

2. 集合の基礎と全称記号・存在記号

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学プログラム

本授業の構成

第1回 10月6日：第1回 命題と証明

第2回 10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号

第3回 10月20日：第3回 命題論理

第4回 10月27日：第4回 述語論理

第5回 11月3日：第5回 述語と集合

第6回 11月10日：第6回 直積と冪集合（出張中につきHPの資料でオンデマンドで自習してください）

第7回 11月17日：第7回 様々な証明法（1）

11月24日：調布祭の後片付けで休み

第8回 12月1日：第8回 様々な証明法（2）

第9回 12月8日 様々な証明法（再帰的定義と数学的帰納法）

第10回 12月15日：第10回 写像（関数）（1）

第11回 12月22日：第11回 写像（関数）（2）

第12回 1月5日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、

グラフによる表現

第13回 1月19日：第13回 同値関係

第14回 1月26日：第14回 順序関係：半順序集合、

ハッセ図、全順序集合、上界と下界

第15回 2月2日：第15回 期末試験

1. 本日の目標

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が正しく使える
2. 全称記号 $\forall$, 存在記号 $\exists$ が使える
3. 部分集合と包含関係を理解する
4. 集合の演算（和、積、補、差、素, 要素数）

2. 重要な集合

$\emptyset$:

$\mathbb{N}$:

$\mathbb{N}^+$:

$\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Q}$:

$\mathbb{R}$:

$\mathbb{C}$:

2. 重要な集合

$\emptyset$: 空集合 (empty set)

(ギリシャ語 ϕ とは違う)

$\mathbb{N}$: 自然数集合 (0を含む)

$\mathbb{N}^+$: 自然数集合 (1以上)

$\mathbb{Z}$: 整数集合

$\mathbb{Q}$: 有理数集合

$\mathbb{R}$: 実数集合

$\mathbb{C}$: 複素数集合

要素数が有限の集合を有限集合(finite set), 要素数が無限の集合を無限集合(infinite set) と呼ぶ

普遍集合

Def

議論の対象とする全体集合

例

普遍集合を $\mathbb{N}$ とする

$\Rightarrow$

自然数全体を全体集合とする

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$$a \in A$$

と書く。

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき $a \in A$ と書く。

外延的記法：

内包的記法：

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 2, 5, 1, 4\}$ (有限集合)

$A = \{1, 3, 5, 7 \dots\}$ (無限集合)

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 2, 5, 1, 4\} \text{ (有限集合)}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7 \dots\} \text{ (無限集合)}$$

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

(n (かつ)) を示す場合にはカンマで区切る)

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n \text{は奇数}\}$$

例

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を外延的記法で表せ。

例

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を外延的記法で表せ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

例

$A = \{2, 4\}$ を先の例の内包的記法 $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ に条件を足して表せ。

例

$A = \{2, 4\}$ を先の例の内包的記法 $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ に条件を足して表せ。

回答

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n \text{ は偶数}\}$$

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」



「任意の自然数 n について, $n \geq 0$ が成り立つ」

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」



「任意の自然数 n について, $n \geq 0$ が成り立つ」



「 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ 」

$\forall$: 意味 : すべての(all, any) 読み方: “for all”

日本語訳 :

「 $\mathbb{N}$ に属するすべての n について, $n \geq 0$ が成り立つ」

例

「すべての実数 x について, $x^2 \geq 0$ 」
を全称記号を用いて表せ.

例

「すべての実数 x について, $x^2 \geq 0$ 」
を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

5. 存在記号

命題

「実数 x について $x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

5. 存在記号

命題

「実数 x について $x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」



「 $x^2 + 7x < 0$ となる実数 x が存在する」

5. 存在記号

命題

「実数 x について $x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

↓

「 $x^2 + 7x < 0$ となる実数 x が存在する」

↓

「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 7x < 0$ 」

∃ : 意味 : 存在する(Exist) 読み方 : “there exists”

例

「実数 x について $x^2 > 0, x < 0$ となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

例

「実数 x について $x^2 > 0, x < 0$ となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

6. 部分集合

Def (定義: Definitionのこと)

対象としているものの全体を普遍集合 (全体集合) と呼び, U と書く. また, 要素を一つも持たない集合を空集合といい, $\emptyset$ で表す.

