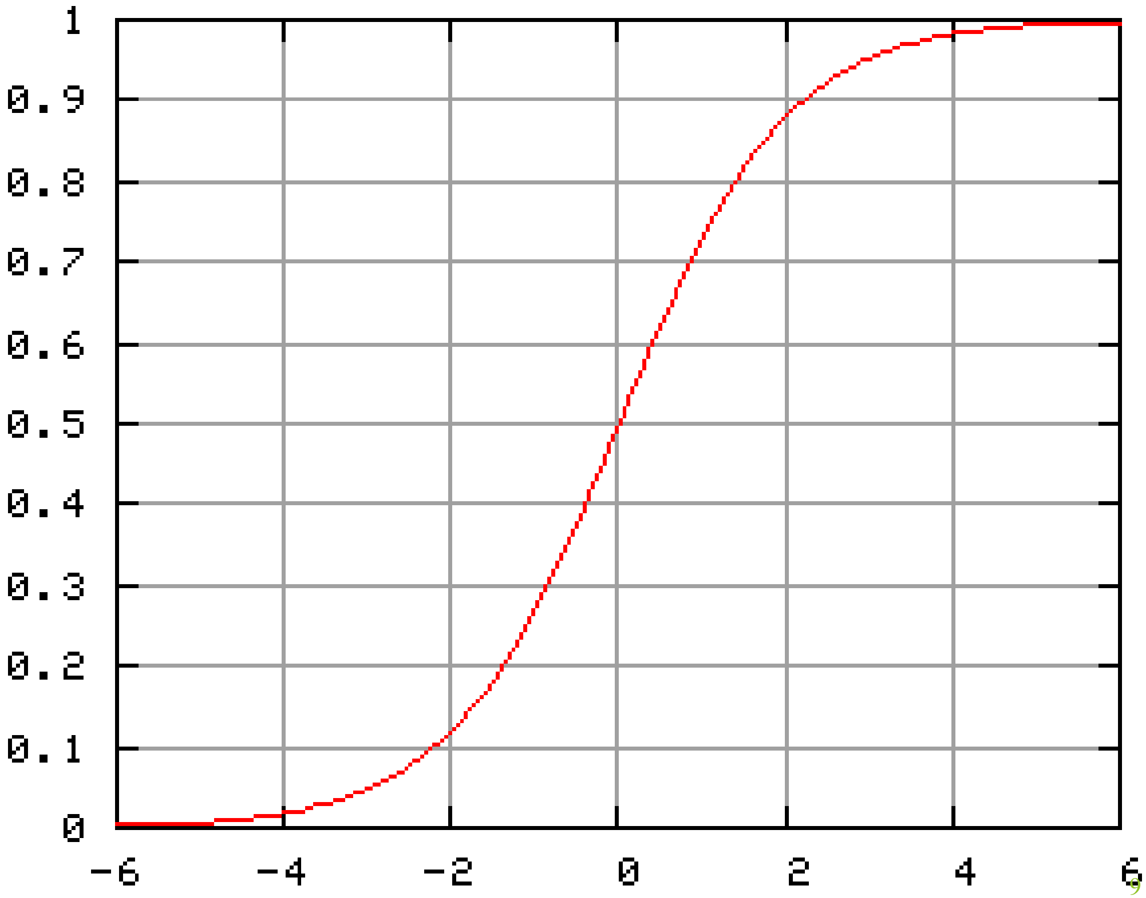
３．関係の特殊系としての写像と関数

最初に関係のなかの特殊系である写像について学び、それを徐々に一般化していく

写像　のひとつに関数がある.

写像と関数を同義と考える専門家と「数」に関する写像のみを関数と呼ぶという専門家がいる.

関数$f(x)$

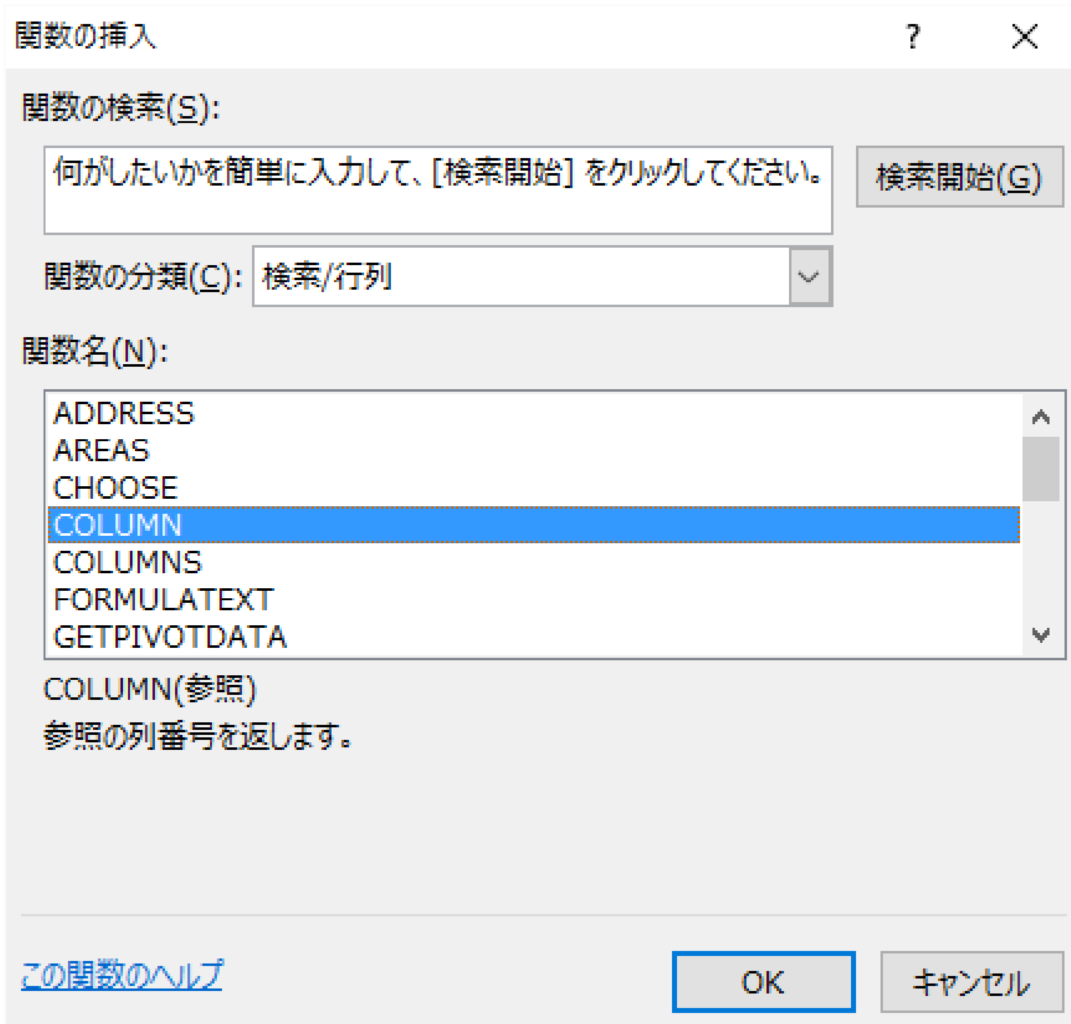


$n!$ （関数fact(int n)の再帰呼び出し）

```
int fact(int n)
{
  int m;

  if (n == 0)
    return 1;      // 0! = 1
  /* 以下、n が 0 でないとき */
  m = fact(n - 1);      // (n-1)! を求めてそれを
m とおく。ここのfact(n-1)が再帰呼出し。
  return n * m;         // n! = n * m
}
```

EXCELの関数


関数の挿入
?
関数の検索(S):
何がしたいかを簡単に入力して、[検索開始] をクリックしてください。
検索開始(G)
関数の分類(C):
検索/行列
関数名(N):
ADDRESS
AREAS
CHOOSE
COLUMN
COLUMNS
FORMULATEXT
GETPIVOTDATA
COLUMN(参照)
参照の列番号を返します。
この関数のヘルプ
OK
キャンセル

