

## 2. 集合の基礎と全称記号・存在記号

---

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学プログラム

# 本授業の構成

- 第1回 10月6日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月13日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月20日：第3回 命題論理
- 第4回 10月27日：第4回 述語論理
- 第5回 11月3日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月10日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月17日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 11月24日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月1日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月8日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月15日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 12月22日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、  
グラフによる表現
- 第13回 1月5日：第13回 同値関係
- 第14回 1月19日：第14回 順序関係：半順序集合、  
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 1月26日：第15回 期末試験

# 1. 本日の目標

---

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が正しく使える
2. 全称記号 $\forall$ , 存在記号 $\exists$ が使える
3. 部分集合と包含関係を理解する
4. 集合の演算（和、積、補、差、素, 要素数）

## 2. 重要な集合

---

$\emptyset$  :

$\mathbb{N}$  :

$\mathbb{N}^+$  :

$\mathbb{Z}$  :

$\mathbb{Q}$  :

$\mathbb{R}$  :

$\mathbb{C}$  :

## 2. 重要な集合

---

$\emptyset$  : 空集合 (empty set)

(ギリシャ語φとは違う)

$\mathbb{N}$  : 自然数集合 (0を含む)

$\mathbb{N}^+$  : 自然数集合 (1以上)

$\mathbb{Z}$  : 整数集合

$\mathbb{Q}$  : 有理数集合

$\mathbb{R}$  : 実数集合

$\mathbb{C}$  : 複素数集合

要素数が有限の集合を有限集合 (finite set), 要素数が無限の集合を無限集合 (infinite set) と呼ぶ

# 普遍集合

---

Def

議論の対象とする全体集合

例

普遍集合を  $\mathbb{N}$  とする

⇒

自然数全体を全体集合とする

### 3. 集合の「要素」の記法

---

ある対象 $a$ が集合 $A$ の要素であるとき

$$a \in A$$

と書く。

# 3. 集合の「要素」の記法

---

ある対象 $a$ が集合 $A$ の要素であるとき  $a \in A$  と書く。

外延的記法：

内包的記法：

### 3. 集合の「要素」の記法

---

ある対象 $a$ が集合 $A$ の要素であるとき

$a \in A$  と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$  (有限集合)

$A = \{1,3,5,7 \dots\}$  (無限集合)

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

# 3. 集合の「要素」の記法

---

ある対象 $a$ が集合 $A$ の要素であるとき

$a \in A$  と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$  (有限集合)

$A = \{1,3,5,7 \dots\}$  (無限集合)

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

( $n$  (かつ) を示す場合にはカンマで区切る)

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n \text{は奇数}\}$$

# 例

---

$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を外延的記法で表せ。

# 例

---

$A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を外延的記法で表せ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

# 例

---

$A = \{2,4\}$ を先の例の内包的記法  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$  に条件を足して表せ。

# 例

---

$A = \{2, 4\}$ を先の例の内包的記法  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$  に条件を足して表せ。

## 回答

$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n \text{ は偶数}\}$

## 4. 全称記号

---

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

## 4. 全称記号

---

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」



「任意の自然数 $n$ について,  $n \geq 0$ が成り立つ」

# 4. 全称記号

---

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」



「任意の自然数 $n$ について,  $n \geq 0$ が成り立つ」



「 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ 」

$\forall$  : 意味 : すべての(all, any) 読み方: “for all”

日本語訳 :

「 $\mathbb{N}$ に属するすべての $n$ について,  $n \geq 0$ が成り立つ」

# 例

---

「すべての実数 $x$ について、 $x^2 \geq 0$ 」  
を全称記号を用いて表せ.

# 例

---

「すべての実数 $x$ について、 $x^2 \geq 0$ 」  
を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

# 5. 存在記号

---

命題

「実数 $x$ について $x^2 + 7x < 0$  となる場合がある」

# 5. 存在記号

---

命題

「実数 $x$ について $x^2 + 7x < 0$  となる場合がある」



「 $x^2 + 7x < 0$  となる実数 $x$ が存在する」

# 5. 存在記号

---

## 命題

「実数 $x$ について $x^2 + 7x < 0$  となる場合がある」



「 $x^2 + 7x < 0$  となる実数 $x$ が存在する」



「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 7x < 0$ 」

$\exists$  : 意味 : 存在する(Exist) 読み方: “there exists”

