

ベイズの定理

植野真臣

電気通信大学

情報理工学研究科

情報数理工学プログラム

今後のスケジュール（予定）

4月7日 授業の概要とガイダンス

4月14日 ベイズの定理

4月21日 ベイズはどのように誕生したか？

4月28日 ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！

5月12日 アランチューリングとベイズ

5月19日 ビリーフとベイズ

5月26日 尤度と最尤推定(1)

6月2日 尤度と最尤推定(2)

6月9日 ベイズ推定と事前分布(1)

6月16日 ベイズ推定と事前分布（2）

6月 23日 データサイエンス：ルービン因果推論

6月30日 テストのデータサイエンス

7月7日 階層ベイズとデータサイエンス

7月14日 ベイジアンネットワークと因果推論

7月28日 国際会議で休講

8月 4日 テストと総括

授業の目標

ベイズの定理の意味を知る！！

ベイズの定理を使えるようになる。

ベイズの定理を簡単に説明します！！

事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率を $P(B|A)$ と書く。

このとき、事象 A と事象 B の起こる同時確率はどのように計算できるか？

同時確率

事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率を $P(B|A)$ と書く。

このとき、事象 A と事象 B の起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

同様に

事象B が起こったときの事象Aの起こる確率を $P(A|B)$ と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = ?$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

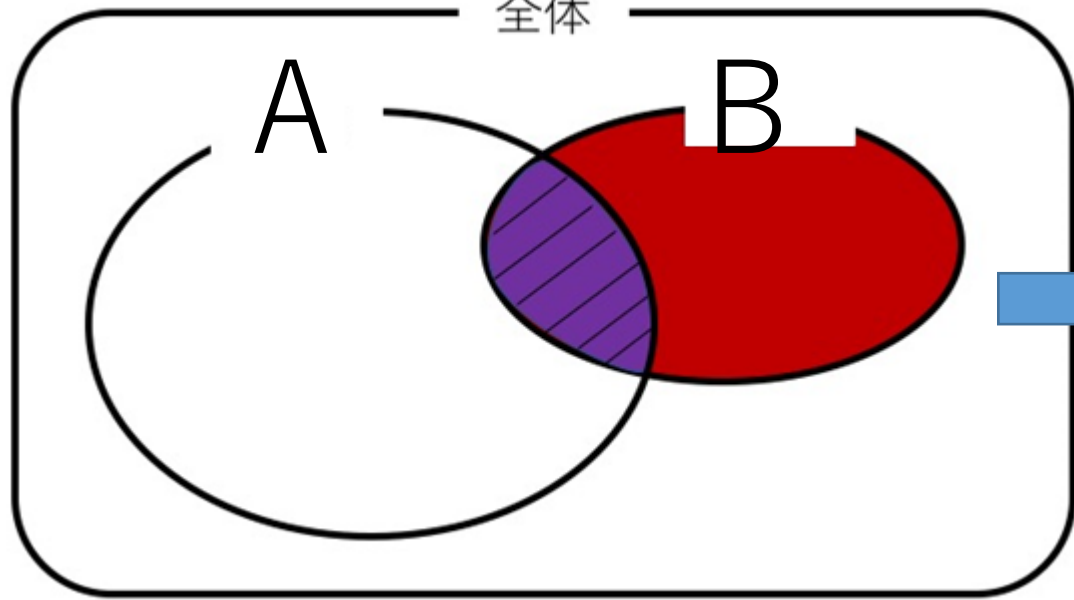
$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)} \end{aligned}$$