Def

集合 A の要素が集合 B の要素でもあるとき, A は B の部分集合であるといい,

$$A \subseteq B \text{ または } B \supseteq A$$

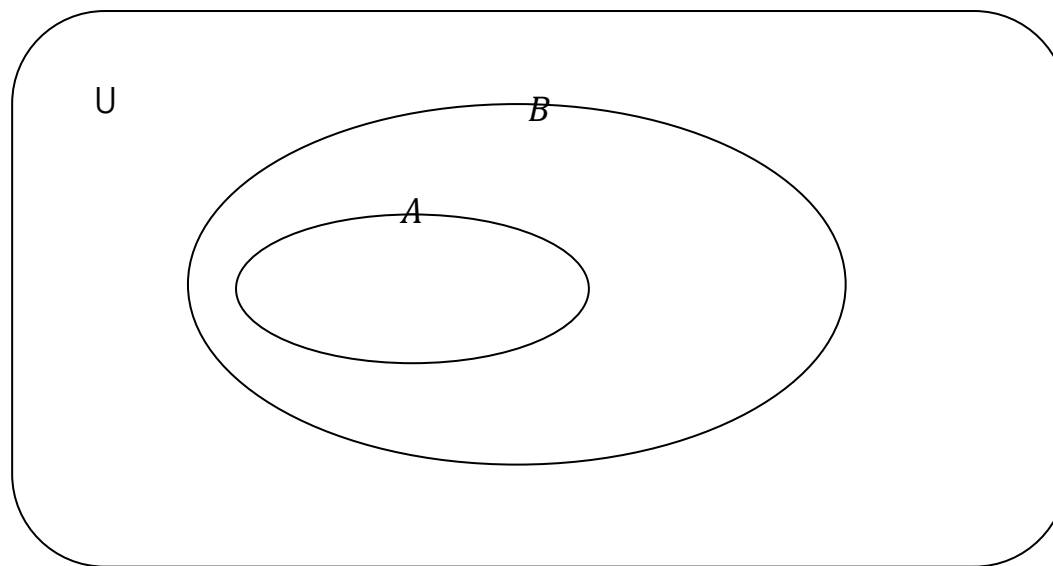
で表す.

部分集合の数学的表現

Def $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

$\rightarrow$ は「ならば」という意味、

x が A に含まれているならば、その x のすべては B に含まれる。



注意

$$\text{Def } A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

この部分集合の定義では、 B 自身も B の部分集合であることがわかる。

例題 次の命題は正しいか？
真偽を証明せよ。

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

(1)の解答

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ に対して $A \subseteq B$

解答 真

証明

A の要素1,2,3はすべて B の要素で,

$$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

が成り立つ. 定義より

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ ならば $A \subseteq B$

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ に対して

$\forall x[x \in \{1,2,3\} \rightarrow x \in \{1,2,3,4\}]$ が成り立つ.

従って $A \subseteq B$



(2)の解答の方針

(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ に対して $A \subseteq B$

解答 偽

証明の方針

A の要素で1は B の要素でない.

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ の否定 $\Rightarrow$

$\exists x \in A[x \notin B]$

(2)の解答

(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ に対して $A \subseteq B$

解答 偽

証明

A の要素で1は B の要素でない。従って

$$\exists x \in A [x \notin B] \Leftrightarrow \neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

定義より

「 $\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$ が成り立たない」ならば

「 $A \subseteq B$ は成り立たない」

従って、命題は偽



重要:全称記号 $\forall$ の否定に存在記号 $\exists$ が用いられる

$$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$



「 A のすべての要素が B の要素である」の否定



「 A の要素の中で B の要素でないものがある」



$$\exists x \in A [x \notin B]$$

「 $\sim$ ならば $\sim$ である」の否定は、反例 $\exists x$ を一つ示せばよい。

問い

$$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists x \in A [x \notin B]$$

ということは

$$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall x \in A [x \in B]$$

も成り立つ？

問い

$$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

$\Leftrightarrow$

$$\exists x \in A [x \notin B]$$

ということは

$$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

も成り立つ？

成り立ちません。この理由は 命題
論理からの授業で明らかになります。

同等

Def $A \subseteq B$ and $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

AとBは等しいという.

