

# 10.写像（関数）（1）

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

# 本授業の構成

- 第1回 10月6日 : 第1回 命題と証明
- 第2回 10月13日 : 第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月20日 : 第3回 命題論理
- 第4回 10月27日 : 第4回 述語論理
- 第5回 11月3日 : 第5回 述語と集合
- 第6回 11月10日 : 第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月17日 : 第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 11月24日 : 第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月1日 : 第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月8日 : 第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月15日 : 第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 12月22日 : 第12回 写像と関係 : 二項関係、関係行列、  
グラフによる表現
- 第13回 1月5日 : 第13回 同値関係
- 第14回 1月19日 : 第14回 順序関係 : 半順序集合、  
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 1月26日 : 第15回 期末試験

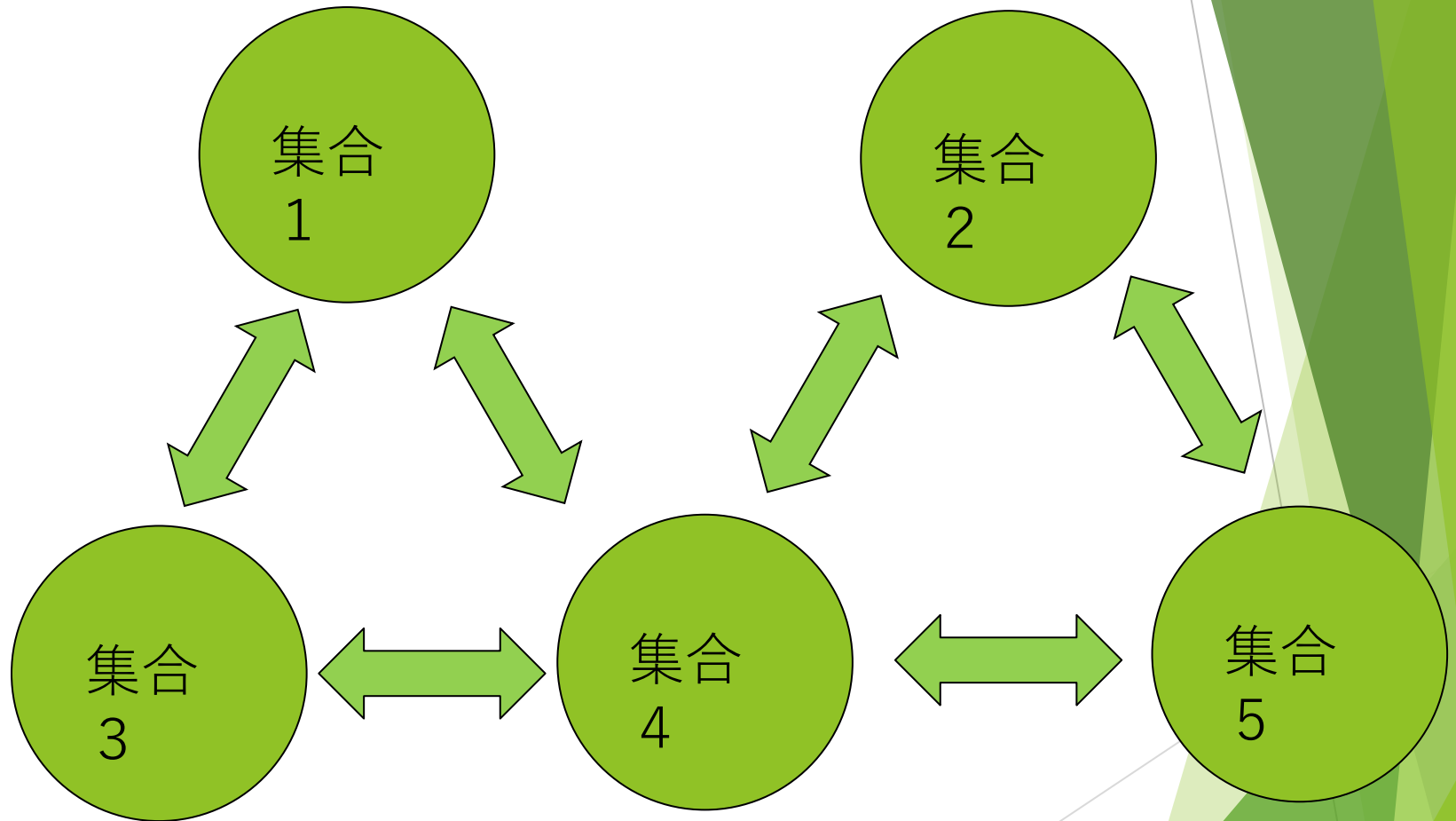
# 1. 本日の目標

- ① 関係の紹介
- ② 関係の中の関数、写像
- ③ 部分写像と写像
- ④ 単射と全射、全単射

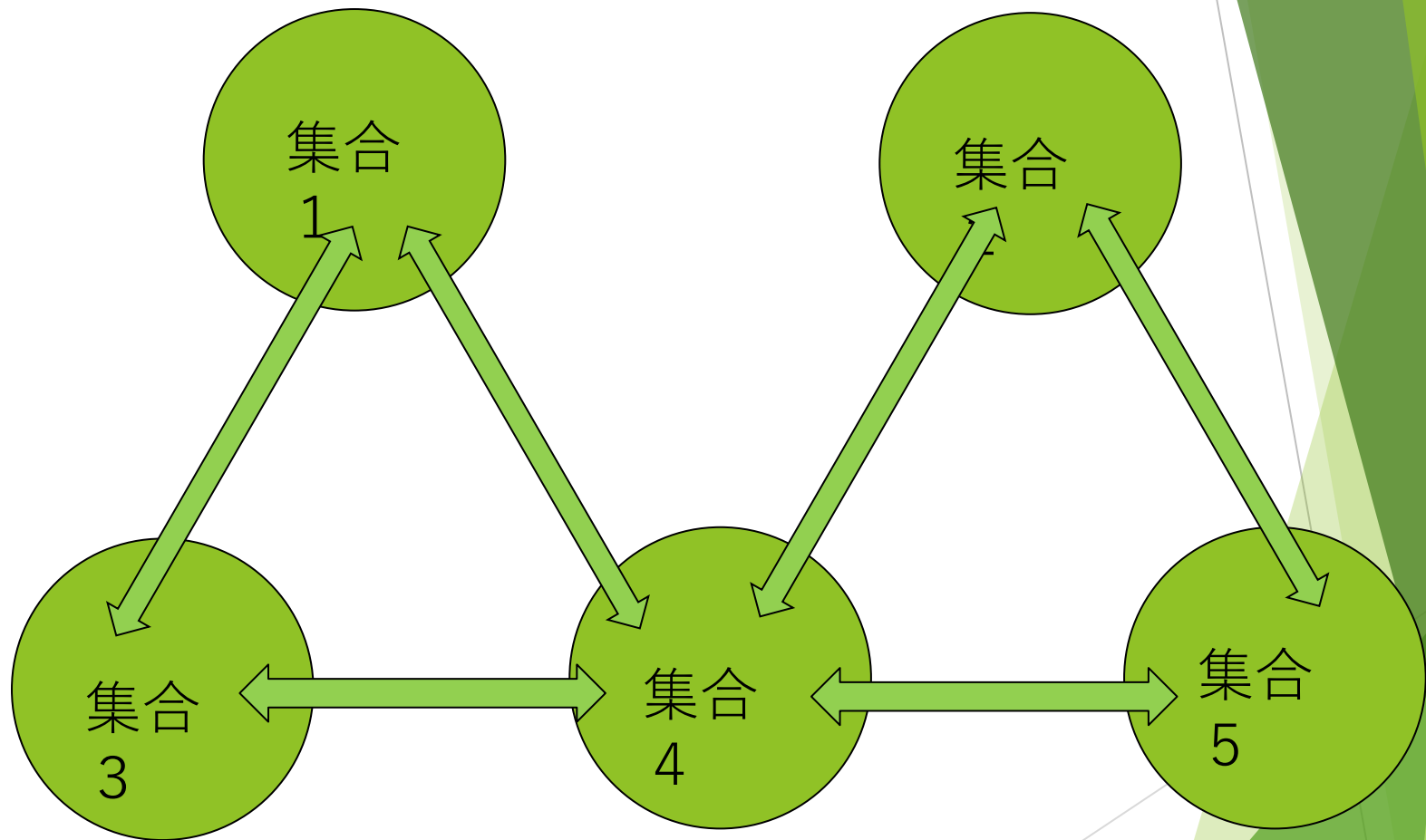
# これまで学んできた概念

- ▶ 述語
- ▶ 集合
- ▶ 直積集合
- ▶ 冪集合
- ▶ 集合系

## 2. これまで集合と集合同士の関係について学んできた



## 2. これから学ぶこと（集合の要素間の関係）



# 3. 関係

再掲 5 章 :

Def 1.

二つの集合  $U, V$  の直積集合  $U \times V$  の部分集合  $R$  を  $U$  から  $V$  への「関係」という.

また,  $R \ni (a, b)$  のとき  $aRb$  :  $a$  と  $b$  は関係ある

$R \not\ni (a, b)$  のとき  ~~$aRb$~~  :  $a$  と  $b$  は関係なし  
と書く.

