6.　直積と冪集合

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

第１回　10月 6日：第1回 命題と証明
第２回　10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月20日：第3回 命題論理
第４回　10月27日：第4回 述語論理
第５回　11月　3日：第5回 述語と集合
第６回　11月10日：第6回 直積と冪集合
第７回　11月17日：第7回 様々な証明法 (1)
第８回　11月24日：第8回 様々な証明法 (2)
第９回　12月 1日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月8日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月15日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　12月22日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、
グラフによる表現
第１３回　1月5日：第13回 同値関係
第１４回　1月19日：第14回 順序関係：半順序集合、
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　1月26日：第15回 期末試験

１．本日の目標

1. 直積
2. 集合の冪集合
3. 集合系の演算
4. ラッセルのパラドックス

2.　先週の復習：

内包的記法での条件部での量化子

1. $\{x|\forall n(P(x))\}$は　すべてのnについて条件$P(x)$を満たす共通集合$\bigcap_n \{x|P(x)\}$という意味
2. 内包的記述での$\{x|\exists n(P(x))\}$は　すべてのnについて条件(述語)　$P(x)$を満たす和集合$\bigcup_n \{x|P(x)\}$という意味

2.　先週の復習：

例題

1. $\{x \in \mathbb{N} | \forall n \in \mathbb{N} (x > n)\}$

2. $\{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N} (x > n)\}$

2.　先週の復習：

解答

1.　$\{x \in \mathbb{N} | \forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$

$=\bigcap_{n \in \mathbb{N}}\{x \in \mathbb{N} | x > n\} = \emptyset$

2. $\{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$

$=\bigcup_{n \in \mathbb{N}}\{x \in \mathbb{N} | x > n\} = \{x \in \mathbb{N} | x > 0\} = \mathbb{N}^+$

3. 直積

Def.1.　集合の要素xと要素yを順序を考慮して組にしたものをxとyの「順序対」といい，記号で(x, y)と書く。

Def.2. $x = a, y = \mathrm{b}$のときのみ(x, y)と(a, b)が等しいという。

Def. 3. 集合U, Vに対して，Uの要素とVの要素から作られる順序対の全体$\{(x, y) | x \in U, y \in V\}$を$U$と$V$の直積といい，$U \times V$で表す。

注意

$U=\emptyset$または$V=\emptyset$のとき

$U\times V=U\times\emptyset=\emptyset\times V$

$=\emptyset\times\emptyset=\emptyset$

例題 1

$A=\{1,2\}, B=\{3,4\}$　とすると,
$A\times B$は？

例題 1

$A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$　とすると,
$A \times B$は？

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

例題2

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$は，自然数の順序対の全体を示す。

$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x \times y = 2\}$
の要素は？

例題2

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$は，自然数の順序対の全体を示す。

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x \times y = 2\}$$

の要素は？

$$A = \{(1,2), (2,1)\}$$

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$を証明せよ。

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$を証明せよ。

復習

分配律など基本的な集合演算の証明には命題論理を用いればよい。分配律の命題論理は真理値表で証明できるので集合の分配律の基底をなすものである。命題論理が数学の基底である。

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$を証明せよ。

[証明]

$\forall (x, y)[(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)]$を示せばよい。

$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge [y \in B \vee y \in C] \Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \vee [x \in A \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B)] \vee [(x, y) \in (A \times C)] \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ ■

例題4

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

を証明せよ。

例題4

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ を証明せよ。

[証明]

$\forall (x,y)\ [(x,y) \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in\ (A \times B) \cap (A \times C)]$ を示せばよい。

$(x,y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \land y \in (B \cap C)$
$\Leftrightarrow x \in A \land [y \in B \land y \in C]$

$\Leftrightarrow [x \in A \land y \in B] \land [x \in A \land y \in C]$

$\Leftrightarrow [(x,y) \in (A \times B)] \land [(x,y) \in (A \times C)] \Leftrightarrow$
$(x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

4．関係　（本授業の後半で詳しく学習します。）

Def 4.

二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合RをUからVへの「関係」という．また，

$R \ni (a, b)$のとき

aRb ：aとbは関係ある

$R \not\ni (a, b)$のとき

$a\not R b$ ：aとbは関係なし

と書く.