例題

$$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

のとき,

$A = B$ を証明せよ.

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ のとき,

$A = B$ を証明せよ.

証明

(1) $A \subseteq B$

$$\forall x \in A \Rightarrow \forall x [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}]$$

$\Rightarrow \forall x [x = 4(n + 1) - 1, n \in \mathbb{Z}], (n + 1) \in \mathbb{Z}$ より
 $\Rightarrow \forall x [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x [x \in B]$
より $\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$. 従って $A \subseteq B$

例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ のとき, $A = B$ を証明せよ.

証明

(2) $A \supseteq B$

$$\forall x \in B \Rightarrow \forall x [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}]$$

$$\Rightarrow \forall x [x = 4(m - 1) + 3, m \in \mathbb{Z}], (m - 1) \in \mathbb{Z} \text{ より } \Rightarrow$$

$$\forall x [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x [x \in A] \quad \text{より}$$

$$\forall x [x \in B \rightarrow x \in A]. \quad \text{従って } A \supseteq B$$

(1)(2)より $A \subseteq B$ and $A \supseteq B$

が成り立つ. 従って $A = B$

■

真部分集合

Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$
 A は B の真部分集合であるという.



Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$ and ???????

真部分集合 $\subset$ は $\subsetneq$ とも書く．本授業では $\subset$ を用いる．

真部分集合

Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

A は B の真部分集合であるという.



Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$ and $\exists y \in B [y \notin A]$

真部分集合 $\subset$ は $\subsetneq$ とも書く. 本授業では $\subset$ を用いる.

例題

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

証明

① $\forall x[x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}]$ が成り立つ

② $y = -1$ について

$y \in \mathbb{Z}$ であるが $y \notin \mathbb{N}$

従って

$$\exists y \in \mathbb{Z}[y \notin \mathbb{N}]$$

①②より $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

■

7. 集合演算

集合 A, B と普遍集合を U とする.

A, B を U の部分集合として以下の演算を定義する.

- (1) 和集合
- (2) 積集合
- (3) 補集合
- (4) 差

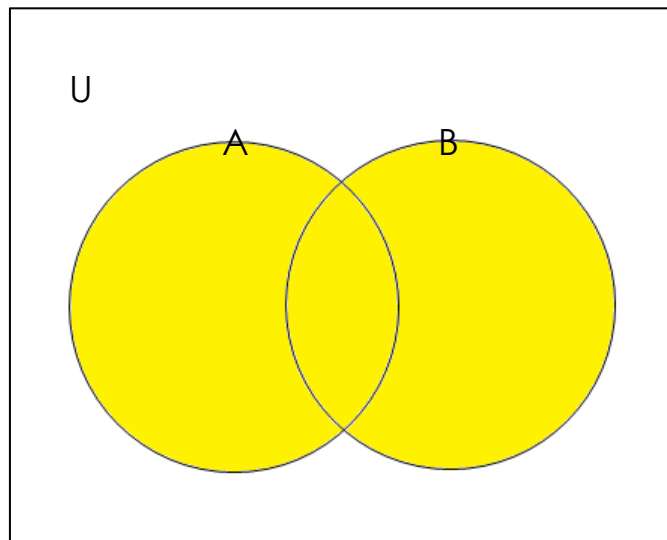
(1) 和集合

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{または} x \in B\}$$

集合 A, B と普遍集合を U とする.