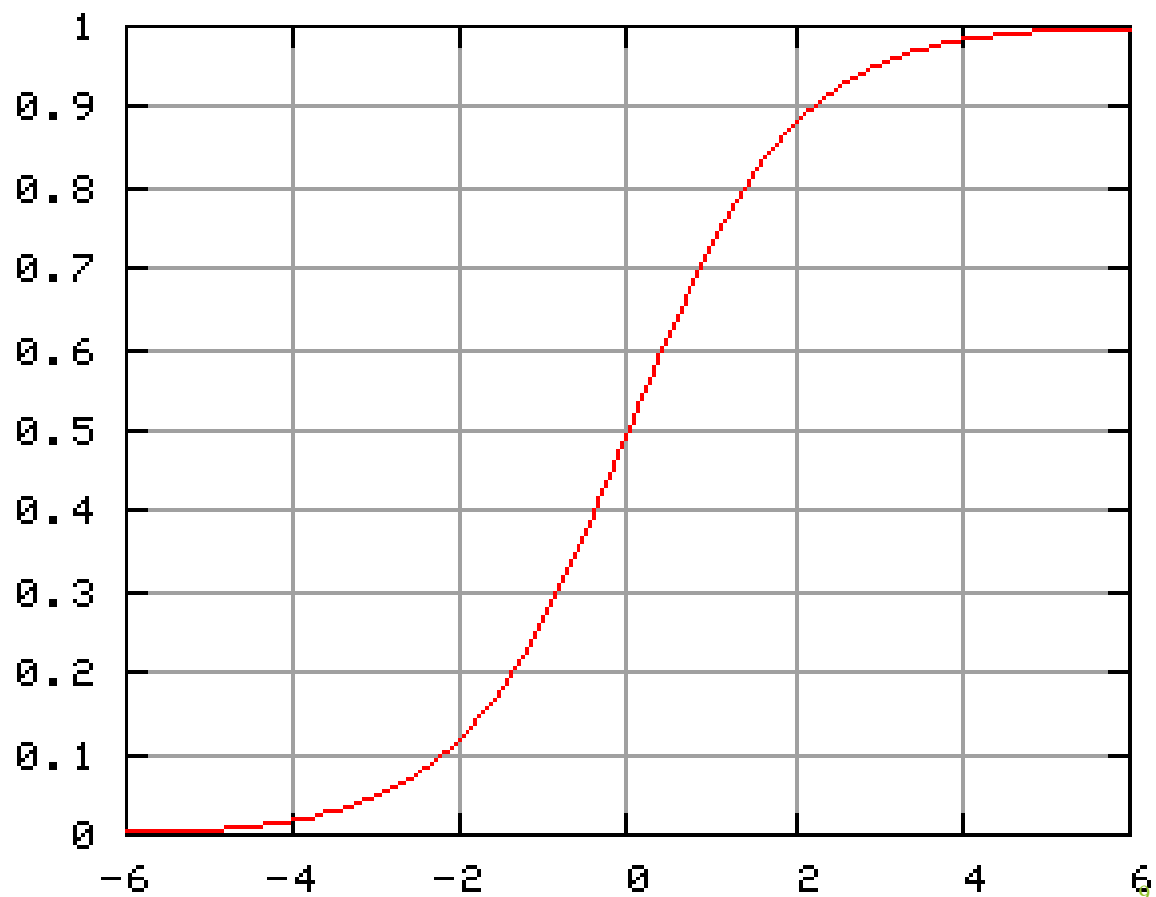
### 3. 関係の特殊系としての写像と関数

最初に関係のなかの特殊系である写像について学び、それを徐々に一般化していく

写像 のひとつに関数がある。

写像と関数を同義と考える専門家と「数」に関する写像のみを関数と呼ぶという専門家がいる。

# 関数 $f(x)$



$n!$  (関数 `fact` (int  $n$ ) の再帰呼び出し)

```
int fact(int n)
{
    int m;

    if (n == 0)
        return 1;    // 0! = 1
    /* 以下、n が 0 でないとき */
    m = fact(n - 1);    // (n-1)! を求めてそれを
    m とおく。このfact(n-1)が再帰呼出し。
    return n * m;    // n! = n * m
}
```

# EXCELの関数

関数の挿入

関数の検索(S):

何がしたいかを簡単に入力して、[検索開始] をクリックしてください。

検索開始(G)

関数の分類(C): 検索/行列

関数名(N):

- ADDRESS
- AREAS
- CHOOSE
- COLUMN
- COLUMNS
- FORMULATEXT
- GETPIVOTDATA

COLUMN(参照)  
参照の列番号を返します。

[この関数のヘルプ](#)

OK キャンセル

# 確率変数

例

コインの表が出ると $x = 1$ ,裏が出ると $x = 0$ という確率変数がある.  $P(x) = 0.5$ である.

一般に確率変数は関数である.

$$x = \begin{cases} 1: \text{コインの表が出る} \\ 0: \text{コインの裏が出る} \end{cases}$$

# 連続量に関する確率変数の定義

確率空間 $(\Omega, A, P)$  に対し,  $\Omega$  から実数 $R$ への関数 $X : \Omega \rightarrow R$ が, 任意の実数 $r$  に対し

$\{X \leq r\} \in A$  (累積値が有限) を満たすならば,  $X$  を確率空間 $(\Omega, A, P)$  上の確率変数という.

## 4. 関数

### Def 2

変数 $x, y$ について,  $x$ の値 (数値以外でも可) が決まると $y$ の値が一つだけ決まるとき,  $y$ は $x$ の関数である, といい,

$$y = f(x)$$

と書く。

変数 $x$ の変域を「定義域」といい, 関数値 $y$ の取り得る値の変域を「値域」という。

## 5. 写像と部分写像

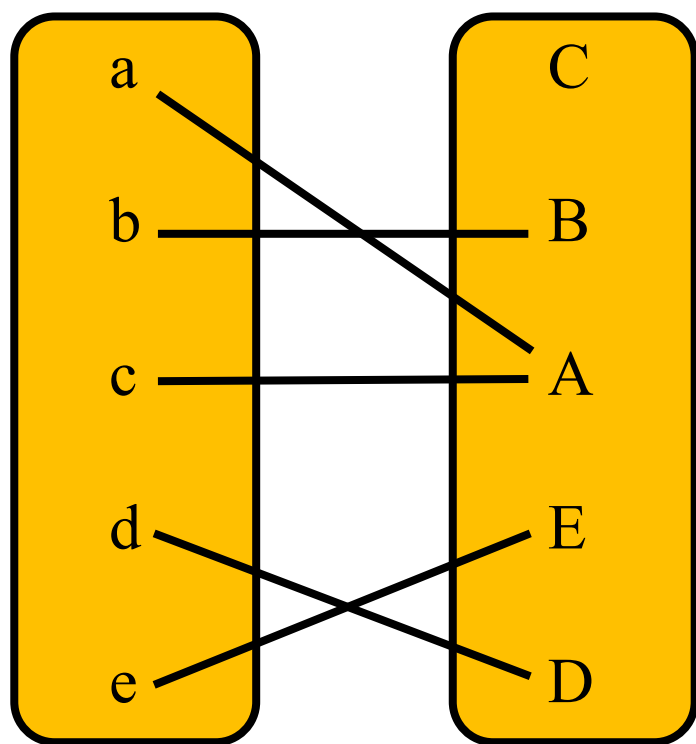
### Def 3

集合 $U$ の各要素に、それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。

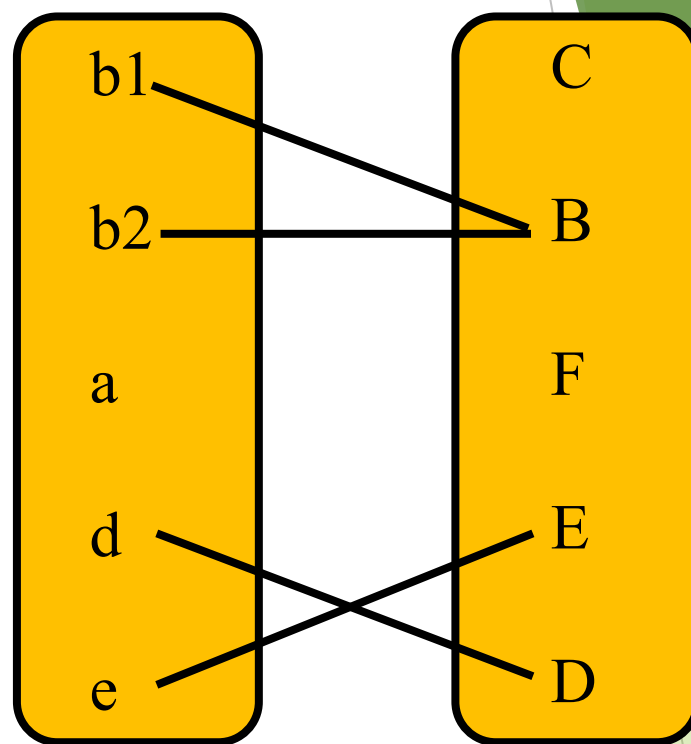
このとき、集合 $U$ の要素に対応する $V$ の要素が存在しない場合も許容する。この関係を $U$ から $V$ への**部分写像**という。  $f$ が $U$ から $V$ への部分写像であることを  $f: U \mapsto V$ と書く。

$U$ を $f$ の始域、  $V$ を $f$ の終域という。

# 写像と部分写像

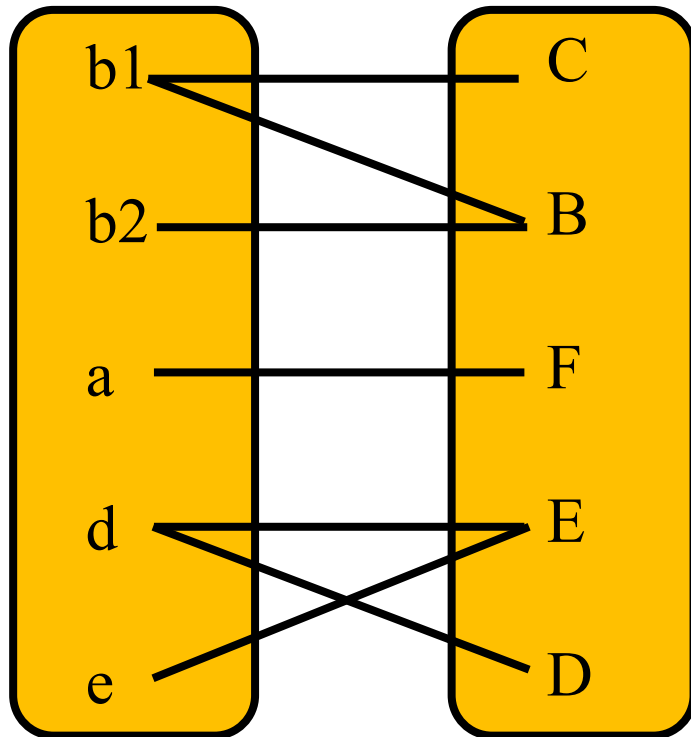


写像 (関  
数)