関係の例

$$A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$$
$$A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

このとき，$R = \{(1,4),(2,4)\}$

もしくは　$1R4,\ 2R4$

は，１が４と関係がある、2が4と関係がある、ということを表現している。

「関係」の特殊なケースが　写像や関数、グラフ理論である。（１０章以降で学びます）

例1.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$は，実数の順序対の全体を示す。

$(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$は、座標軸平面上の点。

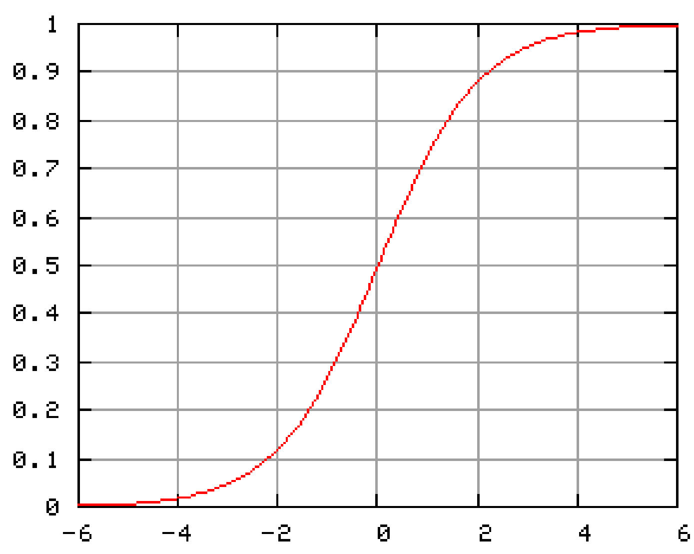
例2.

$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への関数fに対し，

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = f(x)\}$$

は，「関数f　のグラフ」を示す。

例 $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \frac{1}{1+\exp(-x+a)}\}$



5．幂集合

Def. 4．Uの部分集合の集まりをUの幂（べき）集合(power)といい,

2^U　または　$\mathcal{F}\ (U)$で表す。

例

$U = \{a, b, c\}$とすると,

2^U

$= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Th 1

集合Aについて$n(A) = N$のとき,
Aの冪集合2^A　について

$n\left(2^A\right) = 2^N.$

Th 1

集合Aについて$n(A)=N$のとき， Aの冪集合2^A　について$n(2^A)=2^N$.

[証明]

$A=\{1,2,3,\cdots,N\}$としても一般性を失わない。このとき， Aの部分集合の取り方は, 1を含むかどうか、2を含むかどうか、3を含むかどうか、 $\cdots$ Nを含むかどうかで決まるので，それぞれ二通りの場合の数がN個あり,その総数は2^N. ■

6. 集合系

Def. 5. N個のUの部分集合$A_1 \cdots A_N$ が与えられているとき，$A = \{A_1 \cdots A_N\} = \{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$ を**集合系** と呼ぶ。集合族と呼ばれることもある。

Th. 2.

普遍集合Uの冪集合　2^Uの部分集合の集合

$$\{A | A \subseteq 2^U\}$$

は**集合系**である。

注意：集合系と集合族

$A=\{A_1\cdots A_N\}=\{A_i\}(i=1,\cdots,N)$ のようにインデックスがついている場合と冪集合2^U　の部分集合としてのみ扱われる場合で、集合系と集合族を区別することがある。

しかし、どちらの場合をどう呼ぶかが様々に異なり決まっていない。

ここでは、同じとして扱う。

7. 集合系 の演算

Def. 6. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，条件$\forall i(x \in A_i)$を満たす$x$全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の共通部分」といい，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$と書く。すなわち，

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$のとき， $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

7. 集合系 の演算

Def. 6. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，条件$\forall i(x \in A_i)$を満たす$x$全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の共通部分」といい，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ と書く。すなわち，

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | \forall i (x \in A_i)\}$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$のとき，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

7. 集合系 の演算

Def. 7. 集合系$\{A_i\}(i=1,\cdots,N)$について，条件$\exists i(x\in A_i)$を満たすx全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i=1,\cdots,N)$の和集合」といい，$\bigcup_{i=1}^{N} A_i$と書く。

すなわち，

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i$$

ただし，左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$のとき，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

7. 集合系 の演算

Def. 7. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，
条件$\exists i(x \in A_i)$を満たすx全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の和集合」といい，
$\bigcup_{i=1}^{N} A_i$と書く。

すなわち，

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = \{x \mid \exists i(x \in A_i)\}$$

ただし，左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$のとき，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