確率変数

例

コインの表が出ると$x = 1$,裏が出ると$x = 0$という確率変数がある． $\mathrm{P}(x) = 0.5$である．

一般に確率変数は関数である．

$$x = \begin{pmatrix} 1\text{: コインの表が出る} \\ 0\text{: コインの裏が出る} \end{pmatrix}$$

連続量に関する確率変数の定義

確率空間(Ω,*A*, *P*) に対し，Ω から実数*R*への関数*X* : Ω→*R*が，任意の実数*r* に対し

{*X* ≤*r*} ∈ *A*　（累積値が有限）　を満たすならば，*X* を確率空間(Ω,*A*, *P*) 上の確率変数という．

４．関数

Def 2

変数x, yについて， xの値（数値以外でも可）が決まるとyの値が一つだけ決まるとき， yはxの関数である，といい，

$$y = f(x)$$

と書く。

変数xの変域を「定義域」といい，関数値yの取り得る値の変域を「値域」という。

5．写像と部分写像

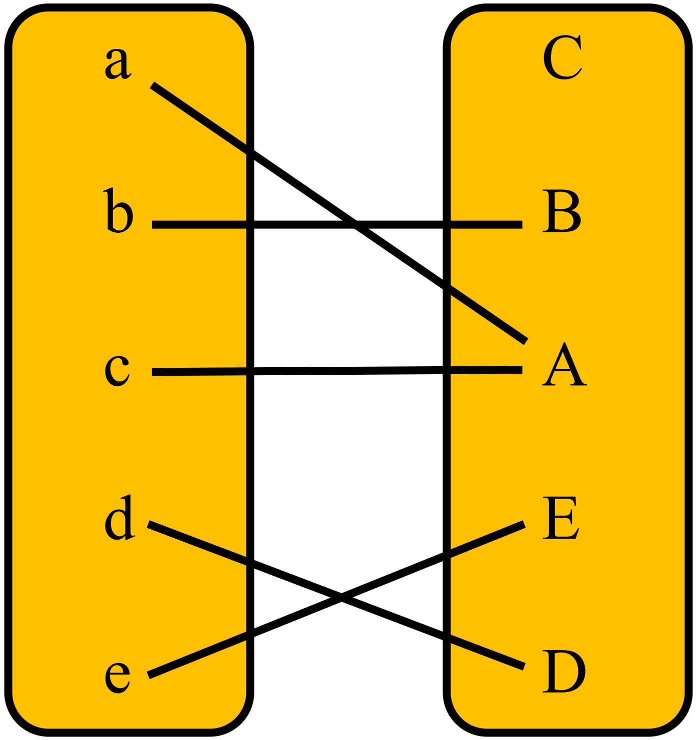
Def　3

集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

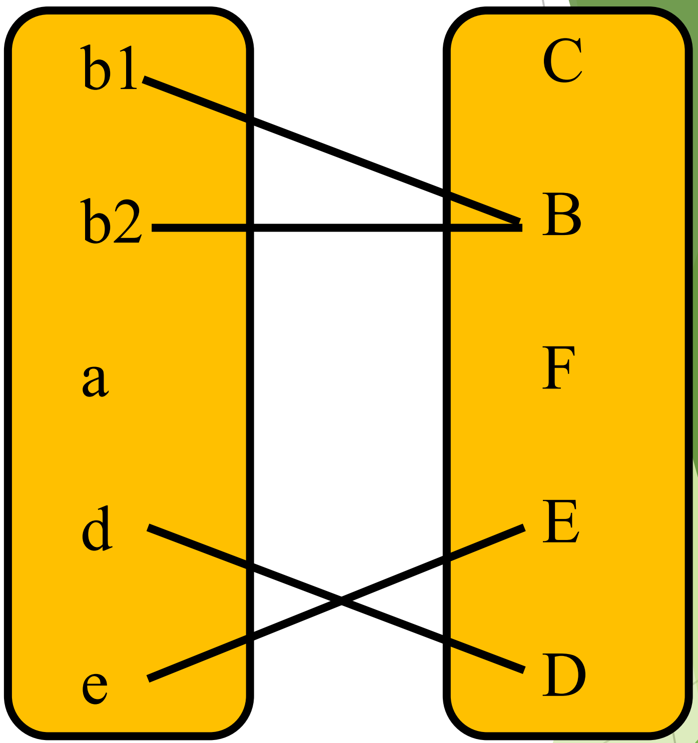
このとき，集合Uの要素に対応するVの要素が存在しない場合も許容する。この関係をUからVへの部分写像という。fがUからVへの部分写像であることを　$f: U \mapsto V$と書く。

Uをfの始域，Vをfの終域という。

写像と部分写像

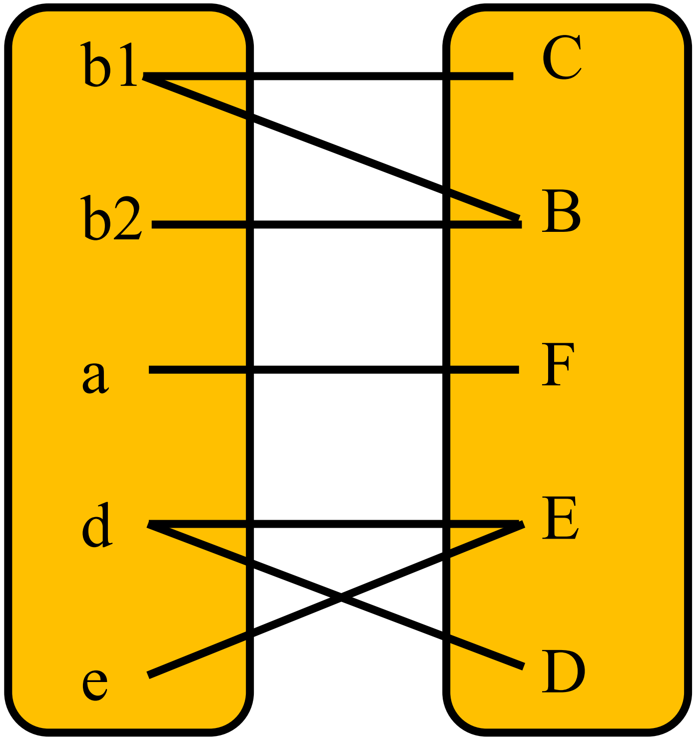


写像（関数）

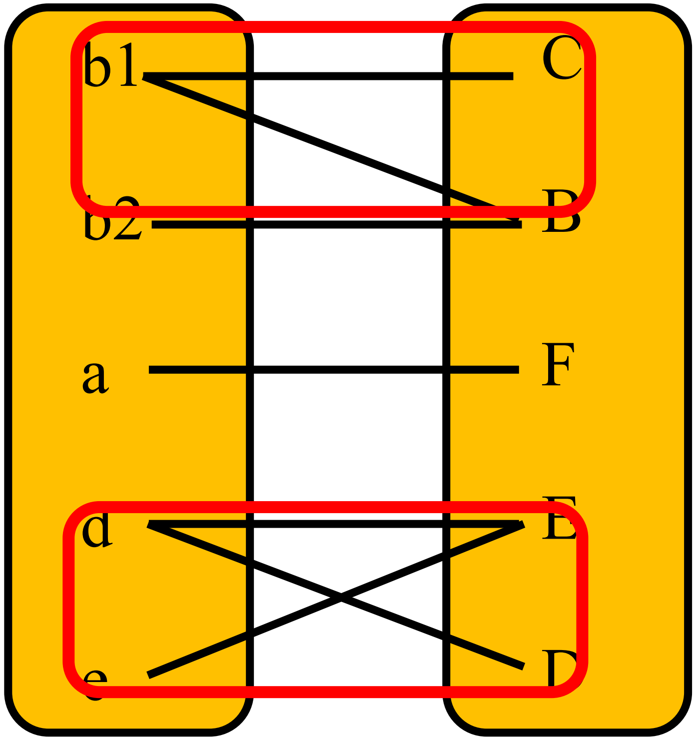


部分写像

以下は（部分）写像か？



以下は（部分）写像か？



部分写像でない

Def: 集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。
部分写像は集合Uの要素に対応するVの要素が存在しない場合を許容するが,集合Uの要素に複数のVの要素が対応していることは許さない.

１つの要素が１つの要素に対応せずに２つの要素が対応している要素が存在する。

問　以下のfは（部分）写像か？

(1)f: クラスの氏名集合$\mapsto$出席（学籍）番号集合

(2)f: 住所集合$\mapsto$ 電話番号集合

(3)f: 住所集合$\mapsto$ 郵便番号集合

(4)f: 自動販売機の入金額集合$\mapsto$飲み物集合

(5)f: JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合

問　以下のfは（部分）写像か？

(1)f: クラスの氏名集合↦出席（学籍）番号集合　○

(2)f: 住所集合↦ 電話番号集合

(3)f: 住所集合↦ 郵便番号集合

(4)f: 自動販売機の入金額集合↦飲み物集合

(5)f: JR山の手線の駅区間集合 ↦ 大人乗車金額集合

問　以下のfは（部分）写像か？

(1)f: クラスの氏名集合↦出席（学籍）番号集合　○

(2)f: 住所集合↦ 電話番号集合　×（一つの住所に複数番号を許す）

(3)f: 住所集合↦ 郵便番号集合

(4)f: 自動販売機の入金額集合↦飲み物集合

(5)f: JR山の手線の駅区間集合 ↦ 大人乗車金額集合

問　以下のfは（部分）写像か？

(1)f: クラスの氏名集合↦出席（学籍）番号集合　○

(2)f: 住所集合↦ 電話番号集合　✕（一つの住所に複数番号を許す）

(3)f: 住所集合↦ 郵便番号集合　○

(4)f: 自動販売機の入金額集合↦飲み物集合

(5)f: JR山の手線の駅区間集合 ↦ 大人乗車金額集合

問　以下のfは（部分）写像か？

(1)f: クラスの氏名集合↦出席（学籍）番号集合　〇

(2)f: 住所集合↦ 電話番号集合　×（一つの住所に複数番号を許す）

(3)f: 住所集合↦ 郵便番号集合　〇

(4)f: 自動販売機の入金額集合↦飲み物集合　×（同じ金額に複数の飲み物）

(5)f: JR山の手線の駅区間集合 ↦ 大人乗車金額集合

問　以下のfは（部分）写像か？

(1)f: クラスの氏名集合↦出席（学籍）番号集合　○

(2)f: 住所集合↦ 電話番号集合　×（一つの住所に複数番号を許す）

(3)f: 住所集合↦ 郵便番号集合　○

(4)f: 自動販売機の入金額集合↦飲み物集合　×（同じ金額に複数の飲み物）

(5)f: JR山の手線の駅区間集合 ↦ 大人乗車金額集合　○

U, Vが有限集合の場合の数学的記述例

$$U = \{a, b, c, d\}, \qquad V = \{A, B, C, D\}$$

小文字を大文字に写像を記述してみよう。

記述例

$f: U \mapsto V; a \mapsto A, b \mapsto B, c \mapsto C, d \mapsto D$

もしくは

$f: U \mapsto V; f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C, f(d) = D$

U, Vが無限集合（もしくは多要素）の場合の数学的記述例

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto \sqrt{x}$$

もしくは

$$f: x \in \mathbb{N} \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{N}$$

もしくは

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \sqrt{x}$$

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし，$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし，$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