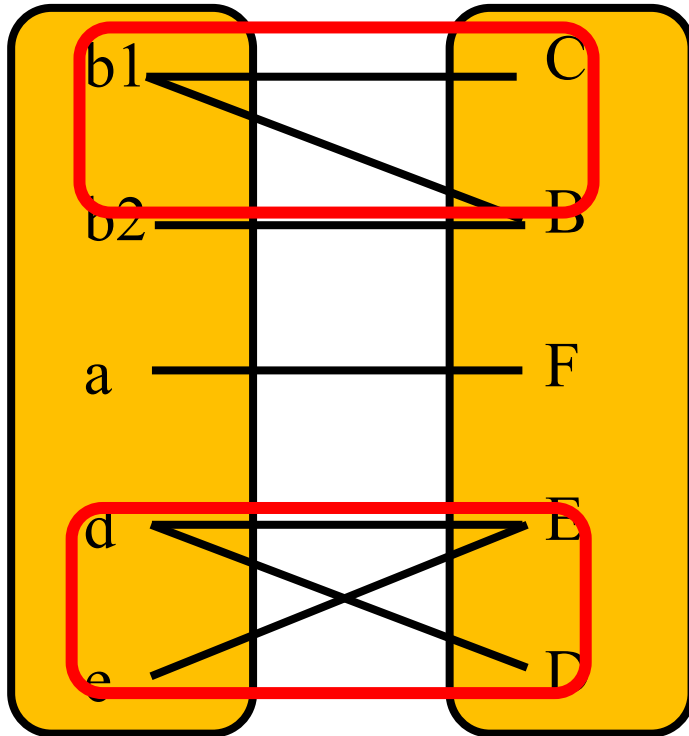


部分写像

以下は（部分）写像か？



# 以下は（部分）写像か？



部分写像でない

Def: 集合 $U$ の各要素に, それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。

部分写像は集合 $U$ の要素に対応する $V$ の要素が存在しない場合を許容するが, 集合 $U$ の要素に複数の $V$ の要素が対応していることは許さない。

1つの要素が1つの要素に対応せずに2つの要素が対応している要素が存在する。

問 以下の $f$ は（部分）写像か？

(1)  $f$ : クラスの氏名集合  $\mapsto$  出席（学籍）  
番号集合

(2)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  電話番号集合

(3)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  郵便番号集合

(4)  $f$ : 自動販売機の入金額集合  $\mapsto$  飲み物  
集合

(5)  $f$ : JR山の手線の駅区間集合  $\mapsto$  大人  
乗車金額集合

問 以下の $f$ は（部分）写像か？

(1)  $f$ : クラスの氏名集合  $\mapsto$  出席（学籍）  
番号集合 ○

(2)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  電話番号集合

(3)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  郵便番号集合

(4)  $f$ : 自動販売機の入金額集合  $\mapsto$  飲み物  
集合

(5)  $f$ : JR山の手線の駅区間集合  $\mapsto$  大人乗  
車金額集合

問 以下の $f$ は（部分）写像か？

(1)  $f$ : クラスの氏名集合  $\mapsto$  出席（学籍）  
番号集合 ○

(2)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  電話番号集合 ×（一  
つの住所に複数番号を許す）

(3)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  郵便番号集合

(4)  $f$ : 自動販売機の入金額集合  $\mapsto$  飲み物  
集合

(5)  $f$ : JR山の手線の駅区間集合  $\mapsto$  大人乗  
車金額集合

問 以下の $f$ は（部分）写像か？

(1)  $f$ : クラスの氏名集合  $\mapsto$  出席（学籍）  
番号集合 ○

(2)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  電話番号集合 ×（一  
つの住所に複数番号を許す）

(3)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  郵便番号集合 ○

(4)  $f$ : 自動販売機の入金額集合  $\mapsto$  飲み物  
集合

(5)  $f$ : JR山の手線の駅区間集合  $\mapsto$  大人乗  
車金額集合

## 問 以下の $f$ は（部分）写像か？

(1)  $f$ : クラスの氏名集合  $\mapsto$  出席（学籍）番号集合 ○

(2)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  電話番号集合 ×（一つの住所に複数番号を許す）

(3)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  郵便番号集合 ○

(4)  $f$ : 自動販売機の入金額集合  $\mapsto$  飲み物集合 ×（同じ金額に複数の飲み物）

(5)  $f$ : JR山の手線の駅区間集合  $\mapsto$  大人乗車金額集合

## 問 以下の $f$ は（部分）写像か？

(1)  $f$ : クラスの氏名集合  $\mapsto$  出席（学籍）番号集合 ○

(2)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  電話番号集合 ×（一つの住所に複数番号を許す）

(3)  $f$ : 住所集合  $\mapsto$  郵便番号集合 ○

(4)  $f$ : 自動販売機の入金額集合  $\mapsto$  飲み物集合 ×（同じ金額に複数の飲み物）

(5)  $f$ : JR山の手線の駅区間集合  $\mapsto$  大人乗車金額集合 ○

# $U, V$ が有限集合の場合の数学的 記述例

$$U = \{a, b, c, d\}, \quad V = \{A, B, C, D\}$$

小文字を大文字に写像を記述してみよう。

## 記述例

$$f: U \mapsto V; a \mapsto A, b \mapsto B, c \mapsto C, d \mapsto D$$

もしくは

$$f: U \mapsto V; f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C, f(d) = D$$

$U, V$ が無限集合（もしくは多要素）の場合の数学的記述例

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto \sqrt{x}$$

もしくは

$$f: x \in \mathbb{N} \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{N}$$

もしくは

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \sqrt{x}$$

## 例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし,  $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

## 例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし,  $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

証明

定義に戻れ： Def 3 集合 $U$ の各要素に，それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。

→全称命題の否定；否定事例の存在命題の証明を用いる。

# 例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし,  $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

証明

## Def 3

定義に戻れ：集合 $U$ の各要素に、それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。

→全称命題の否定；否定事例の存在命題の証明を用いる。

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$ では,  $x = 1$ とすると  $f(1) = \pm 1$  となり, 写像された要素が二つ対応していることがある。  
従って,  $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$  は写像ではない。

## 例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

## 例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def 3

定義に戻れ：

集合 $U$ の各要素に、それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。

## 例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

### Def 3

定義に戻れ：集合 $U$ の各要素に，それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。

$x \in \mathbb{R}$ を仮定する。このとき， $x$ について $f(x) = x^2$ は $x^2 \in \mathbb{R}$ でただ一つだけ決まる。従って，各要素の写像にただ一つの実数が対応しているので，

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ は写像である。

## 例題 3

$U = \{1, 2, 3\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1)  $\{(2, c), (3, c)\}$
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

## 例題 3

$U = \{1, 2, 3\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1)  $\{(2, c), (3, c)\}$  部分写像だが写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

## 例題 3

$U = \{1, 2, 3\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1)  $\{(2, c), (3, c)\}$  部分写像だが写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$  部分写像で写像
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

## 例題 3

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の

$f: U \mapsto V$  は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1)  $\{(2, c), (3, c)\}$  部分写像だが写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$  部分写像で写像
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$  部分写像でない
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

## 例題 3

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1)  $\{(2, c), (3, c)\}$  部分写像だが写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$  部分写像で写像
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$  部分写像でない
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$  部分写像で写像

## 6. 部分写像の定義域と値域

$$f: U \mapsto V$$

$U$ を $f$ の始域,  $V$ を $f$ の終域という。

特に $U$ の要素のうち, 部分写像 $f$ による値が存在する要素を集めた $U$ の部分集合を「**定義域**」と呼ぶ。  $\text{dom}(f)$  と書く。  $U \setminus \text{dom}(f)$  を「**未定義域**」と呼ぶ。

また,  $V$ の要素のうち, ある $U$ の要素の $f$ による値になっている要素を集めた $V$ の部分集合を「**値域**」と呼ぶ。  $\text{ran}(f)$  と書く。

# 定義域と値域

$\text{dom}(f) = \{x | \text{??????}\}$  で表せ。

$\text{ran}(f) = \{y | \text{??????}\}$  で表せ。

# 定義域と値域

$$\text{dom}(f) = \bigcup_y \{x | f(x) = y\}$$

$$\text{ran}(f) = \bigcup_x \{y | f(x) = y\}$$

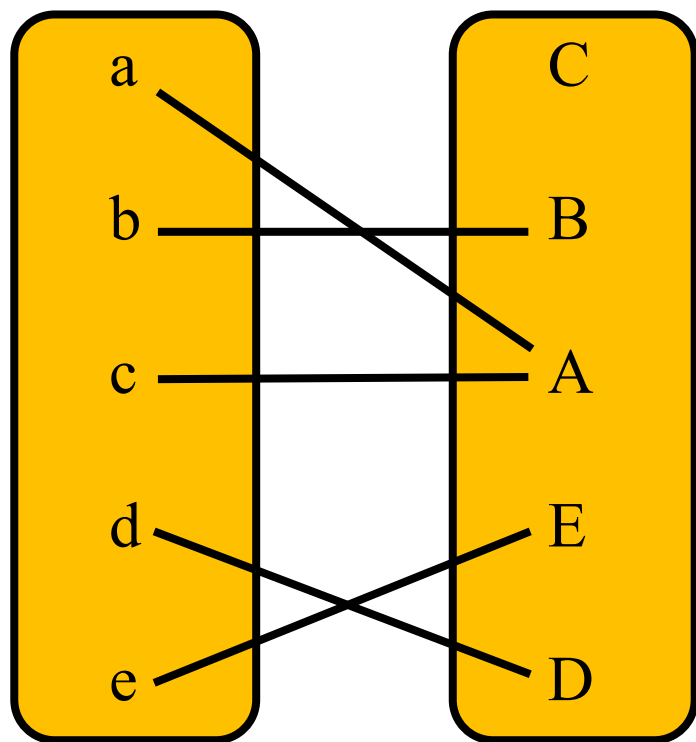
なので 量子子を用いると??