7. 集合系 の演算

$I=\{1,\cdots,N\}$もしくは$I=\mathbb{N}$のときを統一的に

共通部分を

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

和集合を

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

と書く。

例題1

$n \in \mathbb{N}$に対し，集合B_nを$B_n = \{x \in \mathbb{R} | x \geq n\}$　とし，集合系$\{\mathrm{B}_n\}(n \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合はどのようになるか？

例題1

解答

ℕの要素nに対し，集合B_nを$B_n = \{x \in \mathbb{R} | x \geq n\}$　とし，集合系$\{\mathrm{B}_n\}(n \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は どのようになるか？

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x | \forall n [x \geq n]\} = \emptyset,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{x | \exists n [x \geq n]\} = \{x | x \geq 0\}$$

例題2

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

例題2

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| \forall n \left[x < \frac{1}{n}\right]\right\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \exists n \left[x < \frac{1}{n}\right]\}$$

例題2

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| \forall n \left[x < \frac{1}{n}\right]\right\} = \{x | x \leq 0\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x | \exists n \left[x < \frac{1}{n}\right]\right\} = \{x | x < 1\}$$

例題3

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを
$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| < \frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

例題3

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| < \frac{1}{n}\right\}$　とし，

集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| \forall n \left[|x| < \frac{1}{n}\right]\right\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \exists n \left[|x| < \frac{1}{n}\right]\}$$

例題3

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| < \frac{1}{n}\right\}$

とし，

集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| \forall n \left[|x| < \frac{1}{n}\right]\right\} = \left\{x \middle| \left[|x| < \frac{1}{\infty}\right]\right\} = \{0\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| \exists n \left[|x| < \frac{1}{n}\right]\right\}$$

$$= \left\{x \middle| |x| < \frac{1}{1}\right\} = \{x | -1 < x < 1\}$$

分配律

集合Aと集合系$\{\mathrm{B}_n\}(n \in \mathbb{N}), I \subseteq \mathbb{N}$について以下が成り立つ。

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

ド・モルガンの法則

普遍集合をUとする集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N}), I \subseteq \mathbb{N}$について以下が成り立つ。

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} {A_i}^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} {A_i}^c$$

集合の集合の問題

我々は　本日、集合の集合について考えてきた。しかし、集合の集合を数学的に体系づけるときに重要な問題が発見されている。

8. ラッセルのパラドックス

ラッセルは集合の集合は次の二つのものしかないと考えた。

Ａ：自分自身を要素とする集合の集合
Ｂ：自分自身を要素としない集合の集合

ラッセルは集合は次の二つのものしかないと考えた。

集合Ａ：自分自身を要素とする集合の集合
集合Ｂ：自分自身を要素としない集合の集合

Ａの例：要素の個数が無限の集合の集合→要素の個数が無限の集合は無限に存在するのでそれ自身もＡに属する。

Bの例：遊びの集合の集合を考える。遊びの集合は遊びではないので自分自身を要素としない集合の集合Ｂに入る。

8. ラッセルのパラドックス

自分自身を含まない集合全体の集合

$R=\{x|x\notin x\}$は存在しない。

8. ラッセルのパラドックス

自分自身を含まない集合全体の集合$R = \{x|x \notin x\}$は存在しない。

証明

１．$R \in R$の場合
$R = \{x|x \notin x\}$より，$R \notin R$となり矛盾

２．$R \notin R$の場合
$R = \{x|x \notin x\}$より，$R \in R$となり矛盾

例：すべての集合を含む集合
集合論で，Rが集合の定義としては許容されないような体系が構築されてきた。

8．ラッセルのパラドックス

床屋の深刻な問題

以下のようなルールを課せられた町に一人だけ存在する床屋がいる。

・自分でひげをそらない町の人全員のひげをそる。

・自分でひげをそる町の人のひげはそらない。

8. ラッセルのパラドックス
床屋の深刻な問題

以下のようなルールを課せられた町に一人だけ存在する床屋がいる。
・自分でひげをそらない町の人全員のひげをそる。
・自分でひげをそる町の人のひげはそらない。

このとき、床屋のひげは誰がそるのか？

9. ラッセルのパラドックスからヒルベルト・プログラム

論理・集合論は数学の基底であり矛盾があるとすべてがひっくり変える。

集合論の公理系を整備して、形式的体系と呼ばれる体系を構築し、 以下の２つの目標を設定

- 全ての命題を証明あるいは反証できると証明(完全性)
- どれだけ推論しても決して矛盾が導かれないと証明 (無矛盾性)