証明

定義に戻れ： Def 3　集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

→全称命題の否定；否定事例の存在命題の証明を用いる。

例題1.

$$f:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし，$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

証明

Def 3

定義に戻れ：集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

→全称命題の否定；否定事例の存在命題の証明を用いる。

$f:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$では， $x = 1$とすると$f(1) = \pm 1$

となり，写像された要素が二つ対応していることがある。
従って， $f:\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$

は写像ではない。 ■

例題2.

$$f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def　3

定義に戻れ：

集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

例題2.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R};x\mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def 3

定義に戻れ：集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

$x\in\mathbb{R}$を仮定する。このとき， xについて$f(x)=x^2$は$x^2\in\mathbb{R}$でただ一つだけ決まる。従って，各要素の写像にただ一つの実数が対応しているので，

$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R};x\mapsto x^2$は写像である。 ■

例題３

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{c})\}$

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$

(4) $\{(1,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$

例題３

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a,b,c,d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2,\mathrm{c}),(3,\mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(1,\mathrm{a})\}$

(3) $\{(3,\mathrm{b}),(2,\mathrm{a}),(3,\mathrm{c})\}$

(4) $\{(1,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(2,\mathrm{c})\}$

例題３

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ 部分写像で写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$

(4) $\{(1,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$

例題３

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ 部分写像で写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$ 部分写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題３

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ 部分写像で写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$ 部分写像でない

(4) $\{(1,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$ 部分写像で写像

６．部分写像の定義域と値域

$$f: U \mapsto V$$

Uをfの始域，Vをfの終域という。

特にUの要素のうち，部分写像fによる値が存在する要素を集めたUの部分集合を「定義域」と呼ぶ。$\mathrm{dom}(f)$ と書く。$U / \mathrm{dom}(f)$ を「未定義域」と呼ぶ。

また，Vの要素のうち，あるUの要素のfによる値になっている要素を集めたVの部分集合を「値域」と呼ぶ。$\mathrm{ran}(f)$ と書く。

定義域と値域

$\mathrm{dom}(f) = \{x|????????\}$で表せ。

$\mathrm{ran}(f) = \{y|????????\}$で表せ。

定義域と値域

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{y} \{x | f(x) = y\}$$

$$\mathrm{ran}(f) = \bigcup\nolimits_{x} \{y | f(x) = y\}$$

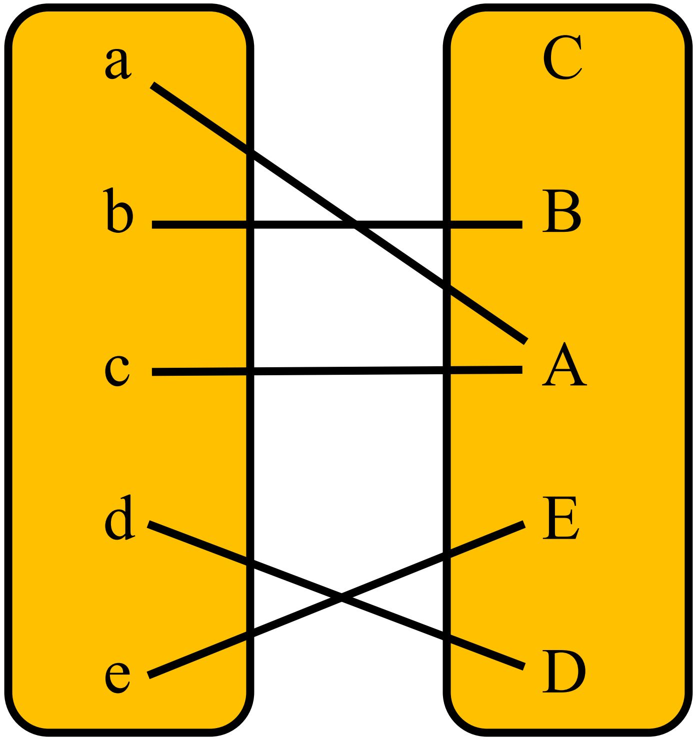
なので　量化子を用いると？？

定義域と値域

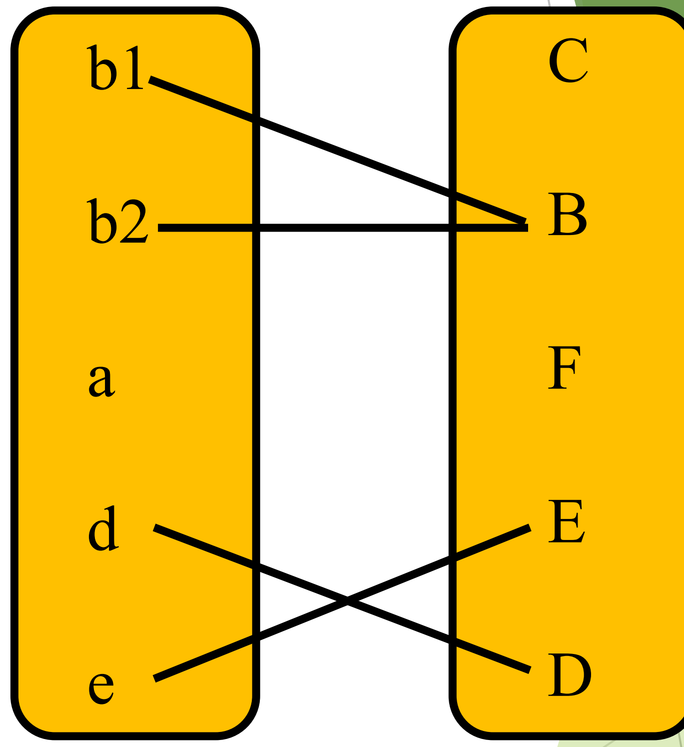
$$\mathrm{dom}(f) = \{x | \exists y, f(x) = y\}$$

$$\mathrm{ran}(f) = \{y | \ \exists x, f(x) = y\} = \{f(x) \in V\}$$

例題　次の部分写像の定義域と値域は？

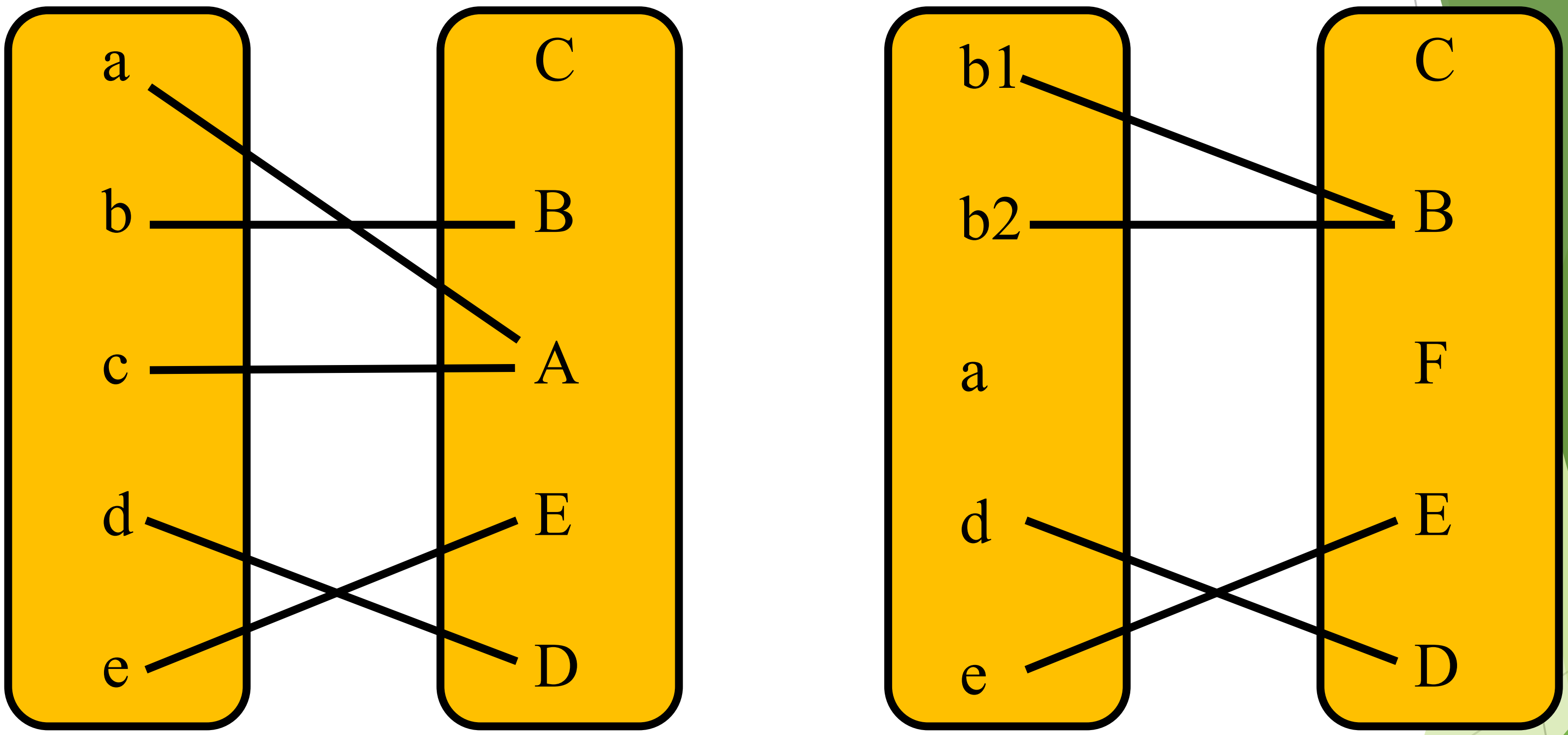


$$\mathrm{dom}(f) = ?$$
$$\mathrm{ran}(f) = ?$$



$$\mathrm{dom}(f) = ?$$
$$\mathrm{ran}(f) = ?$$

例題　次の部分写像の定義域と値域は？



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, D, E\} \neq V$
未定義域$= \emptyset$

$\mathrm{dom}(f) = \{b1, b2, d, e\} \neq U$
$\mathrm{ran}(f) = \{B, D, E\} \neq V$
未定義域$= \{a\}$

7. 部分写像fとgが等しい

Def. 4

２つの部分写像 $f: A \mapsto B$，$g: C \mapsto D$が**等しい**とは,

1. $A = C$　始域が等しい
2. $B = D$　終域が等しい
3. $\forall u \in U, f(u) = g(u)$．関数の値が等しい

8. 恒等写像

Def 5.