このとき, A, B の和集合

とは A と B の要素を
すべて併せた集合の
こと



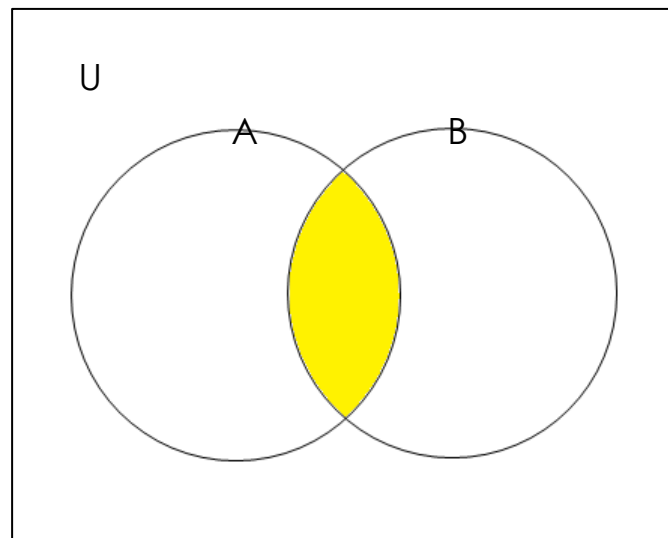
(2) 積集合

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{かつ} x \in B\}$$

集合 A, B と普遍集合を U とする.

このとき, A, B の積集合とは、

A と B の共通要素のみ
からなる集合のこと

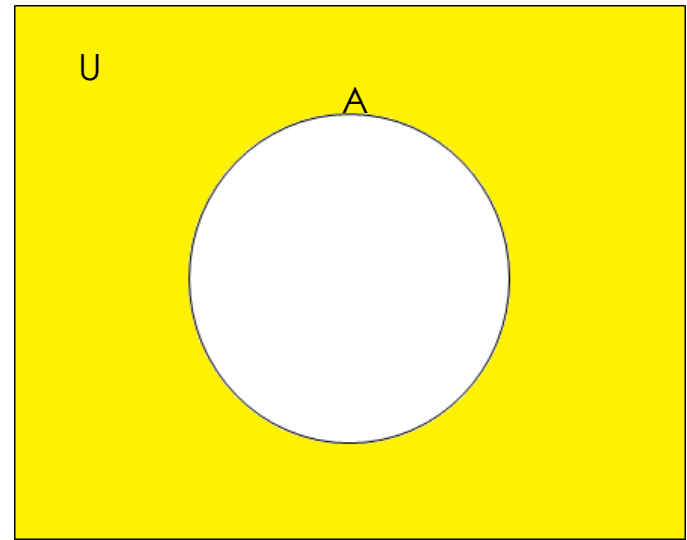


(3) 補集合

$$\bar{A} = \{x | x \in U, \text{かつ} x \notin A\}$$

普遍集合を U とし、その部分集合 A を考える.

このとき, A の補集合とは U のうち
 A に含まれない要素の
集合のこと

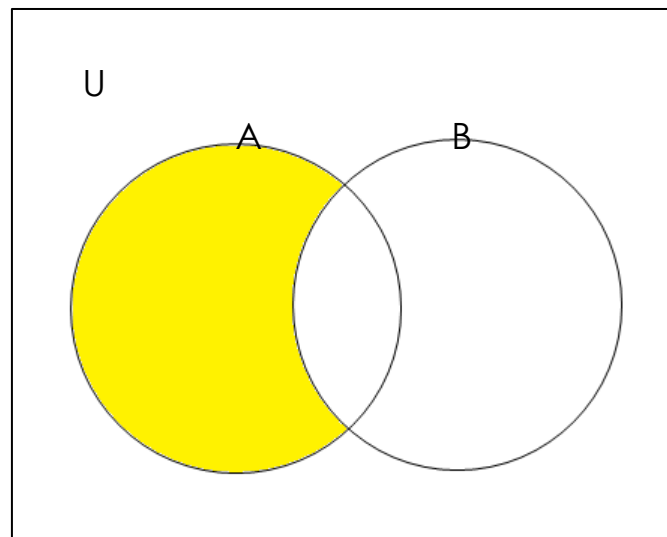


(4)差

$$A - B = \{x | x \in A, \text{かつ } x \notin B\}$$

集合 A, B と普遍集合を U とする.