ベン図で考えると

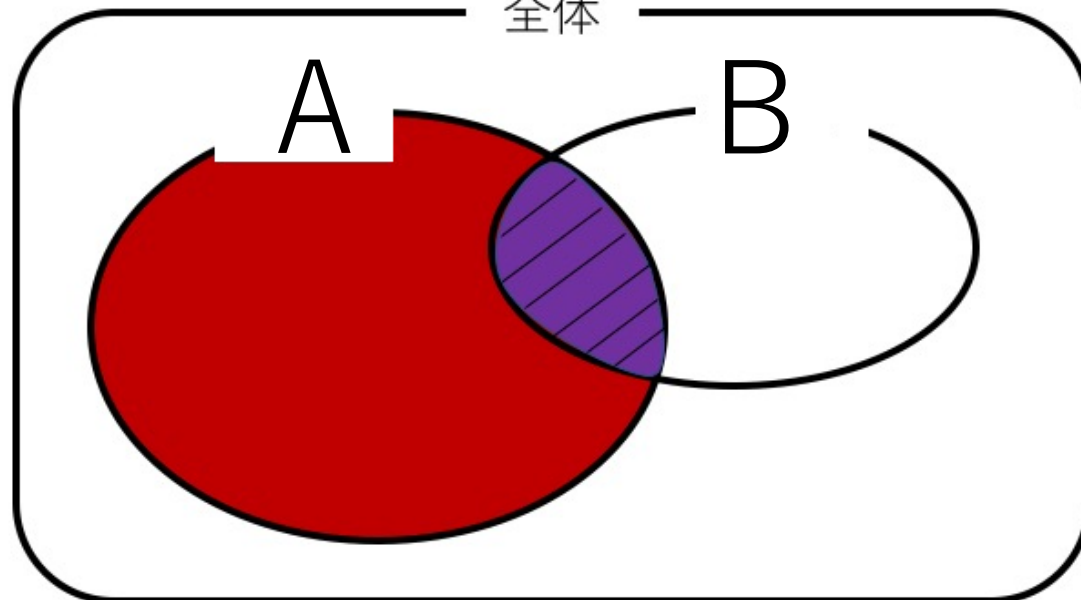
$$P(A|B)$$

全体



$$P(B|A)$$

全体



ベイズの定理

原因 → 結果 が分かっているときに
結果が起こったときの原因の確率を求める
数学の定理

$$P(\text{原因}|\text{結果}) = \frac{P(\text{原因})P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果})}$$

$$= \frac{P(\text{原因})P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果}|\text{原因}) + P(\text{結果}|\text{異なる原因})}$$

本授業の主役のベイズの定理

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1,$$
$$P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。
この人のがんの確率を求めよ。

例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) \\ = \frac{P(\text{陽性}|\text{がん})P(\text{がん})}{P(\text{陽性}|\text{がん})P(\text{がん}) + P(\text{陽性}|\neg\text{がん})P(\neg\text{がん})}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)} = 0.5$$

例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)} = 0.5$$

 精密検査

データによる確率更新

$$P(\text{がん}) = 0.1 \quad \text{事前確率}$$



検査後

$$P(\text{がん} | \text{陽性}) = 0.5 \quad \text{事後確率}$$

ベイズの定理(一般化された記述)

データ X が得られたときの C_i の確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データ X が得られたときの C_i の確率

事後確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときの C_i の確率

事前
確率

事後確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときの C_i の確率

事後確率 事前 データの出る
確率 確率 確率 (尤度)

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときの C_i の確率

事後確率 事前確率 データの出る
確率 確率 確率 (尤度)

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

C_i について定数

が成り立つ.

例題 2

メールに「セール」 という単語がある(Sと書く)と スпамメール(Spamと書く) であることが多い.

今, $P(S \mid \text{Spam}) = 0.8$, $P(S \mid \neg \text{Spam}) = 0.1$, $P(\text{Spam}) = 0.1$ とする.

メールに「セール」 という単語が入っていた.
スパムメールである確率を求めてみよう.