# 定義域と値域

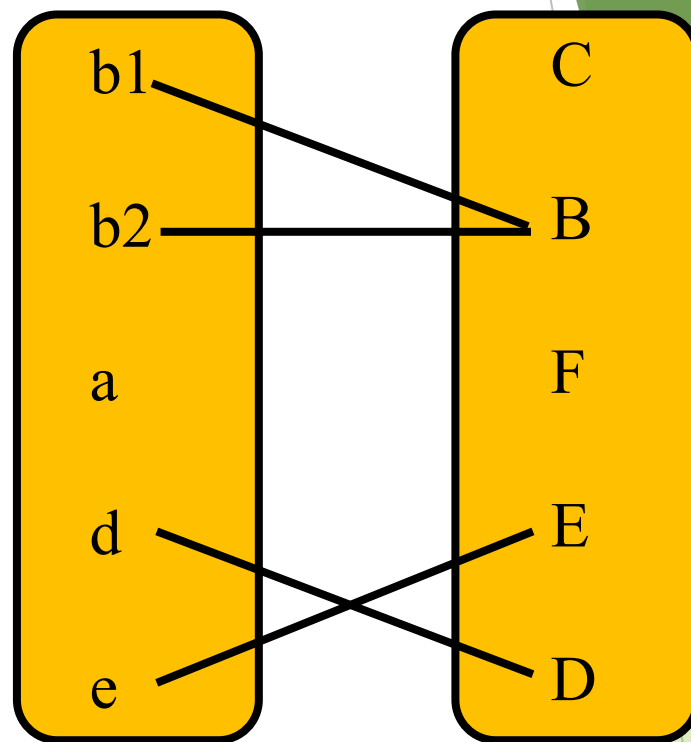
$$\text{dom}(f) = \{x \mid \exists y, f(x) = y\}$$

$$\text{ran}(f) = \{y \mid \exists x, f(x) = y\} = \{f(x) \in V\}$$

# 例題 次の部分写像の定義域と値域は？

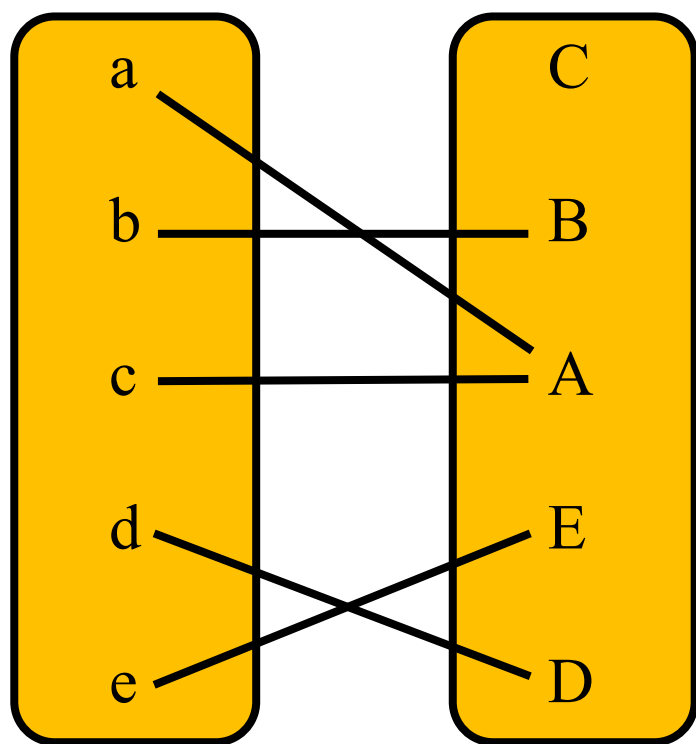


$\text{dom}(f) = ?$   
 $\text{ran}(f) = ?$

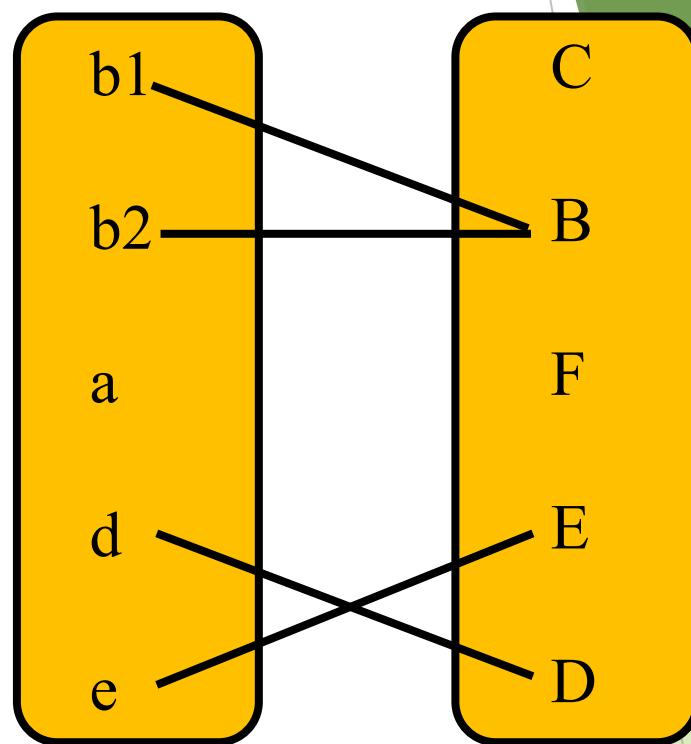


$\text{dom}(f) = ?$   
 $\text{ran}(f) = ?$

# 例題 次の部分写像の定義域と値域は？



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$   
 $\text{ran}(f) = \{A, B, D, E\} \neq V$   
未定義域 =  $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{b1, b2, d, e\} \neq U$   
 $\text{ran}(f) = \{B, D, E\} \neq V$   
未定義域 =  $\{a\}$ <sup>43</sup>

## 7. 部分写像 $f$ と $g$ が等しい

Def. 4

2つの部分写像  $f: A \mapsto B$ ,  $g: C \mapsto D$  が**等しい**とは,

1.  $A = C$  始域が等しい
2.  $B = D$  終域が等しい
3.  $\forall u \in U, f(u) = g(u)$ . 関数の値が等しい

## 8. 恒等写像

Def 5.

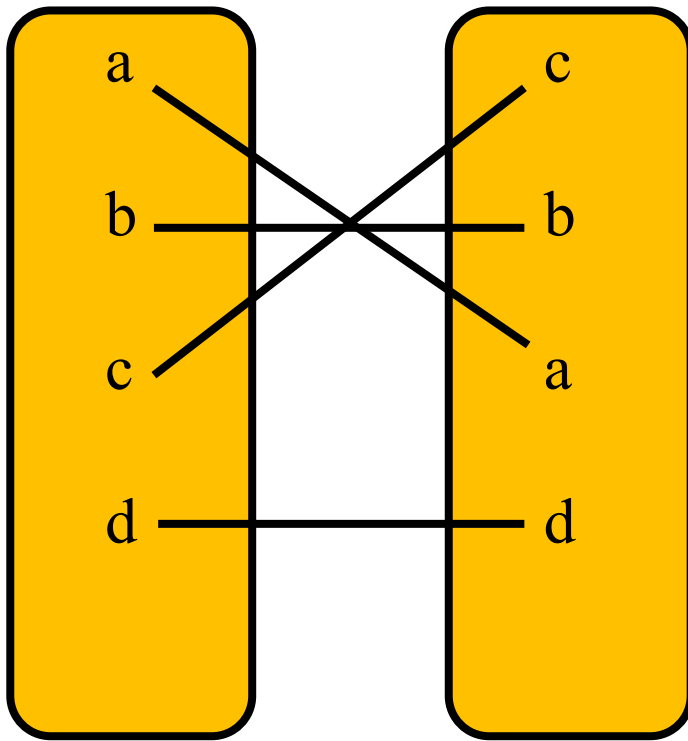
$$f: U \mapsto U; f(x) = x$$

となる写像を恒等写像という。

$$\text{id}_U: U \mapsto U; \text{id}_U(x) = x .$$

と書く。id<sub>U</sub>の $U$ は始集合が $U$ であることを示している。

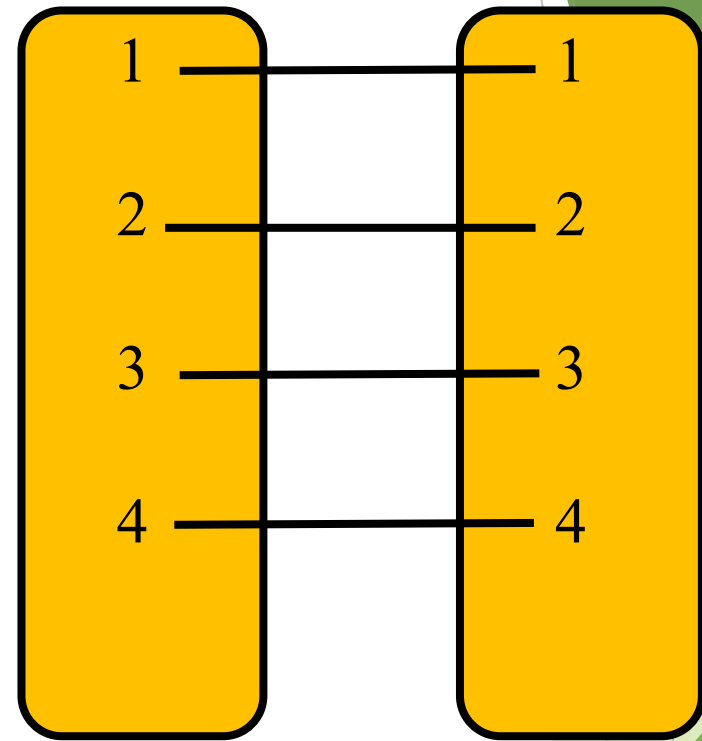
# 恒等写像の例



$$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = U$$

$$\text{ran}(f) = \{a, b, c, d\} = V$$

未定義域 =  $\emptyset$



$$\text{dom}(f) = \{1, 2, 3, 4\} = U$$

$$\text{ran}(f) = \{1, 2, 3, 4\} = V$$

未定義域 =  $\emptyset$

## 9. 単射

Def 6

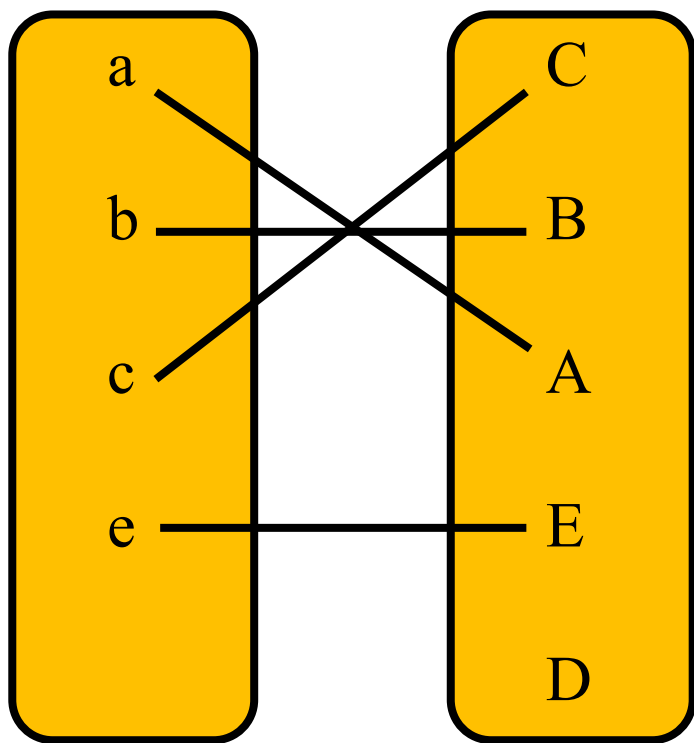
写像  $f: U \mapsto V; f(x)$

$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$  ならば  
 $f(x_1) \neq f(x_2)$

のとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「単射」であるという。

注:  $f$  は部分写像でなく写像であることに注意してほしい。

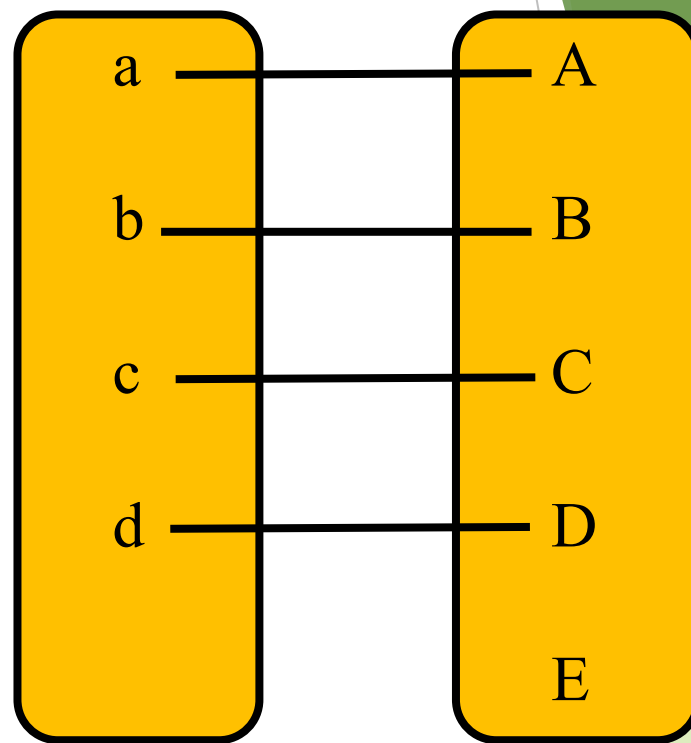
# 単射の例



$$\text{dom}(f) = \{a, b, c, e\} = U$$

$$\text{ran}(f) = \{A, B, C, E\} \neq V$$

未定義域 =  $\emptyset$

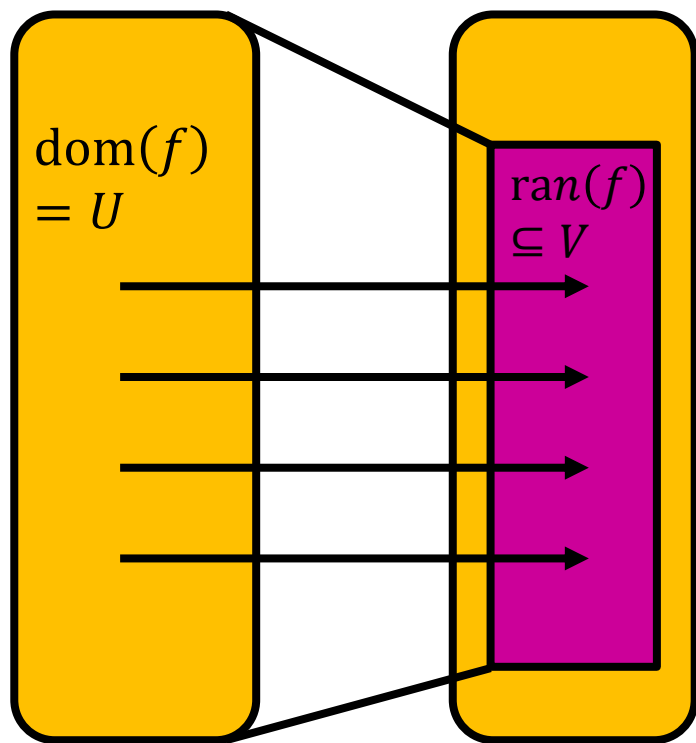


$$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = U$$

$$\text{ran}(f) = \{A, B, C, D\} \neq V$$

未定義域 =  $\emptyset$

# 重要ポイント：単射のイメージ



$$\text{dom}(f) = U$$

$$\text{ran}(f) \subseteq V$$

未定義域 =  $\emptyset$

## 9. 単射の性質

Th 1.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば  $x_1 = x_2$  のとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「単射」である。

を証明せよ。

## 9. 単射の性質

Th 1.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば  $x_1 = x_2$  のとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「単射」である。

[証明]

Def 6の命題の対偶を用いる

## 9. 単射の性質

Th 1.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば  $x_1 = x_2$  のとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「単射」である。

[証明]

Def 6の命題の対偶を用いると,

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$

$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$  ならば

$f(x_1) \neq f(x_2)$  の対偶は Th1. ■

# 例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の

$f: U \mapsto V$  は単射であるか？

(1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない

(2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$

(3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$

(4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の

$f: U \mapsto V$  は単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$      $\times$  : 写像だが 3 と 1 が同じ値に写像
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の

$f: U \mapsto V$  は単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$      $\times$  : 写像だが 3 と 1 が同じ値に写像
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の

$f: U \mapsto V$  は単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$      $\times$  : 写像だが 3 と 1 が同じ値に写像
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (4)  $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$      $\bigcirc$

## 例題 2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 4$$

が単射であることを証明せよ。

## 例題 2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 4$$

が単射であることを証明せよ。

証明

**定義に戻れ**：対偶「 $\forall x_1, \forall x_2 \in U [f(x_1) = f(x_2)$   
ならば  $x_1 = x_2]$ 」のとき、 $f$  は  $U$  から  $V$  への「単射」  
である。」

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$  と仮定する。

$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$  より  $x_1 = x_2$  となる。

従って、 $f$  は  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  への単射である。

### 例題 3 .

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

### 例題 3 .

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

証明

含意型命題の否定→反例の存在型命題の証明

**定義に戻れ** :  $\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$  ならば  $f(x_1) \neq f(x_2)$

異なる二つの実数  $x_1 = 1, x_2 = -1$  を仮定する。

このとき,  $f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$  となり,  $f(x_1) \neq f(x_2)$  は成り立たない。従って,

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でない

## 10. 全射

Def 7. 写像  $f: U \mapsto V; f(x)$

について「 $\text{ran}(f) = V$ 」が成り立つとき、「全射」もしくは「上への写像」という。



「 $V$ のすべての要素はある $U$ の要素の写像の値になっている」

注：  $f$  は部分写像でなく写像であることに注意

## 10. 全射

### 例題 1 .

「 $V$ のすべての要素はある $U$ の要素の写像の値になっている」を量子子を用いて数学的に定義せよ。

### Def 7

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

「??????????」

が成り立つとき,  $f$ は $U$ から $V$ への「全射」であるという。

## 10. 全射

例題 1 .

「 $V$ のすべての要素はある $U$ の要素の写像の値になっている」を量子子を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

「 $\forall y \in V, \text{ ? ? ? ? ? ? ? }$ 」

が成り立つとき,  $f$ は $U$ から $V$ への「全射」であるという。

## 10. 全射

例題 1 .