# 例

---

「実数 $x$ について $x^2 > 0, x < 0$ となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

# 例

---

「実数 $x$ について $x^2 > 0, x < 0$ となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

# 6. 部分集合

---

Def (定義: Definitionのこと)

対象としているものの全体を普遍集合 (全体集合) と呼び、 $U$ と書く。また、要素を一つも持たない集合を空集合といい、 $\emptyset$ で表す。

Def

集合 $A$ の要素が集合 $B$ の要素でもあるとき、 $A$ は $B$ の部分集合であるといい、

$$A \subseteq B \text{ または } B \supseteq A$$

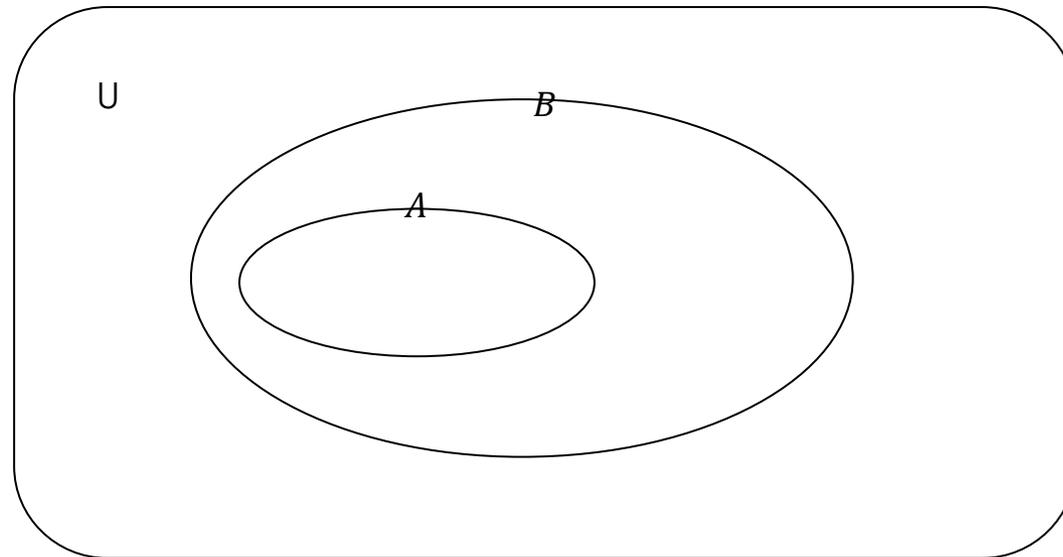
で表す。

## 部分集合の数学的表現

Def  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

$\rightarrow$ は「ならば」という意味、

$x$ が $A$ に含まれているならば、その $x$ のすべては $B$ に含まれる。



# 注意

---

Def  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

この部分集合の定義では、 $B$ 自身も $B$ の部分集合であることがわかる。

# 例題 次の命題は正しいか？ 真偽を証明せよ。

---

(1)  $A = \{1,2,3\}$  ,  $B = \{1,2,3,4\}$

に対して  $A \subseteq B$

(2)  $A = \{1,2,3\}$  ,  $B = \{2,3,4\}$

に対して  $A \subseteq B$

# ヒント

---

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

# (1)の解答

---

$A = \{1,2,3\}$  ,  $B = \{1,2,3,4\}$  に対して  $A \subseteq B$

解答 真

証明

$A$  の要素1,2,3はすべて $B$ の要素で,

$$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

が成り立つ. 定義より

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ ならば $A \subseteq B$

$A = \{1,2,3\}$  ,  $B = \{1,2,3,4\}$  に対して

$\forall x[x \in \{1,2,3\} \rightarrow x \in \{1,2,3,4\}]$  が成り立つ.

従って  $A \subseteq B$



## (2)の解答の方針

---

(2)  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{2,3,4\}$  に対して  $A \subseteq B$

解答 偽

証明の方針

$A$ の要素で1は $B$ の要素でない。

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ の否定 $\Rightarrow$

$$\exists x \in A[x \notin B]$$

## (2)の解答

---

(2)  $A = \{1,2,3\}$ ,  $B = \{2,3,4\}$  に対して  $A \subseteq B$

解答 偽

証明

$A$ の要素で1は $B$ の要素でない。従って

$$\exists x \in A [x \notin B] \Leftrightarrow \neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