このとき, 差 $A - B$ とは,
 A から B の要素を除いた集合
のこと. $A - B = A \setminus B$ と書く
こともある. $A - B = A \cap \bar{B}$
と書ける.



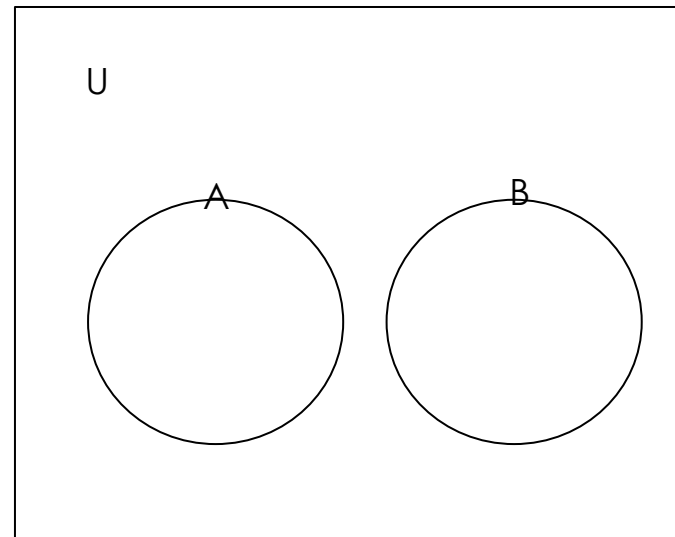
(5) 素

集合 A, B と普遍集合を U とする.

A と B に共通要素がない場合

$$A \cap B = \emptyset$$

「このとき A と B は素である」
という.



8. ド・モルガンの法則を証明せよ

集合 A, B と普遍集合を U とする.

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

解答(1)

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

証明

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{または } x \in B\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{x | x \in U, \text{かつ } x \notin A \cup B\}$$

$$= \{x | x \in U, \text{かつ } x \notin A, \text{かつ } x \notin B\}$$

$$= \bar{A} \cap \bar{B}$$

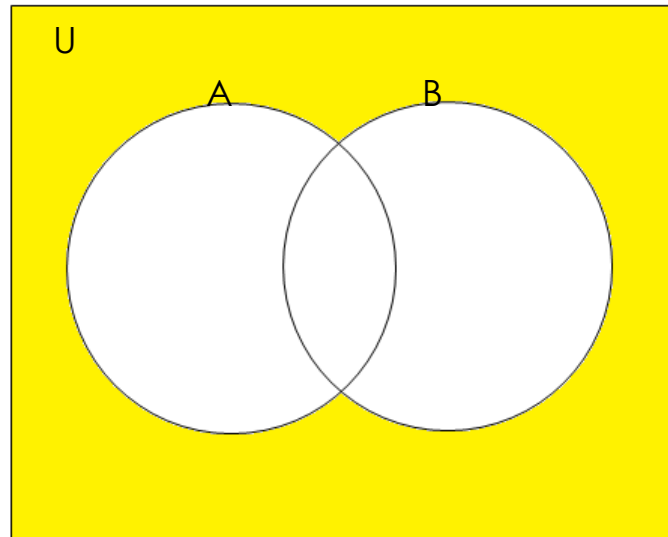
注意

$A \cup B$ に含まれないのでそれぞれにも含まれない

■

(1)のイメージ

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



解答(2)