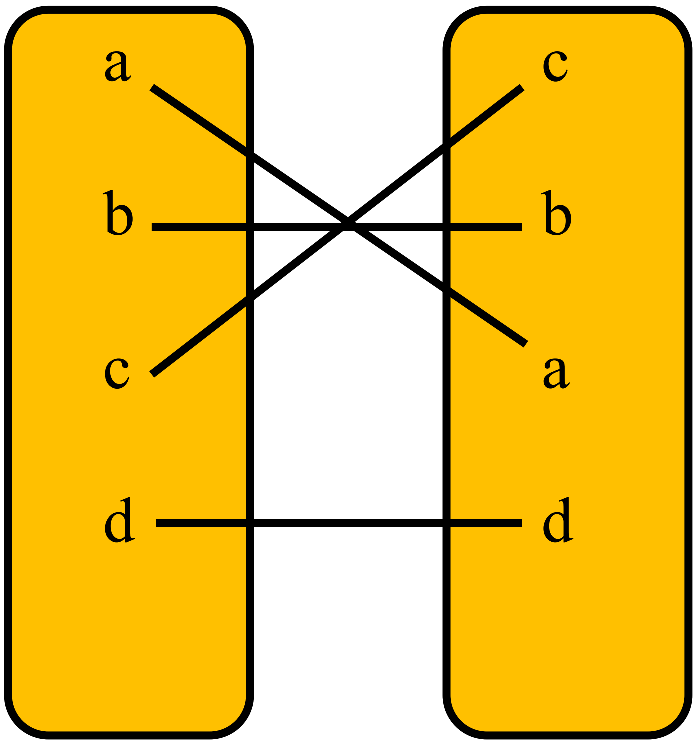
$f: U \mapsto U; f(x) = x$

となる写像を恒等写像という。

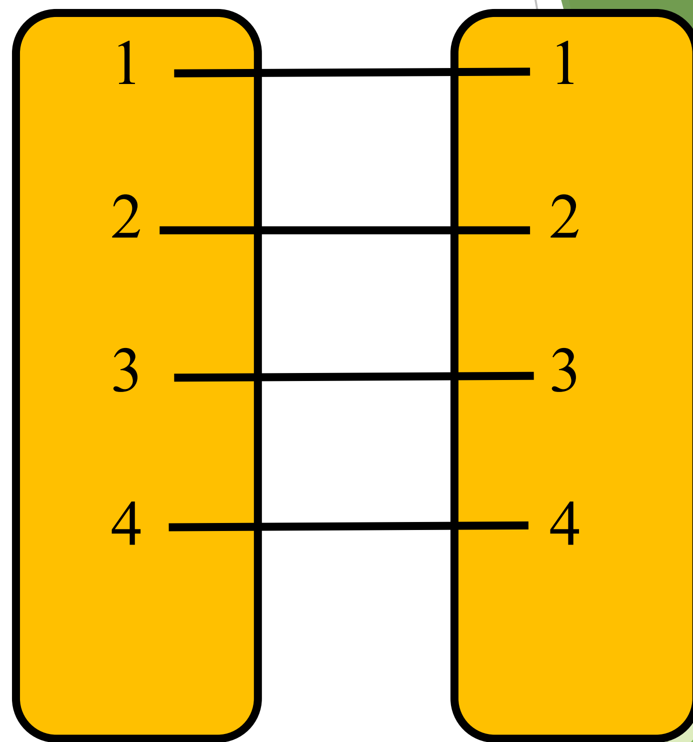
$\mathrm{id}u: U \mapsto U; \mathrm{id}u(x) = x$.

と書く。$\mathrm{id}u$のuは始集合がUであることを示している。

恒等写像の例



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, \mathrm{d}\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{a, b, c, \mathrm{d}\} = V$
未定義域$= \emptyset$



$\mathrm{dom}(f) = \{1,2,3,4\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{1,2,3,4\} = V$
未定義域$= \emptyset$

9. 単射

Def 6

写像$f: U \mapsto V; f(x)$

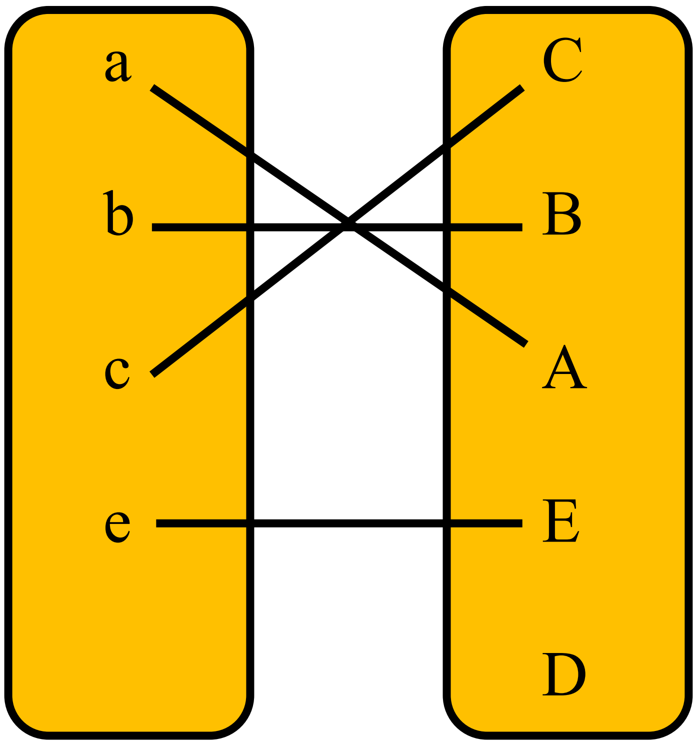
$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$ならば

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

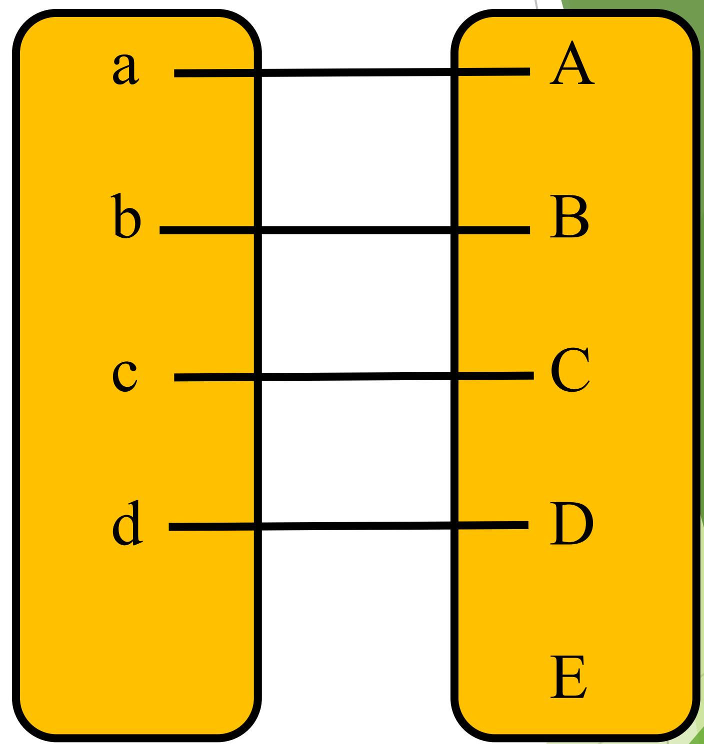
のとき，fはUからVへの「単射」であるという。

注：fは部分写像でなく写像であることに注意してほしい。

単射の例

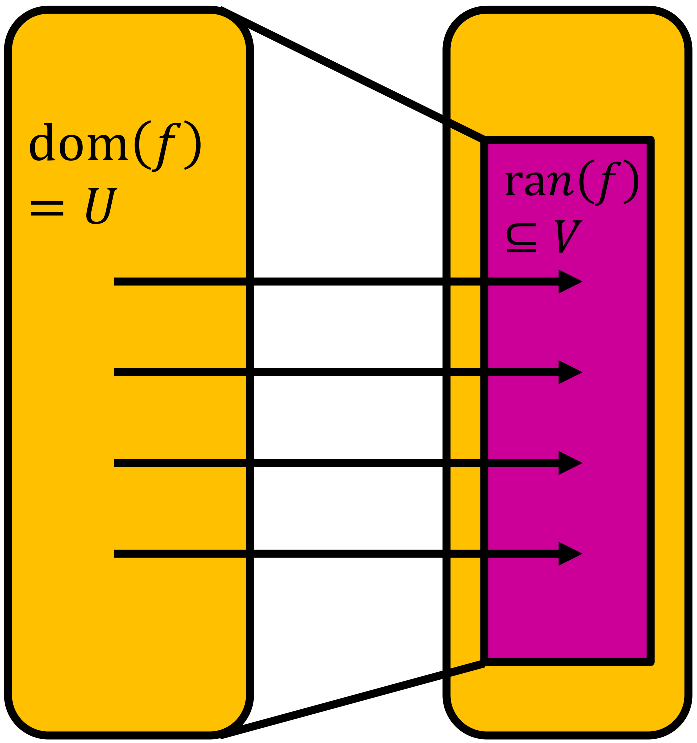


$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, E\} \neq V$
未定義域$= \emptyset$