「 $V$ のすべての要素はある $U$ の要素の写像の値になっている」を量子子を用いて数学的に定義せよ。

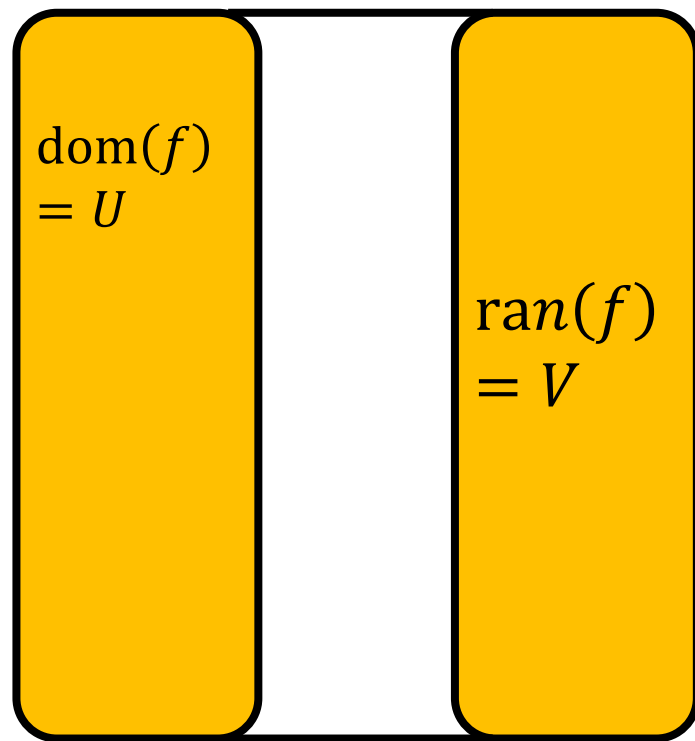
Def 7

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$$

が成り立つとき,  $f$ は $U$ から $V$ への「全射」であるという。

# 重要ポイント：全射のイメージ



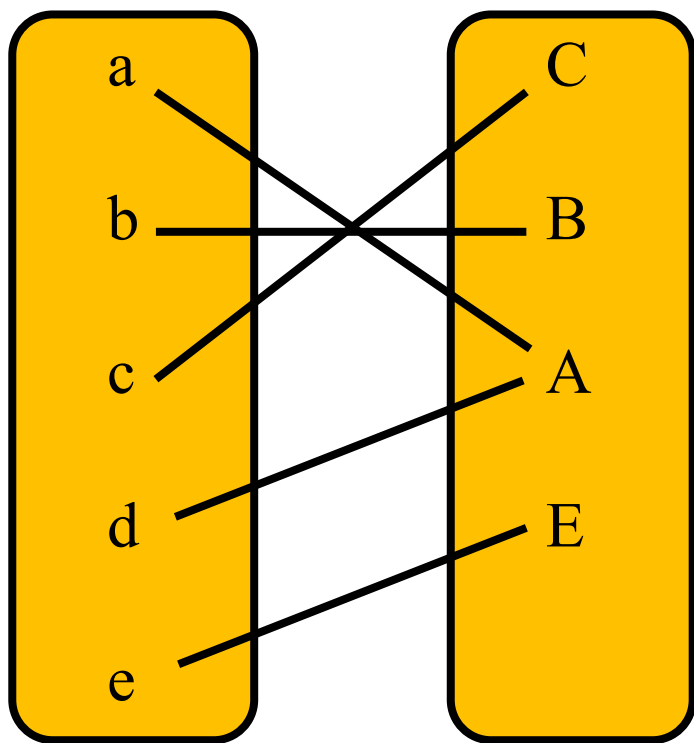
$$\text{dom}(f) = U$$

$$\text{ran}(f) = V$$

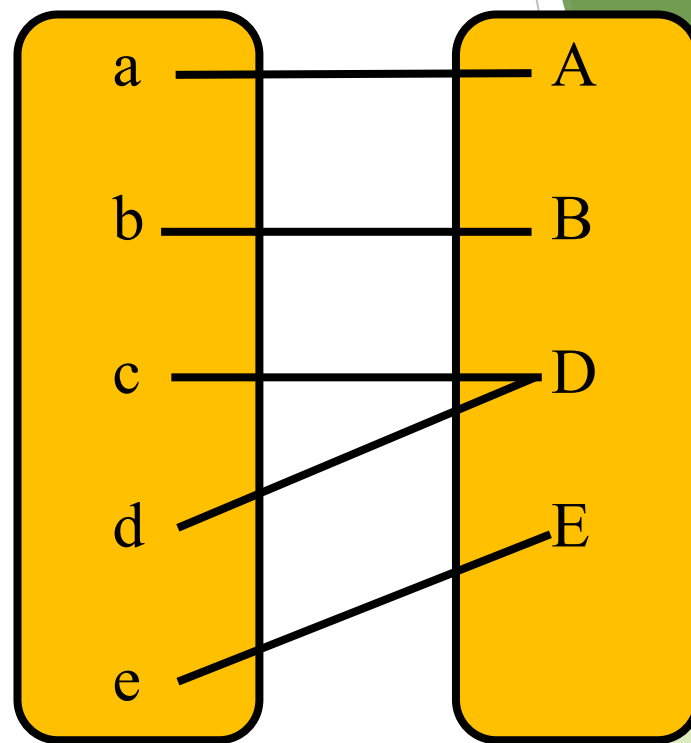
未定義域 =  $\emptyset$

# 全射の例

$\exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$  の  $\exists x$  はひとつとは限らないことに注意！！



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$   
 $\text{ran}(f) = \{A, B, C, E\} = V$   
未定義域 =  $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$   
 $\text{ran}(f) = \{A, B, D, E\} = V$   
未定義域 =  $\emptyset$

# 注意

再掲

Def 3

集合 $U$ の各要素に，それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。



写像の必要条件

$$\text{dom}(f) = U$$

未定義域 =  $\emptyset$

集合 $U$ の各要素に，それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応

# 例題1

$U = \{1,2,3,4\}, V = \{a, b, c\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$
- (2)  $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{a, b, c\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

# 例題1

$U = \{1,2,3,4\}, V = \{a, b, c\}$  とする。次の

$f: U \mapsto V$  は全射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$  とする。次の  $f: U \rightarrow V$  は全射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$  とする。次の

$f: U \rightarrow V$  は全射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$      $\times$  : そもそも写像でない
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$      $\bigcirc$

## 例題 2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$$

が全射であることを証明せよ。

## 例題 2 .

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$$

が全射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ : Def 7

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$$\forall y \in V, \exists x \in U, f(x) = y$$

が成り立つとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「全射」

全称命題では  $\forall$  をとる !!

存在命題では、

$y \in \mathbb{R}$  について  $f(x) = y$  となる  $x$  を見つける !!

## 例題 2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$$

が全射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ : Def 7

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$$

が成り立つとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「全射」

$y \in \mathbb{R}$  について  $x = \frac{y-1}{2}$  が存在する。

$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$  より,  $\forall y \in \mathbb{R}$  について

$$\exists x, f(x) = 2 \left( \frac{y-1}{2} \right) + 1 = y$$

従って,  $f$  は  $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  への全射である。

## 例題 3 .

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は全射でないことを証明せよ。

## 例題 3 .

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は全射でないことを証明せよ。

証明

定義に戻れ : Def 7

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について

$\forall y \in V, \exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$  が成り立つとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への「全射」

全称命題の否定  $\rightarrow$  反例の存在の証明

$y = f(x)$  とすると  $y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$  より,  $y = -1$  に対して  $f(x) = -1$  となる実数  $x$  が存在しない。従って,

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$  は全射でない

# 11. 全単射

Def. 8

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  が単射かつ全射であるとき,  $f$  は  $U$  から  $V$  への全単射という。

# 注意

再掲

Def 3

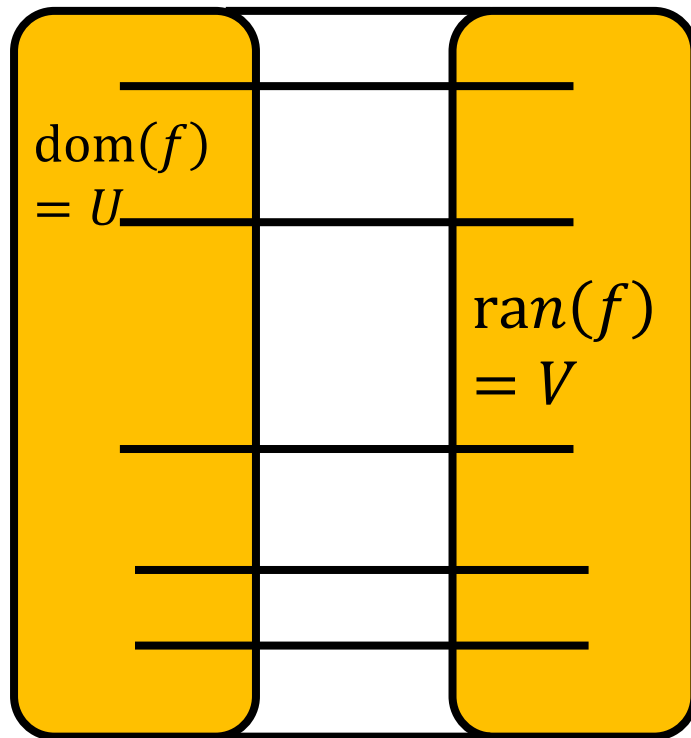
集合 $U$ の各要素に, それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応している関係を $U$ から $V$ への写像という。



全単射の必要条件

- ▶  $\text{dom}(f) = U$
- ▶  $\text{ran}(f) = V$
- ▶ 未定義域 =  $\emptyset$
- ▶ 集合 $U$ の各要素に, それぞれ集合 $V$ の要素がただ一つ対応

# 重要ポイント：全単射のイメージ

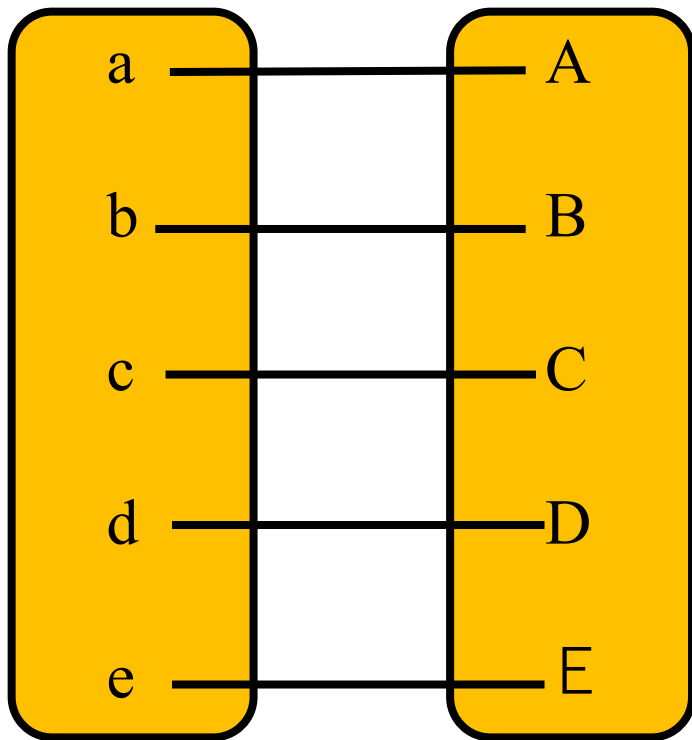


$$\text{dom}(f) = U$$

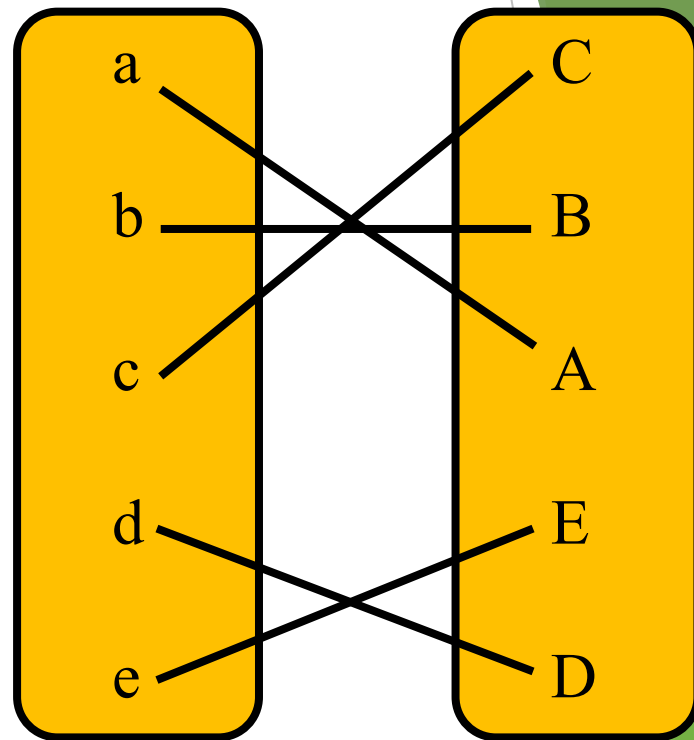
$$\text{ran}(f) = V$$

未定義域 =  $\emptyset$

# 全単射の例



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$   
 $\text{ran}(f) = \{A, B, C, D, E\} = V$   
未定義域 =  $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$   
 $\text{ran}(f) = \{A, B, C, D, E\} = V$   
未定義域 =  $\emptyset$