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

証明

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{かつ} x \in B\}$$

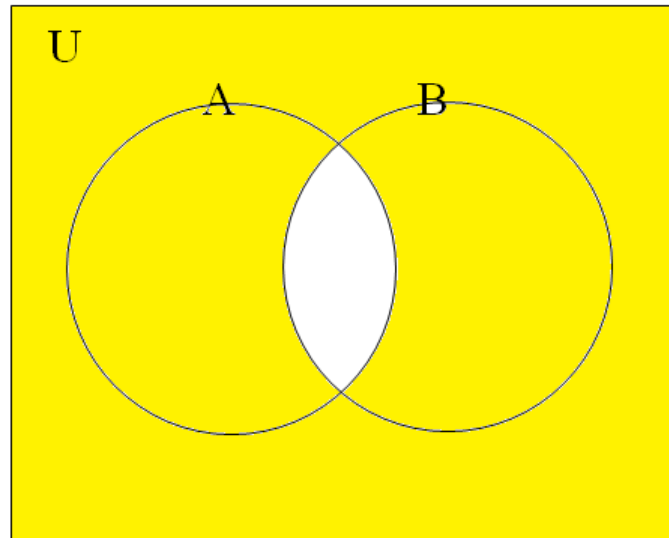
$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \{x | x \in U, \text{かつ} x \notin A \cap B\} \\ &= \{x | x \in U, \text{かつ} x \notin A, \text{または} x \notin B\} \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

注意
AかつBに含まれないので
Aに含まれないかBに
含まれない

■

(2)のイメージ

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



例

普遍集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$,
 $B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B$

(2) 積集合 $A \cap B$

(3) 補集合 $\bar{A}$, $\bar{B}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

を求めよ.

例

普遍集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$,
 $B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$

(2) 積集合 $A \cap B$

(3) 補集合 $\bar{A}$, $\bar{B}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$,
 $B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A}$, $\bar{B}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,4\}$,
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,4\}$,
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B = \{1,2\}$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,4\}$,
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B = \{1,2\}$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{3\}$

9. 要素の個数

集合 A が有限集合の場合、要素の数を

$$n(A) \quad \text{や} \quad |A|$$

で表す.

以下を証明せよ。

Th. 1. U を有限な普遍集合とする。集合 A, B について以下が成り立つ。

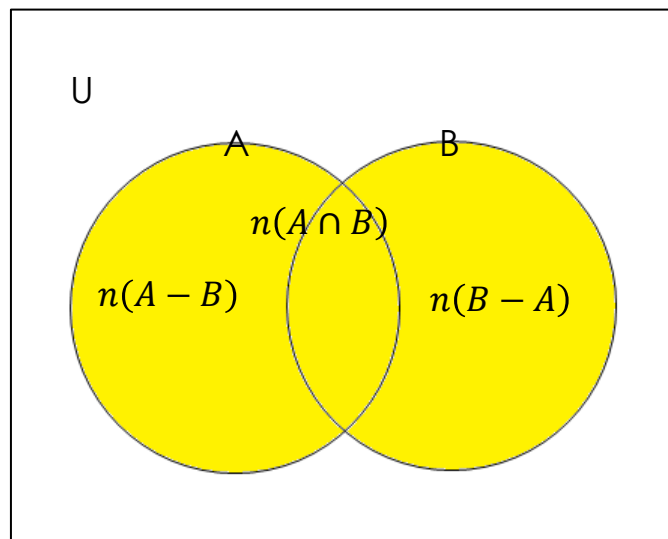
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Th. 1. U を有限な普遍集合とする。集合 A, B について以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[ヒント]

$$\begin{aligned} n(A \cup B) \\ &= n(A - B) + n(B - A) \\ &\quad + n(A \cap B) \end{aligned}$$



Th. 1. U を有限な普遍集合とする。集合 A, B について以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[証明]

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \\ &= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) \\ &\quad + n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

従って

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \blacksquare$$

系 1 Corollary 1

U を有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

系 1 Corollary 1

U を有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

[証明]

Th 1より, $n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$.