定義より

「 $\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$ が成り立たない」ならば

「 $A \subseteq B$ は成り立たない」

従って、命題は偽



# 重要:全称記号 $\forall$ の否定に存在記号 $\exists$ が用いられる

---

$$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

↓

「 $A$ のすべての要素が $B$ の要素である」の否定

↓

「 $A$ の要素の中で $B$ の要素でないものがある」

↓

$$\exists x \in A [x \notin B]$$

「 $\sim$ ならば  $\sim$ である」の否定は、反例 $\exists x$ を一つ示せばよい。

# 問い

---

$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\exists x \in A [x \notin B]$

ということは

$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\forall x \in A [x \in B]$

も成り立つ？

# 問い

---

$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\exists x \in A [x \notin B]$

ということは

$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

も成り立つ？

成り立ちません。この理由は 命題  
論理からの授業で明らかになります。

# 同等

---

Def  $A \subseteq B$  and  $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

AとBは等しいという.

# 例題

---

$$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

のとき,

$A = B$ を証明せよ.

# ヒント

---

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

# 例題

---

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$  のとき,

$A = B$  を証明せよ.

証明

(1)  $A \subseteq B$

$$\forall x \in A \Rightarrow \forall x [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}]$$

$\Rightarrow \forall x [x = 4(n + 1) - 1, n \in \mathbb{Z}], (n + 1) \in \mathbb{Z}$  より

$\Rightarrow \forall x [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x [x \in B]$

より  $\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$ . 従って  $A \subseteq B$

# 例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$  のとき,  $A = B$  を証明せよ.

証明

(2)  $A \supseteq B$

$$\forall x \in B \Rightarrow \forall x [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}]$$

$$\Rightarrow \forall x [x = 4(m - 1) + 3, m \in \mathbb{Z}], (m - 1) \in \mathbb{Z} \text{ より } \Rightarrow$$

$$\forall x [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x [x \in A] \text{ より}$$

$$\forall x [x \in B \rightarrow x \in A]. \text{ 従って } A \supseteq B$$

(1)(2)より  $A \subseteq B$  and  $A \supseteq B$

が成り立つ. 従って  $A = B$



# 真部分集合

---

Def  $A \subseteq B$  and  $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$   
 $A$ は $B$ の真部分集合であるという.



Def  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$  and ????????

真部分集合 $\subset$ は $\subsetneq$ とも書く. 本授業では $\subset$ を用いる.

# 真部分集合

---

Def  $A \subseteq B$  and  $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

$A$ は $B$ の真部分集合であるという.



Def  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$  and  $\exists y \in B [y \notin A]$

真部分集合 $\subset$ は $\subsetneq$ とも書く。本授業では $\subset$ を用いる。

# 例題

---

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  を証明せよ.

# ヒント

---

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

# 例題

---

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

証明

①  $\forall x[x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}]$  が成り立つ

②  $y = -1$ について

$y \in \mathbb{Z}$ であるが  $y \notin \mathbb{N}$

従って

$\exists y \in \mathbb{Z}[y \notin \mathbb{N}]$

①②より  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

■

# 7. 集合演算

---

集合 $A, B$ と普遍集合を $U$ とする.

$A, B$ を $U$ の部分集合として以下の演算を定義する.

- (1) 和集合
- (2) 積集合
- (3) 補集合
- (4) 差

# (1) 和集合

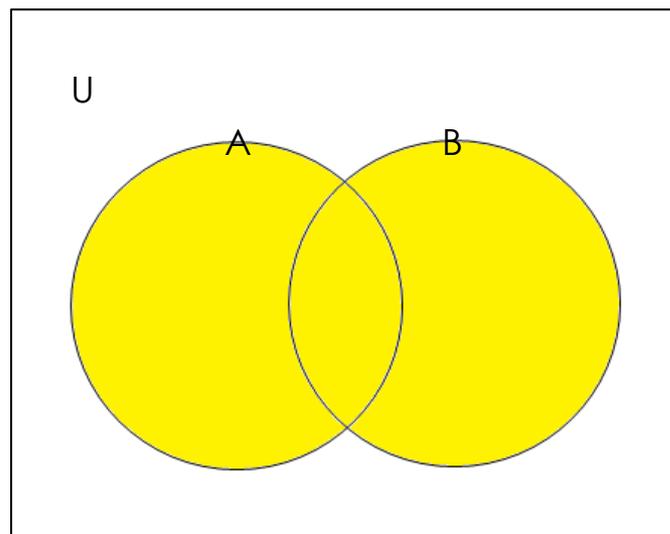
---

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{または} x \in B\}$$

集合 $A, B$ と普遍集合を $U$ とする.