## 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$
- (2)  $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

# 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

## 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$   $\times$  : そもそも写像でない
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

## 例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V = \{a, b, c, d\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は全単射であるか？

- (1)  $\{(2, c), (3, d)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (2)  $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$      $\times$     : そもそも写像でない
- (3)  $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$   $\times$  : そもそも写像でない
- (4)  $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$      $\bigcirc$

## 例題 2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$$

が全単射であることを証明せよ。

## 例題 2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$$

が全単射であることを証明せよ。

証明 **単射と全射それぞれを証明**

**単射**  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_1) = f(x_2)$ と仮定する。  $x_1^5 + 1 = x_2^5 + 1$ のとき  $x_1 = x_2$  となる。従って,  $f$ は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への単射である。

**全射**  $y \in \mathbb{R}$ について  $x = \sqrt[5]{y-1} \in \mathbb{R}$ が存在する。

$y \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ より,  $\forall y \in \mathbb{R}$ について  $\exists x$ ,  $f(x) = \sqrt[5]{y-1}^5 + 1 = y$ .  
従って,  $f$ は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への全射である。

$f$ は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への単射かつ全射であるので全単射である。 ■

## 例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

## 例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

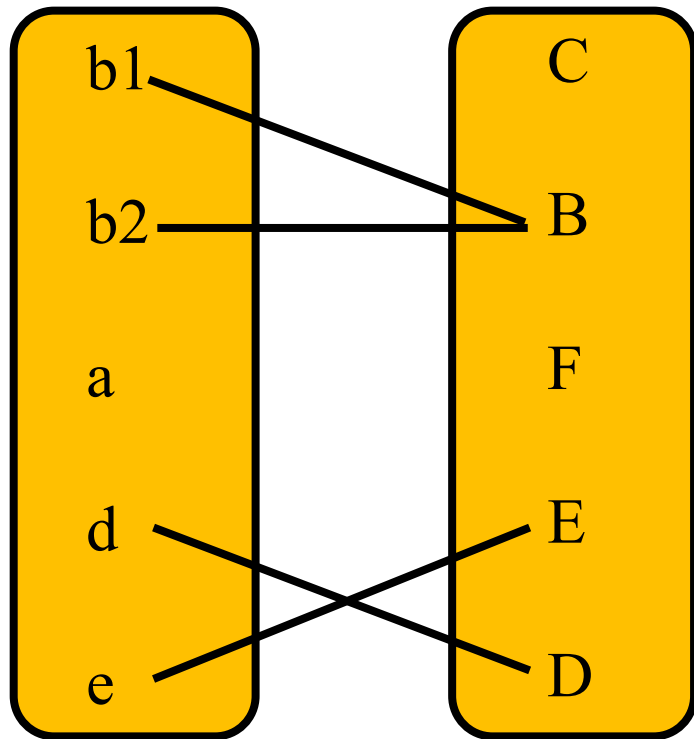
証明

全称命題の否定→反例の存在の証明 単射でも全射でもない  
のでどちらかを示せば十分。

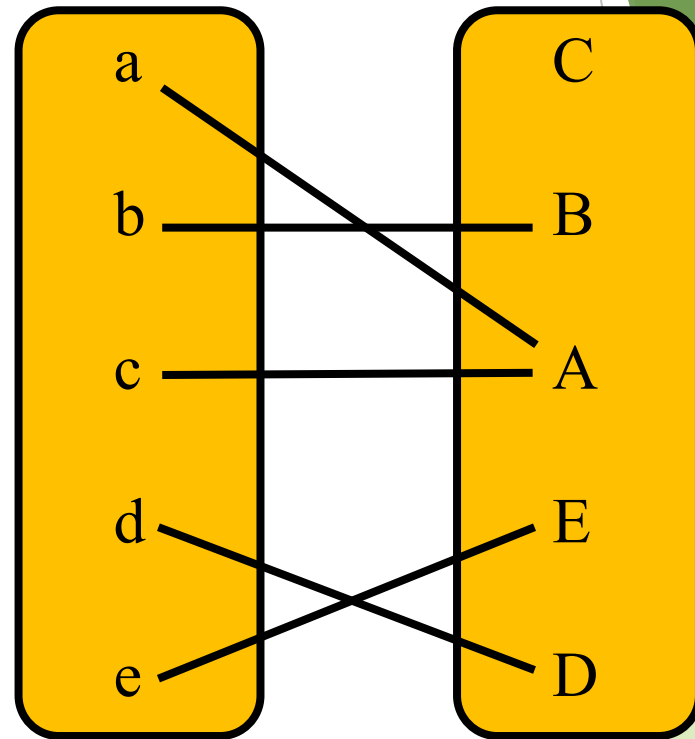
**単射**  $x_1 = -1, x_2 = 1$  のとき  $x_1^4 = x_2^4$  となり、定義に矛盾する。  
従って  $f$  は単射ではない。

**全射**  $y = f(x)$  とすると  $y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$  より,  $y = -1$  に対して  
 $f(x) = -1$  となる実数  $x$  が存在しない。従って,  
 $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$  は全射でない

まとめの問題 以下はどのような写像か？

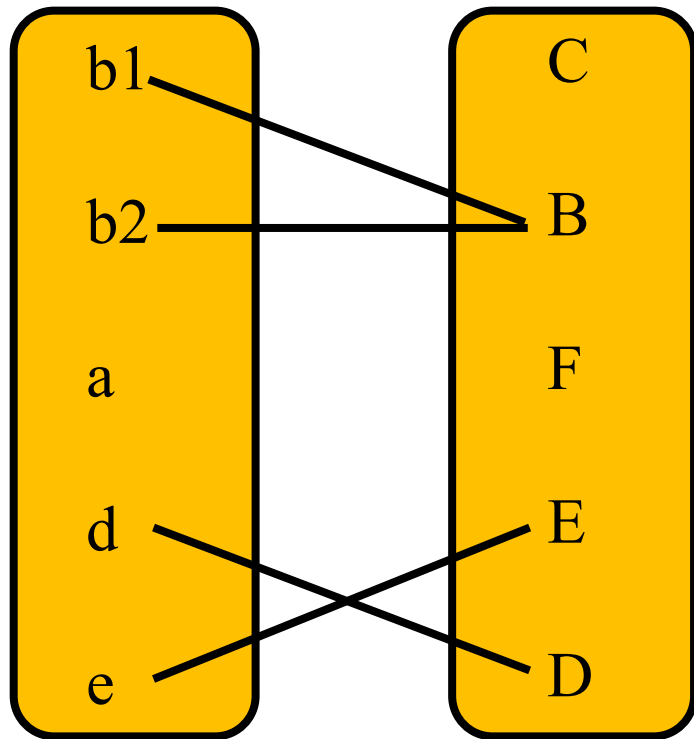


? ? ? ? ?

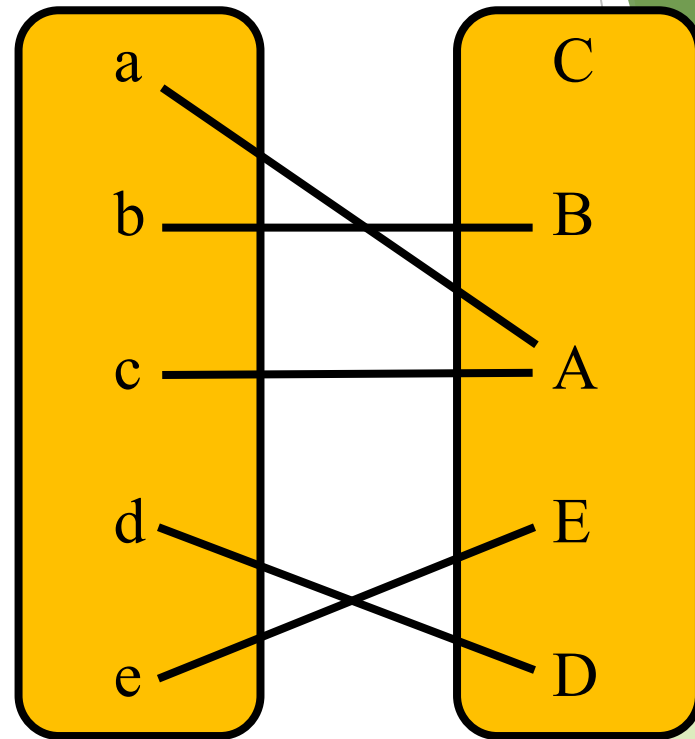


? ? ? ? ?