$\bar{A} \cap A = \emptyset$ より,

$$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$$

従って,

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$



例

普遍集合 $U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき, 以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B)$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 50$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき, 以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B)$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とすると、

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とすると,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 51$$

8. まとめ

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）
2. 全称記号 $\forall$ 、存在記号 $\exists$
3. 部分集合と包含関係
4. 集合の演算（和、積、補、差、素数,要素数）

演習問題1. 次の集合を外延的記法でかけ。

$$(1) A = \{n \mid 1 < n < 10, n \in \mathbb{N}, n \text{ は偶数}\}$$

$$(2) B = \{4n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$(3) C = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(4) D = \{x \mid 2x^2 + 9x + 9 = 0, x \in \mathbb{N}\}$$

演習問題2. 次の集合を内包的記法でかけ。

$$(1) A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$(2) B = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$$

$$(3) C = \{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$$

$$(4) D = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$$

演習問題3. 次の数について数の集合 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ に属するか属さないかを $\in$ か $\notin$ を用いて表現せよ。

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\sqrt{2}$

(3) -5

(4) $2 - i$

演習問題4. 次の数式を日本語で表せ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 0$

(3) $\exists n \in \mathbb{C}, n^2 \in \mathbb{N}$

(4) $\forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

(6) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq a$

(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, ax + b = 0$

(8) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| < a$

演習問題5. 次の日本語を全称記号, 存在記号を用いて表せ

- (1) 実数の中には、有理数ではない数が存在する
- (2) すべての実数 x について、 $2x^2 - x + 2 > 0$ が成り立つ
- (3) 0と異なる任意の実数 x について、 $\frac{y}{x} = 1$ となる実数 y が存在する
- (4) 任意の整数 n に対し $\sin(2\pi n) = 0$ が成り立つ
- (5) 整数の中には、2で割り切れない数が存在する
- (6) すべての実数 x について、 $2^x > 0$ である
- (7) 任意の実数 x に対し、 $x^2 + 3x + 2 > a$ となる定数 a が自然数の中に存在する
- (8) 任意の整数 a に対し、 $x^2 + x + 2 > a$ となる有理数 x が存在する

演習問題6.

- (1) $A = \{a, b, c, d\}$ に対して, A の部分集合をすべて挙げよ.
- (2) 集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ に対して $A \subseteq B$ が成り立たないことを証明せよ.

演習問題7

$A = \{5n + 2m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ のとき, $A = \mathbb{Z}$ を証明せよ.

演習問題8.

普遍集合 U , 集合 A, B, C について
 $A \subseteq B$, and $B \subseteq C$, のとき,

$$A \subseteq C$$

を証明せよ.

演習問題9.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{2,4,5,6,9\}$$

$$B = \{1,2,3,6,7\}$$

このとき,

(1)和集合 $A \cup B$

(2)積集合 $A \cap B$

(3)補集合 $\bar{A}, \bar{B}$

(4) $A - B$

を求めよ.

演習問題10.

$U = \{n \mid 1 \leq n \leq 15, n \in \mathbb{Z}\}$ を全体集合とし、部分集合 $A = \{a \mid a \text{は偶数}\}$, $B = \{b \mid b \text{は奇数}\}$, $C = \{c \mid c \text{は4の倍数}\}$ を考える. 以下の要素を列挙せよ.

- (1) A, B, C
- (2) $B \cup C$
- (3) $B \cap C$
- (4) $\bar{A}$
- (5) $\overline{A \cup C}$
- (6) $\bar{B} \cap C$
- (7) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

演習問題11. 次の命題の否定形を答えよ。

- (1) 「私の視力は1.0未満であり、かつ握力は50kg以下」
ということはない。
- (2) このリンゴは甘いか、または酸っぱくない。
- (3) 「すべての人がiPadを持っている」とは限らない
- (4) 「iPad proを持っていない人がある」ということはな
い
- (5) (3)(4)を全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$ を用いて書け。

演習問題12

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 100, m \in \mathbb{N}\}$ について

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とすると、以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B), \\ n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$