このとき,  $A, B$ の和集合

とは $A$ と $B$ の要素を  
すべて併せた集合の  
こと



## (2) 積集合

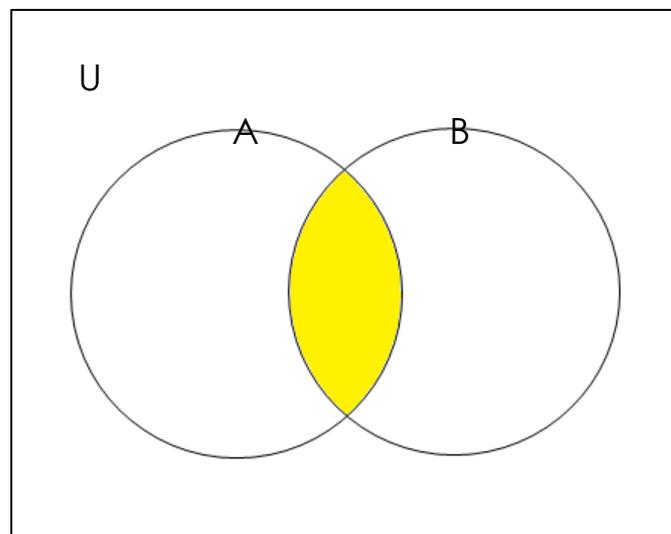
---

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{かつ} x \in B\}$$

集合 $A, B$ と普遍集合を $U$ とする.

このとき,  $A, B$ の積集合とは、

$A$ と $B$ の共通要素のみ  
からなる集合のこと



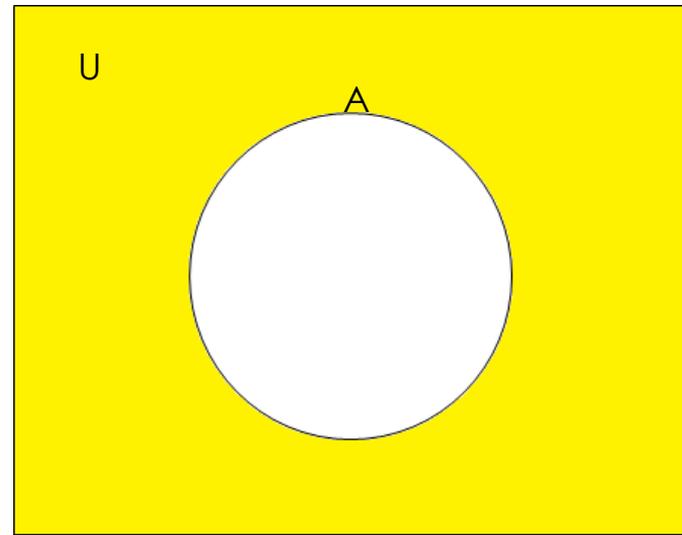
# (3) 補集合

---

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U, \text{かつ} x \notin A\}$$

普遍集合を $U$ とし、その部分集合 $A$ を考える。

このとき、 $A$ の補集合とは  $U$ のうち  $A$ に含まれない要素の集合のこと



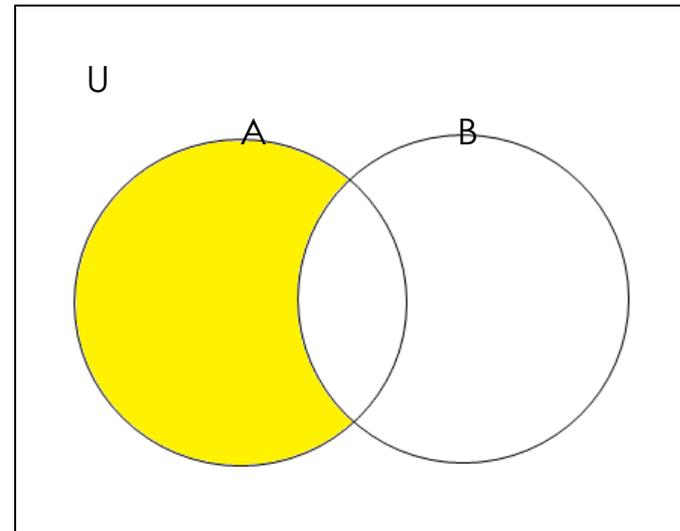
# (4)差

---

$$A - B = \{x \mid x \in A, \text{かつ } x \notin B\}$$

集合 $A, B$ と普遍集合を $U$ とする.