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, D\} \neq V$
未定義域$= \emptyset$

重要ポイント：単射のイメージ



$$\mathrm{dom}(f) = U$$
$$\mathrm{ran}(f) \subseteq V$$

未定義域$= \emptyset$

9. 単射の性質

Th 1.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば$x_1 = x_2$のとき，fはUからVへの「単射」である。

を証明せよ。

9. 単射の性質

Th 1.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば$x_1 = x_2$のとき，fはUからVへの「単射」である。

[証明]

Def 6の命題の対偶を用いる

9. 単射の性質

Th 1.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば$x_1 = x_2$のとき，　fはUからVへの「単射」である。

[証明]

Def 6の命題の対偶を用いると,

写像$f: U \mapsto V; f(x)$

$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$ならば

$f(x_1) \neq f(x_2)$の対偶はTh1.　■

例題1

$U=\{1,2,3\}, \mathrm{V}=\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}),(3, \mathrm{d})\}$

(2) $\{(2, \mathrm{b}),(3, \mathrm{a}),(1, \mathrm{a})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}),(2, \mathrm{a}),(3, \mathrm{c})\}$

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の

$f: U \mapsto V$は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ ×：写像だが３と１が同じ値に写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の
$f: U \mapsto V$は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ ×：写像だが３と１が同じ値に写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の

$f: U \mapsto V$は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ ×：写像だが３と１が同じ値に写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)} ○

例題２.

$$f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\, x \mapsto 3x + 4$$

が単射であることを証明せよ。

例題２.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}; x\mapsto 3x+4$$

が単射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ：対偶「$\forall x_1, \forall x_2 \in U[f(x_1)=f(x_2)$ ならば$x_1=x_2]$のとき，fはUからVへの「単射」である。」

$x_1, x_2\in\mathbb{R}$，$f(x_1)=f(x_2)$と仮定する。

$3x_1+4=3x_2+4$　より　$x_1=x_2$　となる。

従って，fは$\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$への単射である。 ■

例題３.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

再掲　８．含意型命題$\forall x \in \boldsymbol{U}[P(x) \to Q(x)]$の否定

$\neg[\forall x \in \boldsymbol{U}[P(x) \to Q(x)]\,] \Leftrightarrow \exists x \in \boldsymbol{U}[P(x) \wedge \neg Q(x)]$

$\forall x \in \boldsymbol{U}[P(x) \to Q(x)]$の否定の証明の手順

(1)　$P(x)$を満たし、かつ$Q(x)$を満たさない$\boldsymbol{U}$の要素xを見つける。

(2)　$P(x) \wedge \neg Q(x)$　が真であることを証明する。

例題３．

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

証明

定義に戻れ：$\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ならば$f(x_1) \neq f(x_2)$

含意型命題$P(x) \to Q(x)$の否定： $\exists x_1, \exists x_2 \in \mathbb{R}, P(x) \wedge \neg Q(x)$

即ち、 $x_1 \neq x_2$かつ$f(x_1) = f(x_2)$を見つける。

異なる二つの実数$x_1 = 1, x_2 = -1$を仮定する。

このとき，$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$となり，$f(x_1) \neq f(x_2)$は成り立たない。従って，

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でない ■

例題３．

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

証明

異なる二つの実数$x_1 = 1, x_2 = -1$を仮定する。

このとき，$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$となり，$f(x_1) \neq f(x_2)$は成り立たない。従って，

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でない ■

10. 全射

Def 7. 写像$f: U \mapsto V; f(x)$

について「$\mathrm{ran}(f) = V$」が成り立つとき，「全射」もしくは「上への写像」という。

↓

「Vのすべての要素はあるUの要素の 写像の値になっている」

注： fは部分写像でなく写像であることに注意

10. 全射

例題１.

「Vのすべての要素はあるUの要素の写像の値になっている」を量化子を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

「？？？？？？？？？？」

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」であるという。

10. 全射

例題１.

「Vのすべての要素はあるUの要素の写像の値になっている」を量化子を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

「$\forall y \in V$, ？？？？？？？」

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」であるという。

10. 全射

例題１.

「Vのすべての要素はあるUの要素の写像の値になっている」を量化子を用いて数学的に定義せよ。

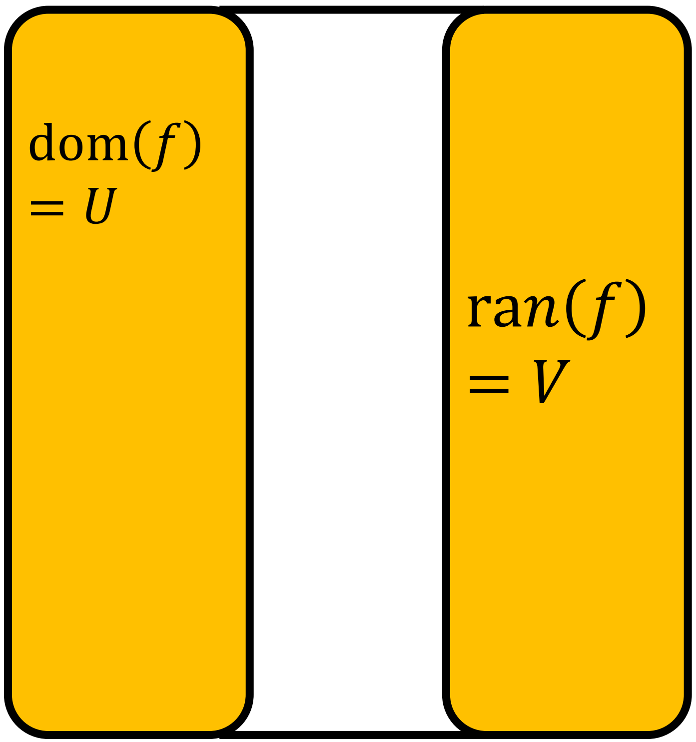
Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \ s.t. f(x) = y$$

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」であるという。

重要ポイント：全射のイメージ

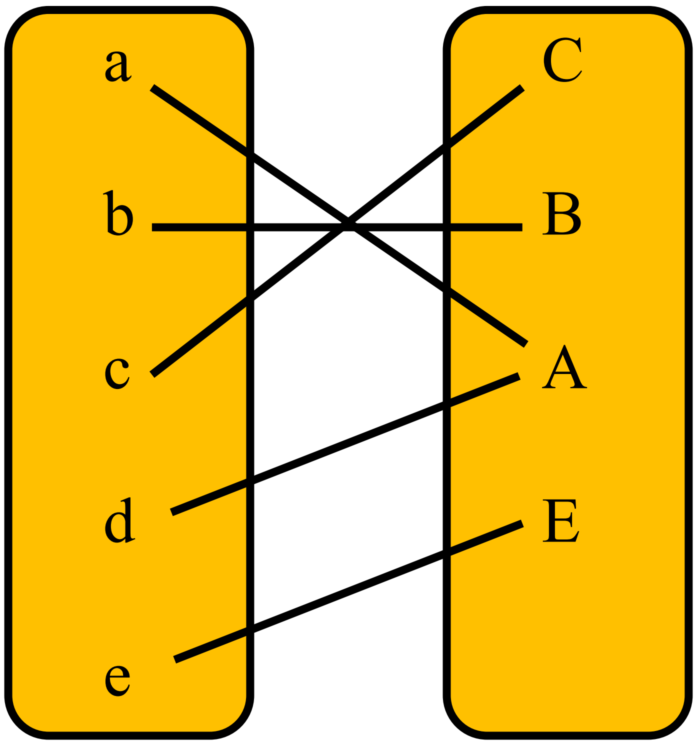


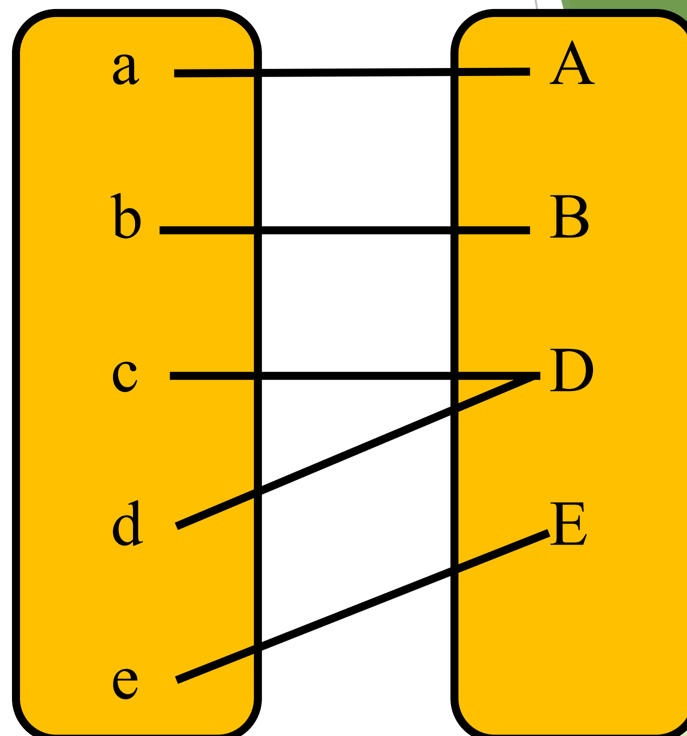
$$\mathrm{dom}(f) = U$$
$$\mathrm{ran}(f) = V$$