回答

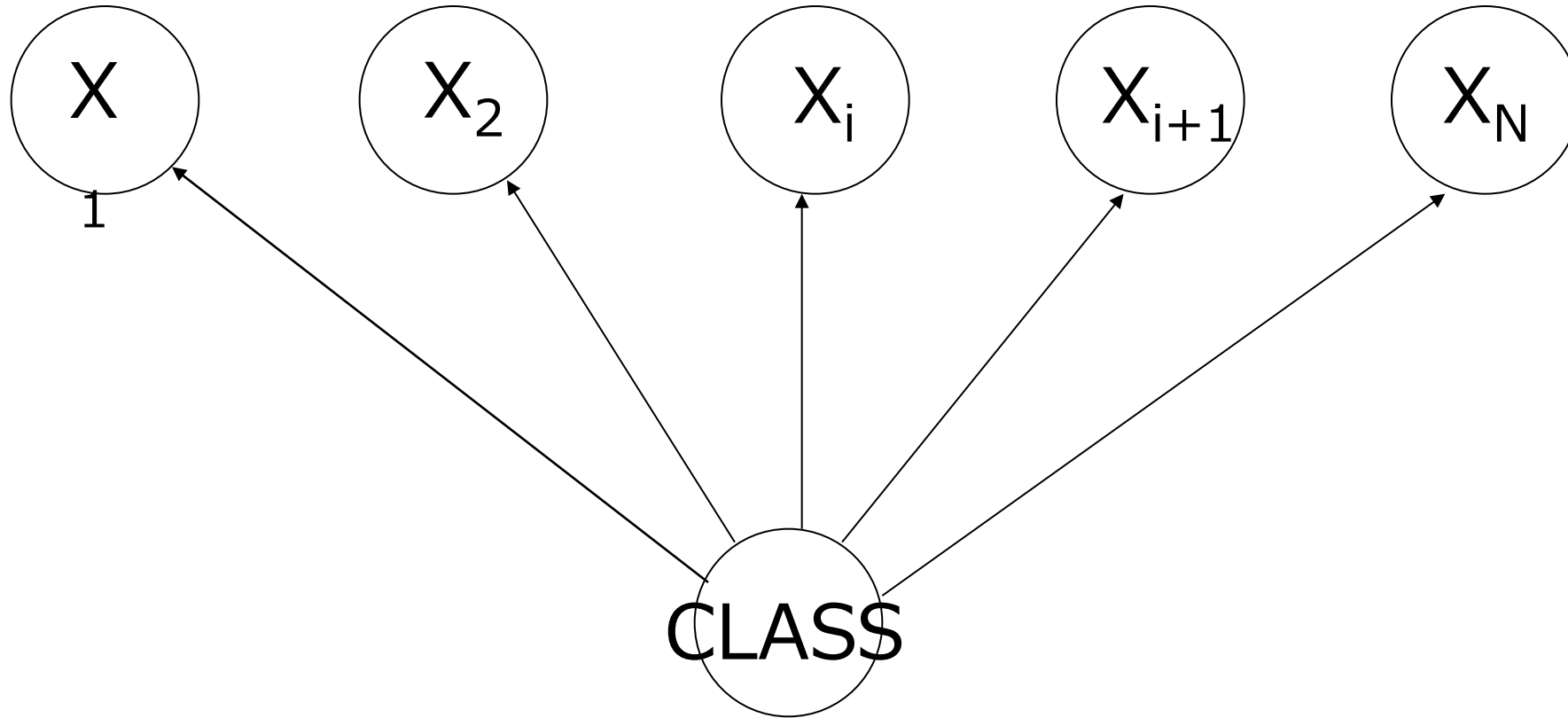
$$P(S \mid \text{Spam}) = 0.8, P(S \mid \neg \text{Spam}) = 0.1, \\ P(\text{Spam}) = 0.1 \text{より},$$

$$P(\text{Spam} \mid S) = \frac{P(\text{Spam})P(S \mid \text{Spam})}{P(\text{Spam})P(S \mid \text{Spam}) + (1 - P(\text{Spam}))P(S \mid \neg \text{Spam})} \\ = \frac{0.1 \times 0.8}{0.1 \times 0.8 + (1 - 0.1) \times 0.1} = \frac{0.08}{0.17} \doteq 0.47$$

事前確率0.1から事後確率0.47になった！！

Naïve Bayes

G. Graham, "A plan for spam", (2002)



モデル

$$p(class|x_1, \dots, x_N) = \frac{p(x_1, \dots, x_N|class)p(class)}{p(x_1, \dots, x_N)}$$