このとき, 差 $A - B$ とは,  
 $A$ から $B$ の要素を除いた集合  
のこと. $A - B = A \setminus B$ と書く  
こともある.  $A - B = A \cap \bar{B}$   
と書ける.



# (5) 素

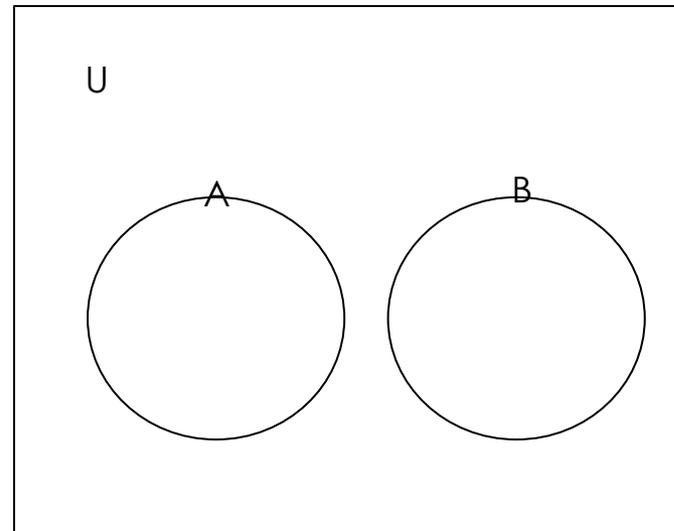
---

集合 $A, B$ と普遍集合を $U$ とする.

$A$ と $B$ に共通要素がない場合

$$A \cap B = \emptyset$$

「このとき $A$ と $B$ は素である」  
という.



# 8. ド・モルガンの法則を証明せよ

---

集合 $A, B$ と普遍集合を $U$ とする.

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

# ヒント

---

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

# 解答(1)

---

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

証明

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{または } x \in B\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{x \mid x \in U, \text{かつ } x \notin A \cup B\}$$

$$= \{x \mid x \in U, \text{かつ } x \notin A, \text{かつ } x \notin B\}$$

$$= \bar{A} \cap \bar{B}$$

注意

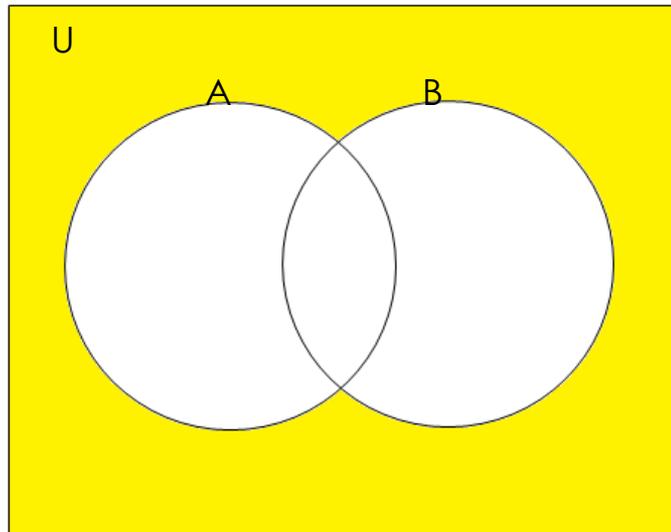
$A \cup B$ に含まれないのでそれぞれにも含まれない



# (1)のイメージ

---

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



# 解答(2)

---

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

証明

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{かつ} x \in B\}$$

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \{x \mid x \in U, \text{かつ} x \notin A \cap B\} \\ &= \{x \mid x \in U, \text{かつ} x \notin A, \text{または} x \notin B\} \\ &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned}$$