未定義域$= \emptyset$

全射の例

$\exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$の$\exists x$はひとつとは限らないことに注意！！





$$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$$
$$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, E\} = V$$
未定義域$= \emptyset$

$$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$$
$$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, D, E\} = V$$
未定義域$= \emptyset$

注意

再掲

Def 3

集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

↓

写像の必要条件

$$\mathrm{dom}(f) = U$$

未定義域$= \emptyset$

集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (1,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (1,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (1,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (1,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ とする。次の

$f: U \mapsto V$は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (1,\mathrm{a}), (2,\mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$ ○

例題２.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$$

が全射であることを証明せよ。

例題２.

$$f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}; x\mapsto 2x+1$$

が全射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ： Def 7

写像$f:U\mapsto V; f(x)$ について

$$\forall y\in V,\exists x\in U,f(x)=y$$

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」

全称命題の証明では最初に∀をとる！！

存在命題では、

$y\in\mathbb{R}$について$f(x)=y$となるxを見つける！！

例題２.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$$

が全射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ： Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \ s.t. f(x) = y$$

が成り立つとき， fはUからVへの「全射」

$y \in \mathbb{R}$について $x = \frac{y-1}{2}$が存在する。

$y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$より，$\forall y \in \mathbb{R}$について

$$\exists x, f(x) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$$

従って， fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への全射である。 ■

例題３.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は全射でないことを証明せよ。

例題３.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は全射でないことを証明せよ。

証明

定義に戻れ： Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$\forall y \in V, \exists x \in U \ \ s.t. f(x) = y$が成り立つとき， fはUからVへの「全射」

全射の否定： $\exists\, y \in V, \forall x \in U \ \ s.t. f(x) \neq y$

$y = -1$に対して

$y = f(x)$とすると$y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$より， $f(x) = -1$となる実数xが存在しない。従って，$\exists\, y \in V, \forall x \in U \ \ s.t. f(x) \neq y$

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$は全射でない ■

11. 全単射

Def. 8

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ が単射かつ全射であるとき，fはUからVへの全単射という。

注意

再掲

Def 3

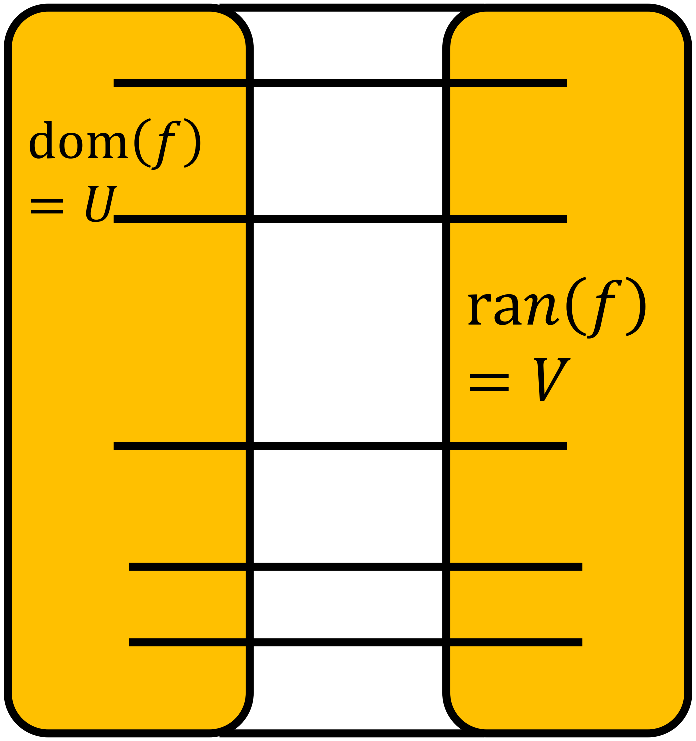
集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

↓

全単射の必要条件

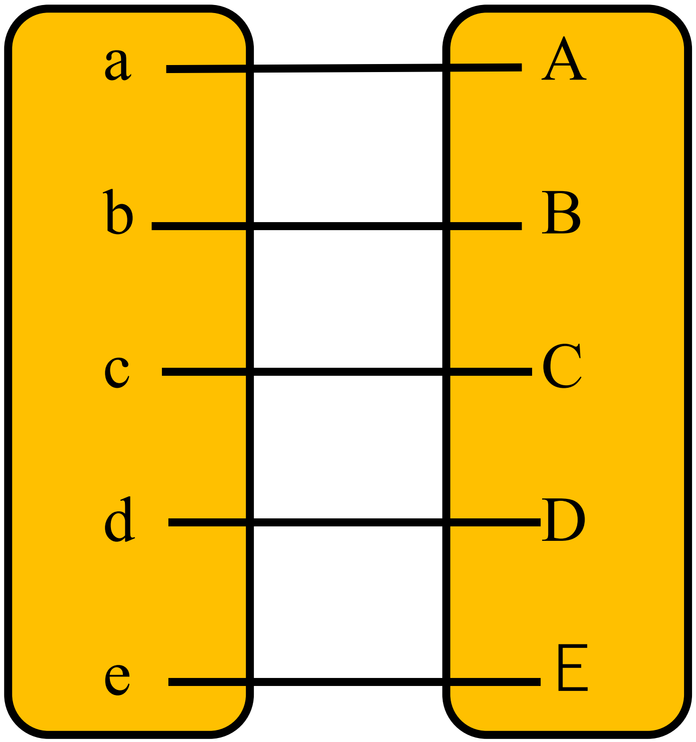
- $\mathrm{dom}(f) = U$
- $\mathrm{ran}(f) = V$
- 未定義域$= \emptyset$
- 集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応

重要ポイント：全単射のイメージ



$$\mathrm{dom}(f) = U$$
$$\mathrm{ran}(f) = V$$
未定義域$= \emptyset$

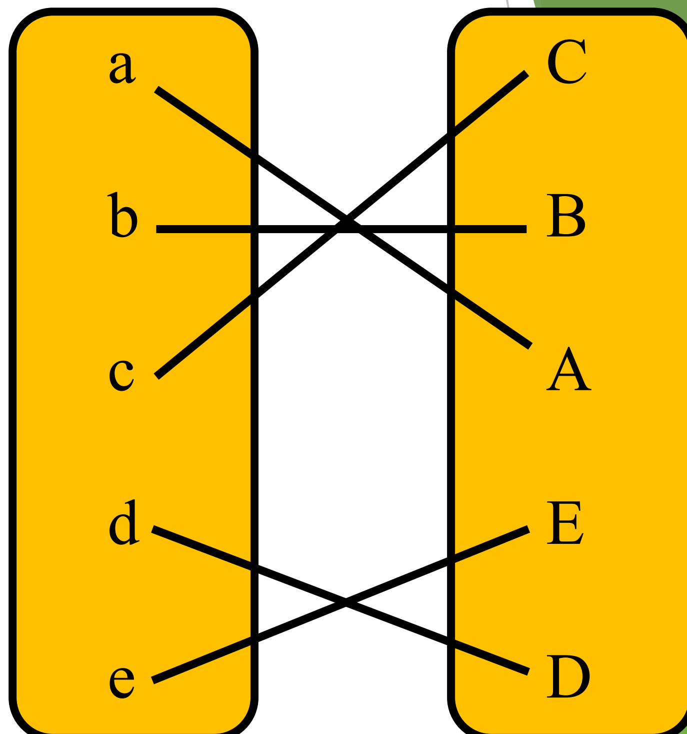
全単射の例



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$

$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, D, E\} = V$

未定義域$= \emptyset$



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$

$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, D, E\} = V$

未定義域$= \emptyset$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$ × ：そもそも写像でない

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) $\{(1,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$ × ：そもそも写像でない

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$× ：そもそも写像でない

(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の
$f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない
(2) $\{(1,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$ × ：そもそも写像でない
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$× ：そもそも写像でない
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$ ○

例題２.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$$

が全単射であることを証明せよ。

例題２.

$$f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$$

が全単射であることを証明せよ。

証明単射と全射それぞれを証明

単射　定義（定理）に戻れ：Th 1

写像$f\colon U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば$x_1 = x_2$のとき，fはUからVへの「単射」である。

全射　定義に戻れ： Def 7

写像$f\colon U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U, f(x) = y$$

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」

例題２.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$$

が全単射であることを証明せよ。

証明単射と全射それぞれを証明

単射$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2)$と仮定する。　${x_1}^5 + 1 = {x_2}^5 + 1$のとき
$x_1 = x_2$　となる。従って，fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への単射である。

全射　$y \in \mathbb{R}$について $x = \sqrt[5]{y-1} \in \mathbb{R}$が存在する。

$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$より，$\forall y \in \mathbb{R}$について $\exists x$, $f(x) = \sqrt[5]{y-1}^5 + 1 = y$.
従って，fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への全射である。

fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への単射かつ全射であるので全単射である。■

例題3.

$$f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

証明

全称命題の否定→反例の存在の証明　単射でも全射でもないのでどちらかを示せば十分。

単射の否定

単射の定義　Def 6　$\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ならば$f(x_1) \neq f(x_2)$

含意型命題$P(x) \rightarrow Q(x)$の否定： $\exists x_1, \exists x_2 \in \mathbb{R},\ P(x) \wedge \neg Q(x)$

即ち、　$x_1 \neq x_2$かつ$f(x_1) = f(x_2)$となるx_1, x_2を見つける。

全射の否定

全射の定義　Def 7　写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$\forall y \in V, \exists x \in U\ \ s.t. f(x) = y$が成り立つとき，$f$は$U$から$V$への「全射」

全射の否定：　$\exists\, y \in V, \forall x \in U\ \ s.t. f(x) \neq y$

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

証明

全称命題の否定→反例の存在の証明　単射でも全射でもないのでどちらかを示せば十分。

単射の否定証明

単射の定義：$\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ならば$f(x_1) \neq f(x_2)$のとき単射