１０．ラッセルのパラドックスからヒルベルト・プログラム

論理・集合論は数学の基底であり矛盾があるとすべてがひっくり変える。

集合論の公理系を整備して、形式的体系と呼ばれる体系を構築し、 以下の２つの目標を設定

- 全ての命題を証明あるいは反証できると証明(完全性)
- どれだけ推論しても決して矛盾が導かれないと証明 (無矛盾性)

１０．ゲーデルの不完全定理

- 健全性：証明できる命題は正しい
- 完全性：その命題が証明できるなら、証明できることも証明できる

１０．ゲーデルの不完全定理

- 健全性：証明できる命題は正しい

命題q　：qは証明できない

命題qは証明できるか？

命題qが真であると証明できない。

１０．ゲーデルの不完全定理

- 健全性：証明できる命題は正しい

命題q　：qは証明できない

命題qは証明できるか？

命題qが真であると証明できない.

背理法により命題qが偽であると仮定すると「qは真であることが証明できる」が証明できることになるがqは偽である仮定に矛盾。

１０．ゲーデルの不完全定理

第一不完全性定理：ある条件を満たす自然数論は、どんなに工夫してもその中に証明も反証もできない論理式が存在する。

第二不完全性定理：第一不完全性定理の条件に加えて、 数学的帰納法が扱える自然数論では、 自分自身が無矛盾であることは証明できない。

注意：ある条件が重要で完全な定理が世の中にないことを証明しているわけではない。

１1. ラッセルのパラドックス解決法

$\mathrm{A} = \{x | x \in x\}$　も　$\mathrm{B} = \{x | x \notin x\}$も
集合ではないと考える。

→

自分自身が要素となる概念を使って集合を定義してはならない

→

集合理論：ZFC公理系

8. ラッセルのパラドックス　解決法:ZFC公理系

以下の公理を条件とする

内包性の公理（comprehension scheme）、**分出の公理**（separation scheme）： ϕを $\mathrm{x}, \mathrm{z}, w_1, \cdots, w_n$を自由変数にもつ述語として、

$\forall \mathrm{z} \forall w_1, \cdots, w_n \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in z \wedge \phi)$

つまり　$y \equiv \{x \in z | \phi\}$

8. ラッセルのパラドックス 解決法:ZFC公理系

例えば　仮にϕが自分自身yの述語であると仮定しよう。

$$\forall z \forall w_1, \cdots, w_n \exists y \forall x \left(x \in y \Leftrightarrow x \in z \land \phi(y) \right)$$

ここで$x \in z \land \phi(y) \implies \emptyset$

となる.

実際には$\phi(x)$はyに依存してはいけないのでこれは起こらない.

１０．まとめ

1. 直積
2. 集合の冪集合
3. 集合系の演算
4. ラッセルのパラドックス

演習問題

問題1

$U = \{1,2,3,4,5,6\}, V = \{4,5,6,7,8,9\}$とし，
それぞれの部分集合を$S = \{n \in U | n \leq 2\}$,
$T = \{n \in V | n > 7\}$とする。 直積$U \times V$を普遍集合とし，次に示す集合を外延的記法で表せ。

1. $\{(x, y) \,|2x > y + 6\}$
2. $\{(x, y) \,|x + y = 5\}$
3. $\{1,3\} \times T$
4. $(S \times T)^c$
5. $S^c \times T^c$

問題2

$U = \{1,3,5,7\}$の冪集合$\mathcal{F}(U)$を外延的記法で示せ。

問題3

次の集合系について，共通部分と和集合を求めよ。

(1) $\langle A_n | n \in \mathbb{N}^+ \rangle$ $A_n = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq \log n\}$

(2) $\langle B_n | n \in \mathbb{N}^+ \rangle$ $B_n = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq \frac{1}{n} and\ x < \frac{2}{n}\right\}$

(3) $\langle C_n | n \in \mathbb{N}^+ \rangle$ $C_n = \{x \in \mathbb{R} | x = 2^n\}$

(4) $\langle D_n | n \in \mathbb{N}^+ \rangle$

$$D_n = \left\{x \in \mathbb{R} |\ x \geq \sin(n\pi)\ and\ x < \sin\big((n+1)\pi\big)\right\}$$