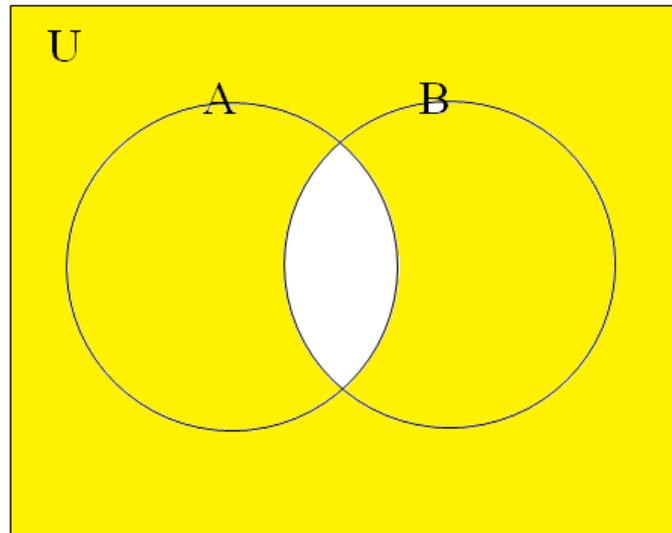
注意  
AかつBに含まれないので  
Aに含まれないかBに  
含まれない

■

## (2)のイメージ

---

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



# 例

---

普遍集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 4\}$ ,  
 $B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合  $A \cup B$

(2) 積集合  $A \cap B$

(3) 補集合  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$

(4)  $A - B$

(5)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

を求めよ.

# 例

---

普遍集合  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $A = \{1,2,4\}$ ,  
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合  $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合  $A \cap B$

(3) 補集合  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$

(4)  $A - B$

(5)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

# 例

---

普遍集合  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $A = \{1,2,4\}$ ,  
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合  $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合  $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$

(4)  $A - B$

(5)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

# 例

---

普遍集合  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $A = \{1,2,4\}$ ,  
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合  $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合  $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合  $\bar{A} = \{3,5\}$ ,  $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4)  $A - B$

(5)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

# 例

---

普遍集合  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $A = \{1,2,4\}$ ,  
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合  $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合  $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合  $\bar{A} = \{3,5\}$ ,  $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4)  $A - B = \{1,2\}$

(5)  $\bar{A} \cap \bar{B}$

# 例

---

普遍集合  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $A = \{1,2,4\}$ ,  
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合  $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合  $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合  $\bar{A} = \{3,5\}$ ,  $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4)  $A - B = \{1,2\}$

(5)  $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{3\}$

# 9. 要素の個数

---

集合 $A$ が有限集合の場合、要素の数を

$$n(A) \quad \text{や} \quad |A|$$

で表す.

# 以下を証明せよ。

---

Th. 1.  $U$ を有限な普遍集合とする。集合 $A, B$ について以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

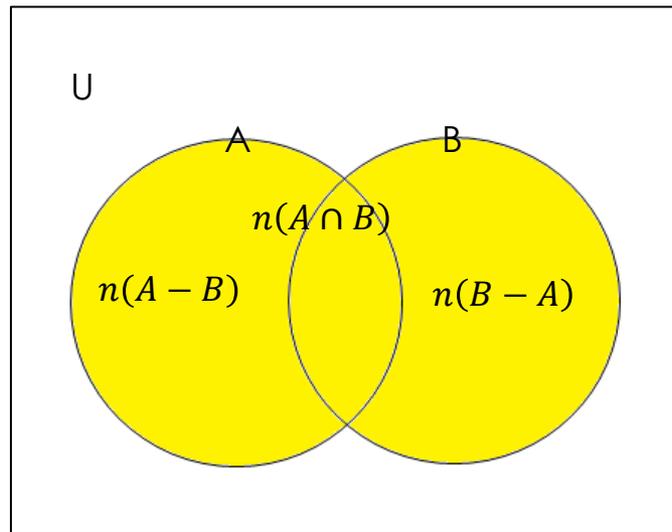
Th. 1.  $U$ を有限な普遍集合とする。集合 $A, B$ について以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

---

[ヒント]

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(B - A) \\ &\quad + n(A \cap B) \end{aligned}$$



Th. 1.  $U$ を有限な普遍集合とする。集合 $A, B$ について以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

---

[証明]

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \\ &= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) \\ &\quad + n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

従って

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \blacksquare$$

# 系 1 Corollary 1

---

$U$ を有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

# 系 1 Corollary 1

---

$U$ を有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

[証明]

Th 1より,  $n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$ .