$x_1 = -1, x_2 = 1$のとき${x_1}^4 = {x_2}^4$となり、定義に矛盾する。従ってfは単射ではない。

全射の否定証明

定義：写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について　$\forall y \in V, \exists x \in U \ s.t. f(x) = y$が成り立つとき，$f$は$U$から$V$への「全射」

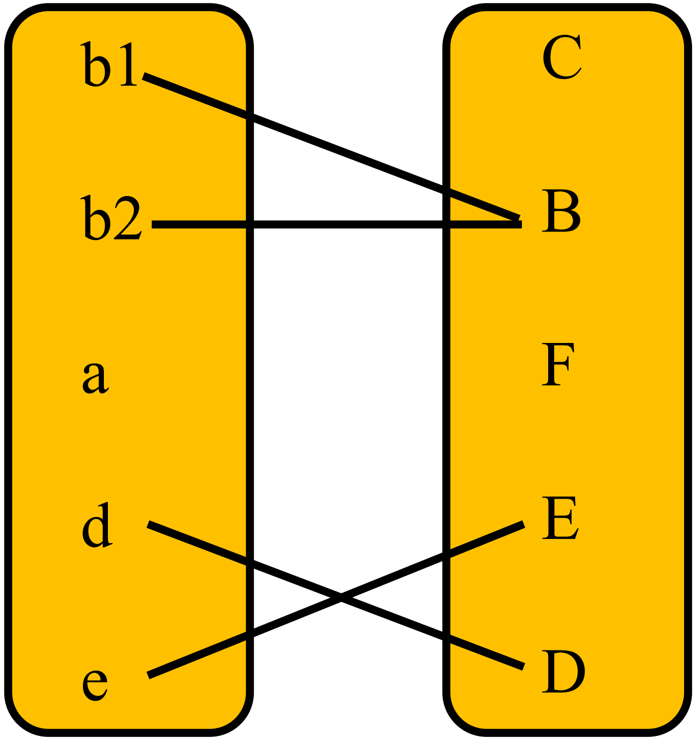
$y = f(x)$とすると$y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$より，　$y = -1$に対して$f(x) = -1$となる実数xが存在しない。

すなわち　全射の否定　$\exists y \in V, \forall x \in U \ s.t. f(x) \neq y$　が成り立つ。

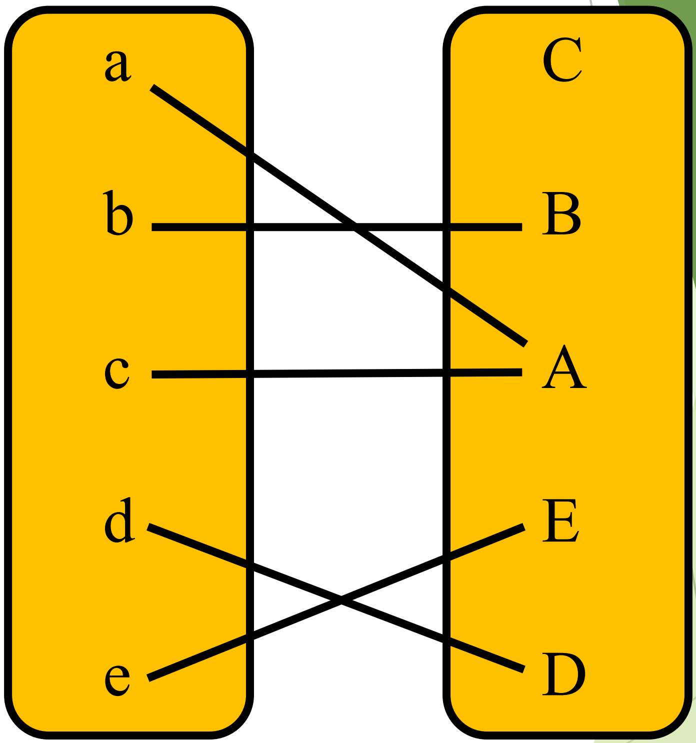
従って，

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$は全射でない　■

まとめの問題　以下はどのような写像か？

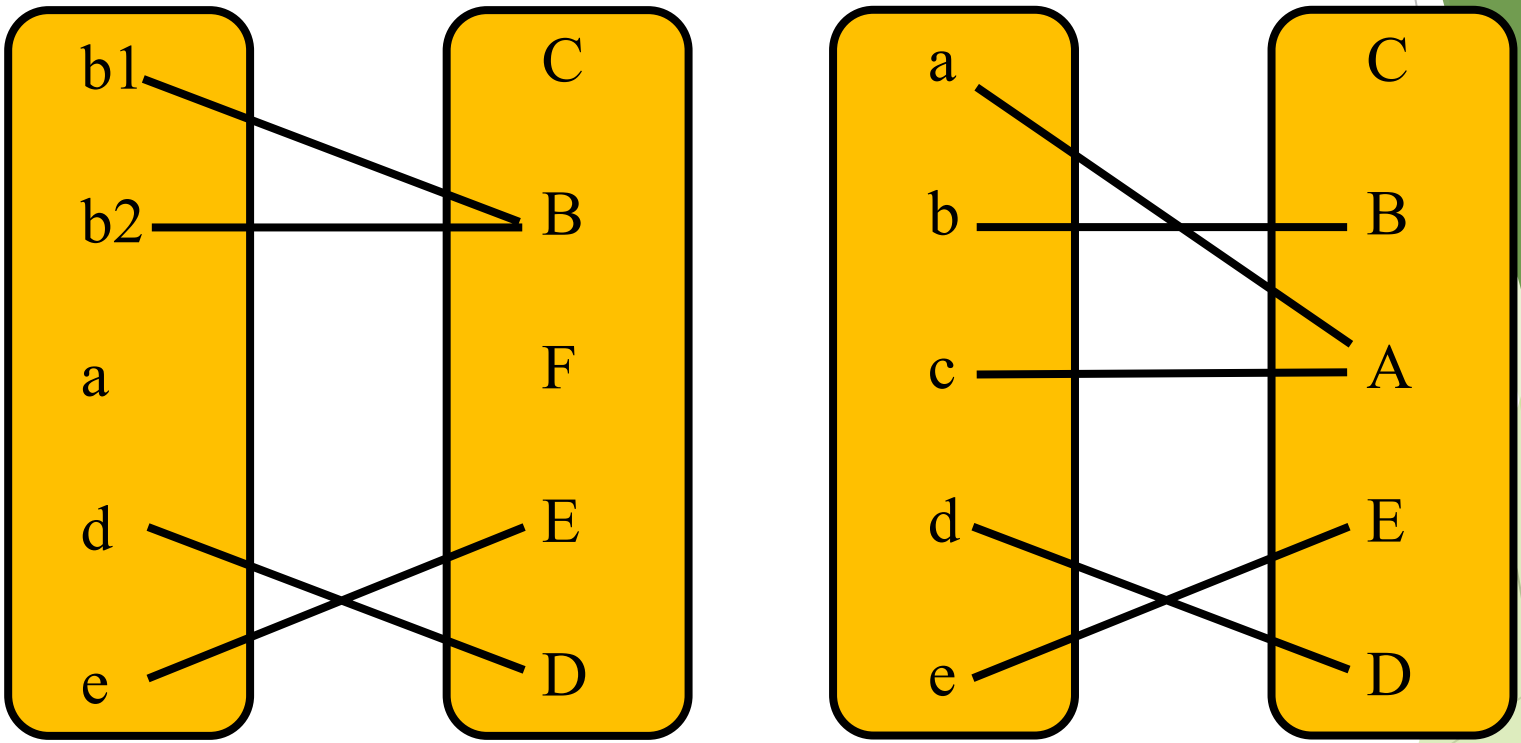


? ? ? ? ?



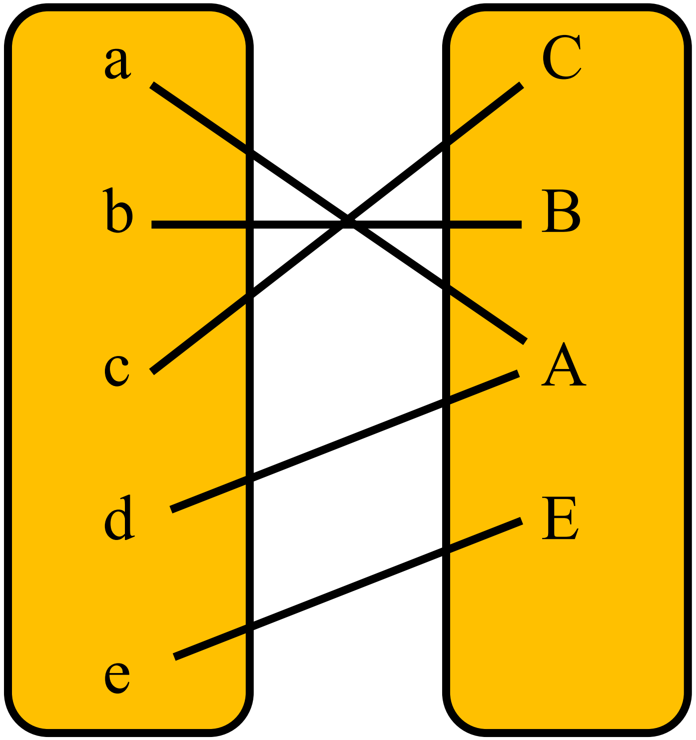
? ? ? ? ?