まとめの問題 以下はどのような写像か？



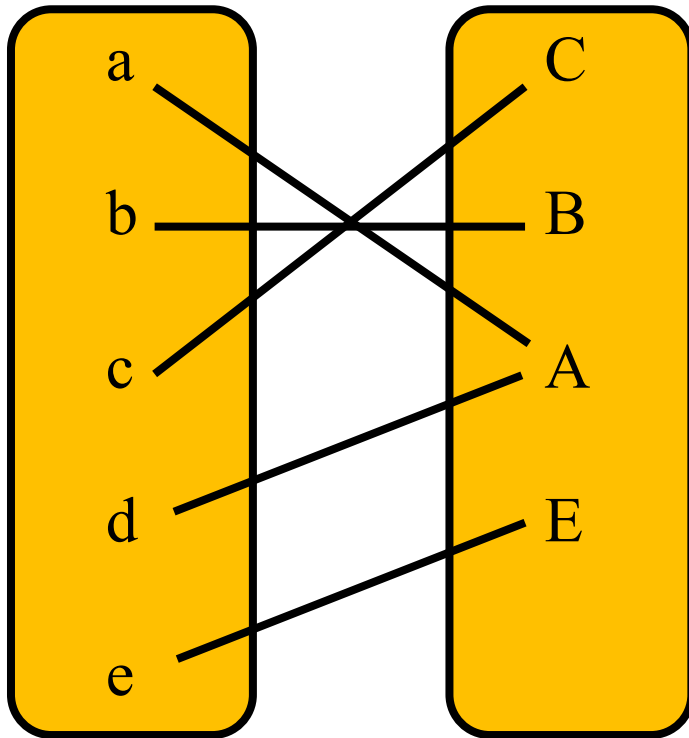
部分写像



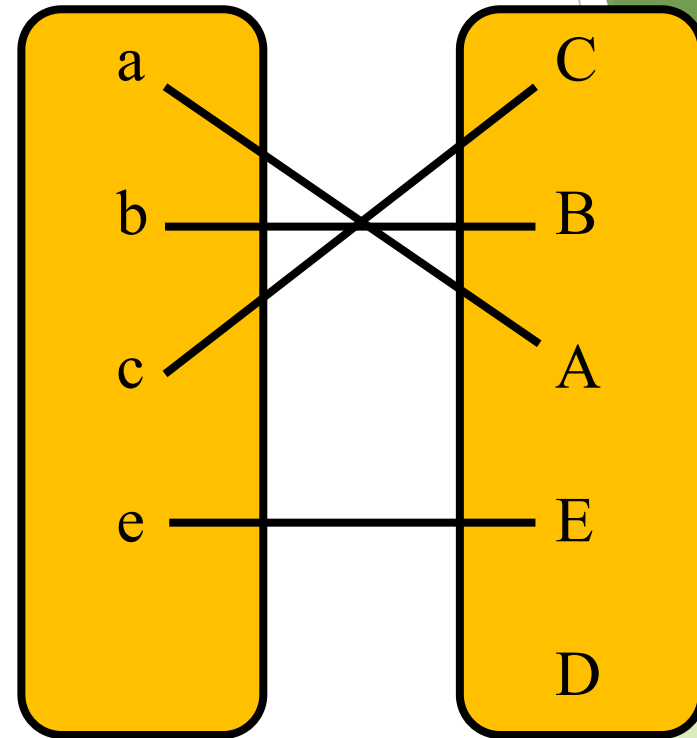
写像 $\subseteq$ 部分写像

まとめの問題  
うな写像か？

以下はどのよ



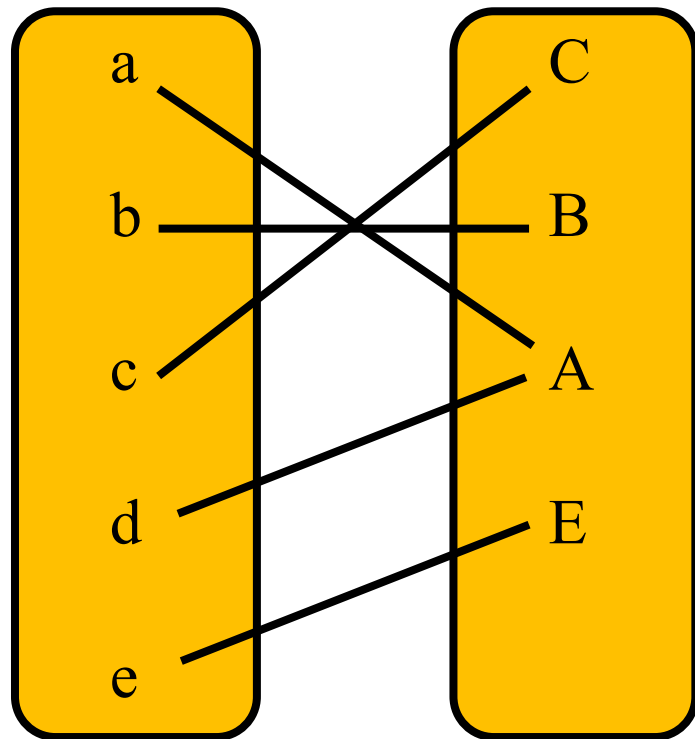
? ? ? ? ?



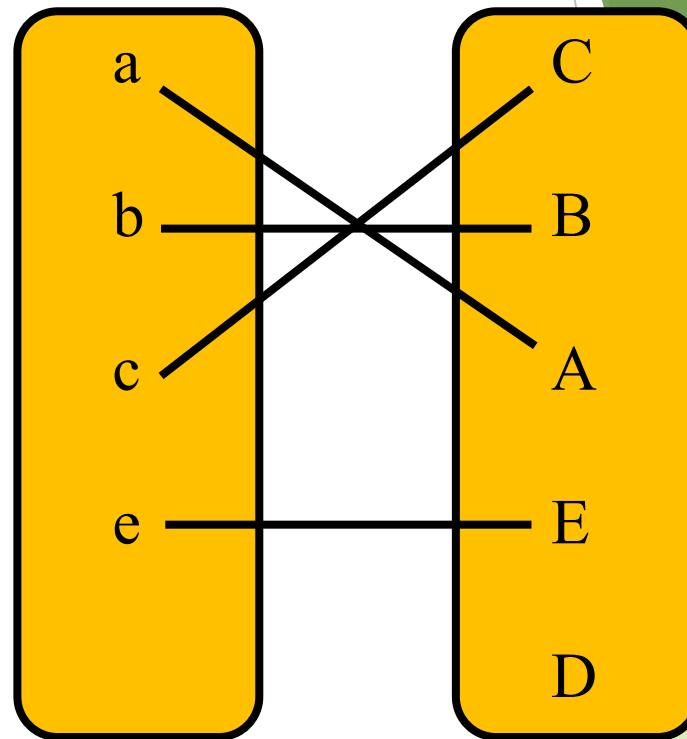
? ? ? ? ?

まとめの問題  
うな写像か？

以下はどのよ

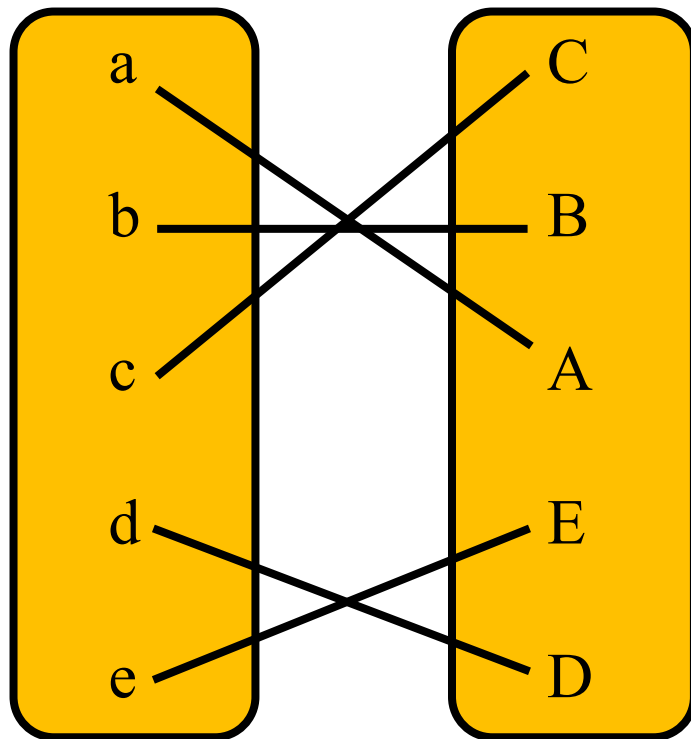


全射 $\subseteq$ 写像 $\subseteq$ 部分写像



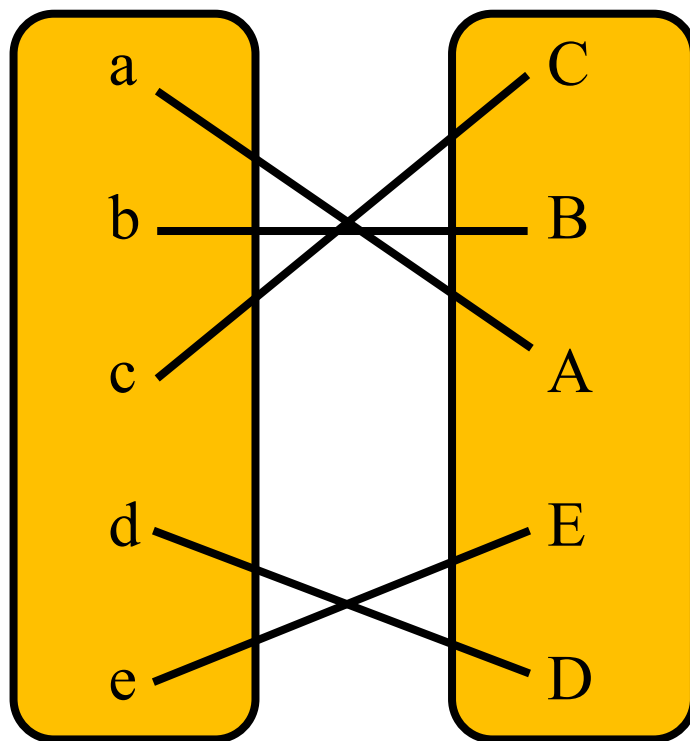
単射 $\subseteq$ 写像 $\subseteq$ 部分写像

# まとめの問題 以下はどのような写像か？



? ? ? ? ?

# まとめの問題 以下はどのような写像か？



全単射 $\subseteq$  (全射または $\subseteq$ 単射) $\subseteq$ 写像 $\subseteq$ 部分写像

# まとめ

- ① 関係の紹介
- ② 関数の中の関数、写像
- ③ 部分写像と写像
- ④ 単射と全射、全単射

# 演習問題

# 問題1

$U = \{1,2,3,4\}, V = \{1,2,3,4\}$  とする。次の  $f: U \mapsto V$  は部分写像、写像、単射、全射、全単射、恒等写像のどれであるか？複数回答可。

- (1)  $\{(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)\}$
- (2)  $\{(2,1), (3,2)\}$
- (3)  $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
- (4)  $\{(2,1), (3,2), (2,4)\}$

## 問題2

- ▶(1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ について, 単射であるが全射でない写像の具体例を示せ.
- ▶(2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ について, 全射であるが単射でない写像の具体例を示せ.
- ▶(3)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ について, 単射であるが全射でない写像の具体例を示せ.
- ▶(4)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ について, 全射であるが単射でない写像の具体例を示せ.

## 問題3

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = x^2(2x - 3)$   
は全射であることを証明せよ。

## 問題4

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = x^3$$

は単射であることを証明せよ。

## 問題5

$a \in \mathbb{R}$ とする.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 0) \\ x + a & (x > 0) \end{cases}$$

が単射かどうか, 全射かどうかを判定し, それぞれ証明せよ.