$\bar{A} \cap A = \emptyset$ より,

$$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$$

従って,

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A) \quad \blacksquare$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき, 以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B)$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 50$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$

とするとき, 以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B)$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

# 例

---

普遍集合  $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 51$$

# 8. まとめ

---

1. 集合の記述法 (外延的記法、内包的記法)
2. 全称記号 $\forall$ 、存在記号 $\exists$
3. 部分集合と包含関係
4. 集合の演算 (和、積、補、差、素、要素数)

# 演習問題1. 次の集合を外延的記法でかけ。

---

$$(1) A = \{n \mid 1 < n < 10, n \in \mathbb{N}, n \text{ は偶数}\}$$

$$(2) B = \{4n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$(3) C = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(4) D = \{x \mid 2x^2 + 9x + 9 = 0, x \in \mathbb{N}\}$$

# 演習問題2. 次の集合を内包的記法でかけ。

---

$$(1) A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$(2) B = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$$

$$(3) C = \{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$$

$$(4) D = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$$

演習問題3. 次の数について数の集合 $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ に属するか属さないかを $\in$ か $\notin$ を用いて表現せよ。

---

(1)  $\frac{2}{3}$

(2)  $\sqrt{2}$

(3)  $-5$

(4)  $2 - i$

# 演習問題4. 次の数式を日本語で表せ。

---

(1)  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

(2)  $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 0$

(3)  $\exists n \in \mathbb{C}, n^2 \in \mathbb{N}$

(4)  $\forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

(5)  $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

(6)  $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq a$

(7)  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, ax + b = 0$

(8)  $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| < a$

## 演習問題5. 次の日本語を全称記号, 存在記号を用いて表せ

---

- (1) 実数の中には、有理数ではない数が存在する
- (2) すべての実数 $x$ について、 $2x^2 - x + 2 > 0$ が成り立つ
- (3) 0と異なる任意の実数 $x$ について、 $\frac{y}{x} = 1$ となる実数 $y$ が存在する
- (4) 任意の整数 $n$ に対し $\sin(2\pi n) = 0$ が成り立つ
- (5) 整数の中には、2で割り切れない数が存在する
- (6) すべての実数 $x$ について、 $2^x > 0$ である
- (7) 任意の実数 $x$ に対し、 $x^2 + 3x + 2 > a$ となる定数 $a$ が自然数の中に存在する
- (8) 任意の整数 $a$ に対し、 $x^2 + x + 2 > a$ となる有理数 $x$ が存在する

# 演習問題6.

---

- (1)  $A = \{a, b, c, d\}$ に対して,  $A$ の部分集合をすべて挙げよ.
- (2) 集合  $A = \{2, 3, 5, 6\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7, 8\}$  に対して  $A \subseteq B$  が成り立たないことを証明せよ.

# 演習問題7

---

$A = \{5n + 2m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ のとき,  $A = \mathbb{Z}$ を証明せよ.

# 演習問題8.

---

普遍集合 $U$ , 集合 $A, B, C$ について  
 $A \subseteq B$ , and  $B \subseteq C$ , のとき,

$$A \subseteq C$$

を証明せよ.

# 演習問題9.

---

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{2,4,5,6,9\}$$

$$B = \{1,2,3,6,7\}$$

このとき,

(1)和集合 $A \cup B$

(2)積集合 $A \cap B$

(3)補集合 $\bar{A}, \bar{B}$

(4)  $A - B$

を求めよ.

# 演習問題10.

---

$U = \{n \mid 1 \leq n \leq 15, n \in \mathbb{Z}\}$ を全体集合とし、部分集合 $A = \{a \mid a \text{は偶数}\}$ ,  $B = \{b \mid b \text{は奇数}\}$ ,  $C = \{c \mid c \text{は4の倍数}\}$ を考える。以下の要素を列挙せよ。

- (1)  $A, B, C$
- (2)  $B \cup C$
- (3)  $B \cap C$
- (4)  $\bar{A}$
- (5)  $\overline{A \cup C}$
- (6)  $\bar{B} \cap C$
- (7)  $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

# 演習問題11. 次の命題の否定形を答えよ。

---

- (1) 「私の視力は1.0未満であり、かつ握力は50kg以下」ということはない。
- (2) このリンゴは甘いか、または酸っぱくない。
- (3) 「すべての人がiPadを持っている」とは限らない
- (4) 「iPad proを持っていない人がいる」ということはない
- (5) (3)(4)を全称記号 $\forall$ と存在記号 $\exists$ を用いて書け。

# 演習問題12

---

普遍集合  $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 100, m \in \mathbb{N}\}$  について

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき、以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B), \\ n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$