まとめの問題　以下はどのような写像か？

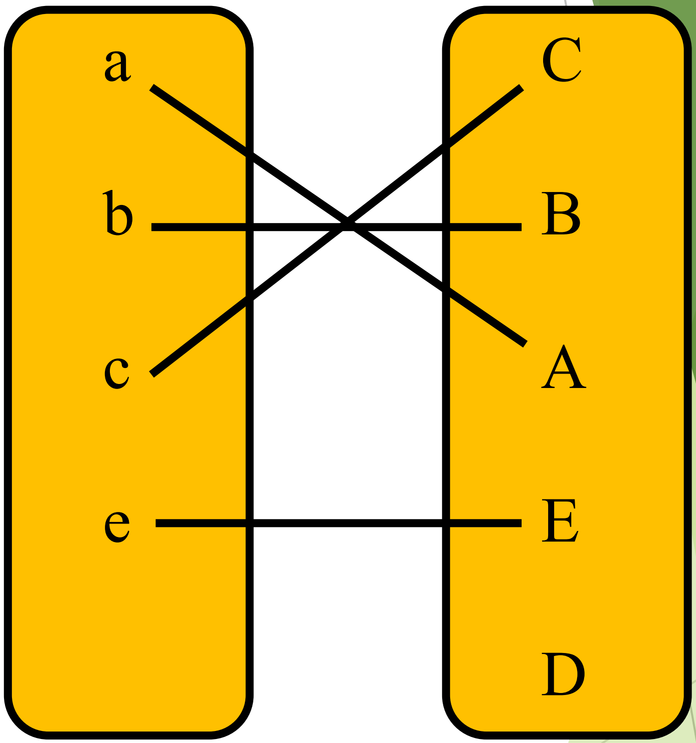


部分写像　　　　写像⊆部分写像

まとめの問題　以下はどのような写像か？

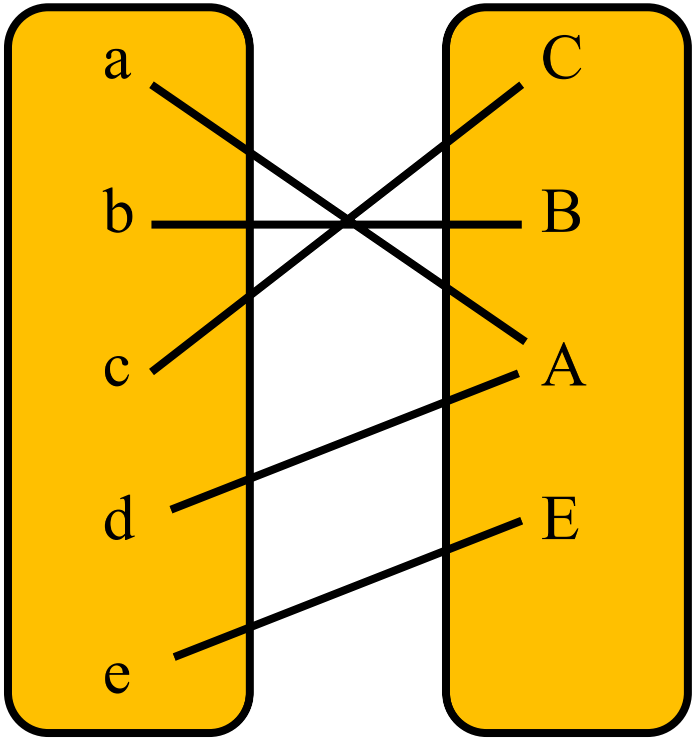


？？？？？

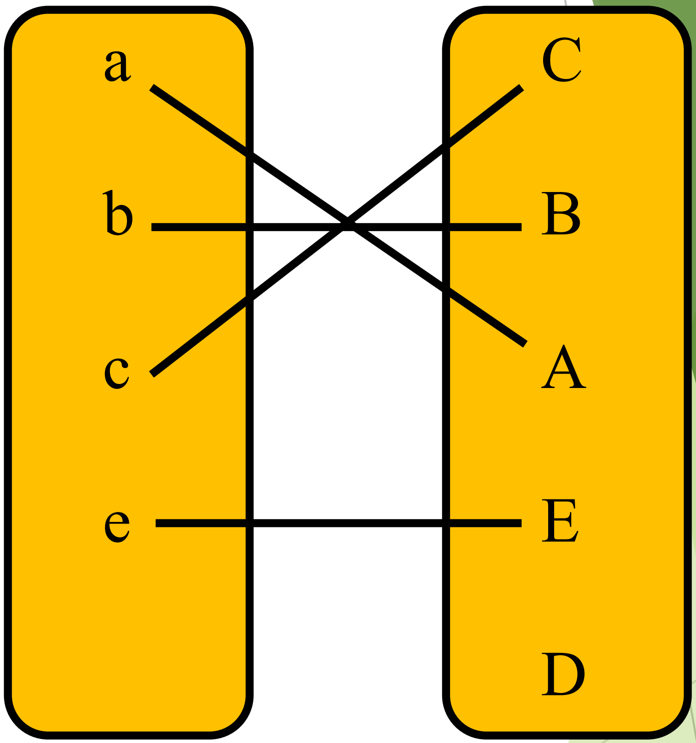


？？？？？

まとめの問題　以下はどのような写像か？

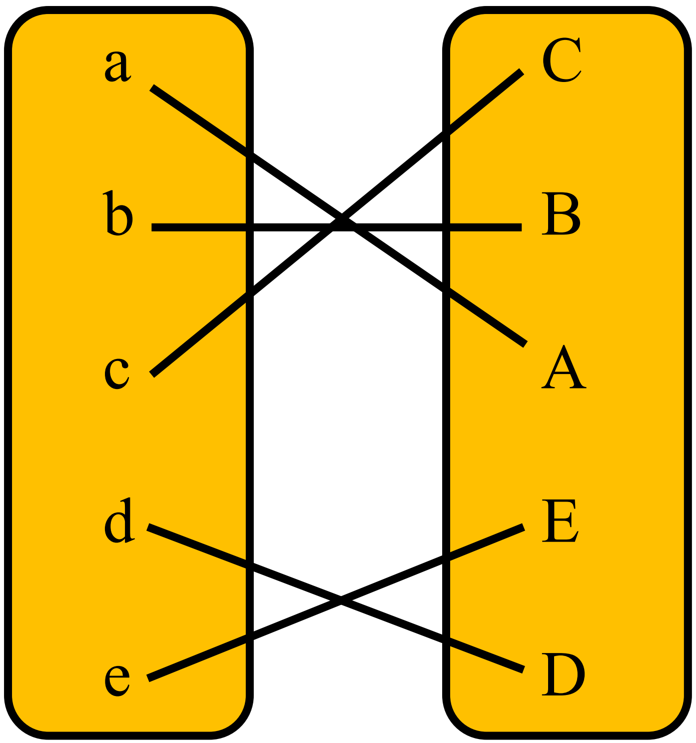


全射⊆写像⊆部分写像



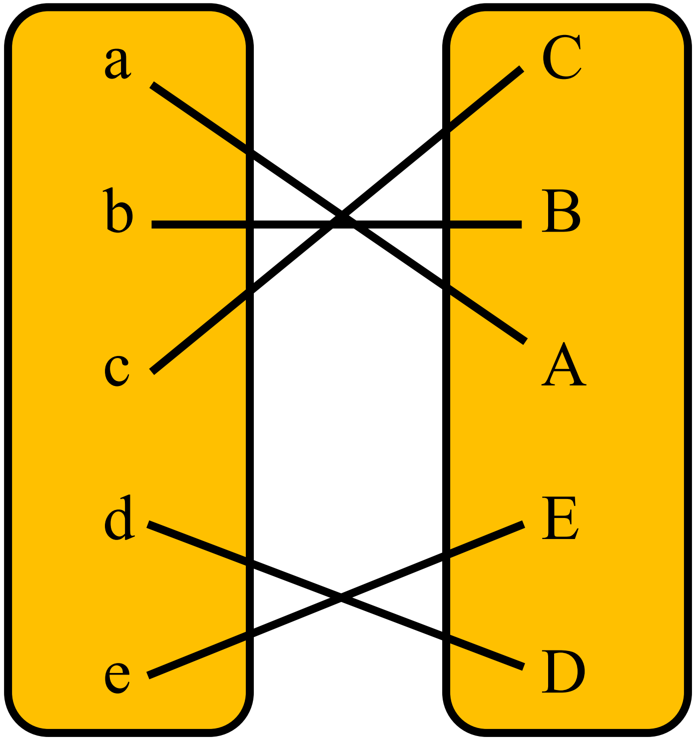
単射⊆写像⊆部分写像

まとめの問題　以下はどのような写像か？



？？？？？

まとめの問題　以下はどのような写像か？



全単射⊆ (**全射**または⊆単射)⊆写像⊆部分写像

まとめ

①　関係の紹介
②　関数の中の関数、写像
③　部分写像と写像
④　単射と全射、全単射

演習問題

問題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{1,2,3,4\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は部分写像、写像、単射、全射、全単射、恒等写像のどれであるか？複数回答可。

(1) $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$

(2) $\{(2,1),(3,2)\}$

(3) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

(4) $\{(2,1),(3,2),(2,4)\}$

問題2

- (1) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{N}$について，単射であるが全射でない写像の具体例を示せ.
- (2) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{N}$について，全射であるが単射でない写像の具体例を示せ.
- (3) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$について，単射であるが全射でない写像の具体例を示せ.
- (4) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$について，全射であるが単射でない写像の具体例を示せ.

問題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = x^2(2x-3)$$

は全射であることを証明せよ。

問題4

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = x^3$$

は単射であることを証明せよ。

問題5

$a \in \mathbb{R}$とする．

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \left(\begin{array}{cc} x & (x \leq 0) \\ x + a & (x > 0) \end{array} \right.$$

が単射かどうか，全射かどうかを判定し，それぞれ証明せよ．