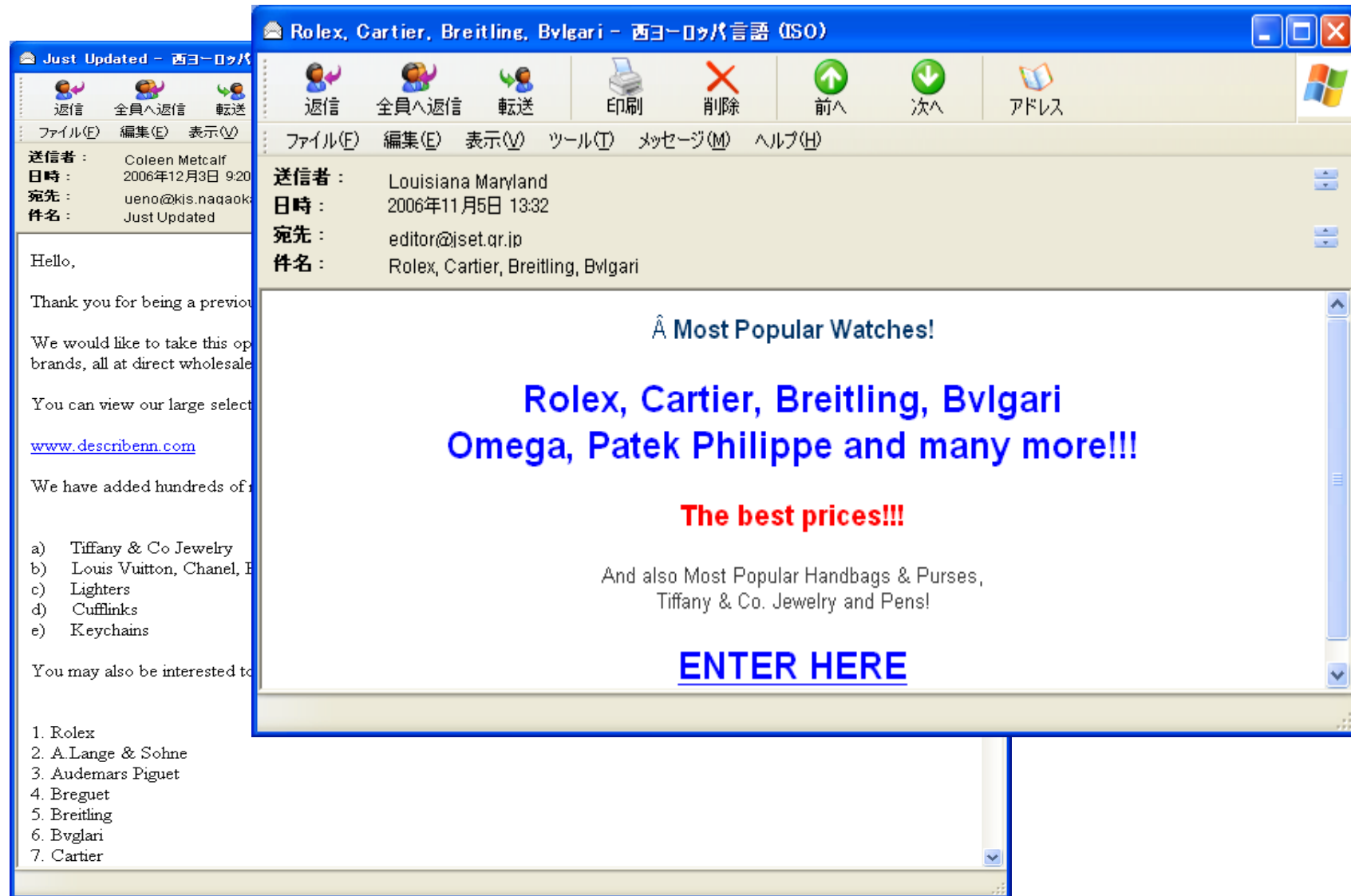
$$\approx \frac{p(class)}{p(x_1, \dots, x_N)} \prod_{i=1}^N p(x_i|class)$$

$p(x_i|class)$ は、classで x_i が出現する文書数

識別関数

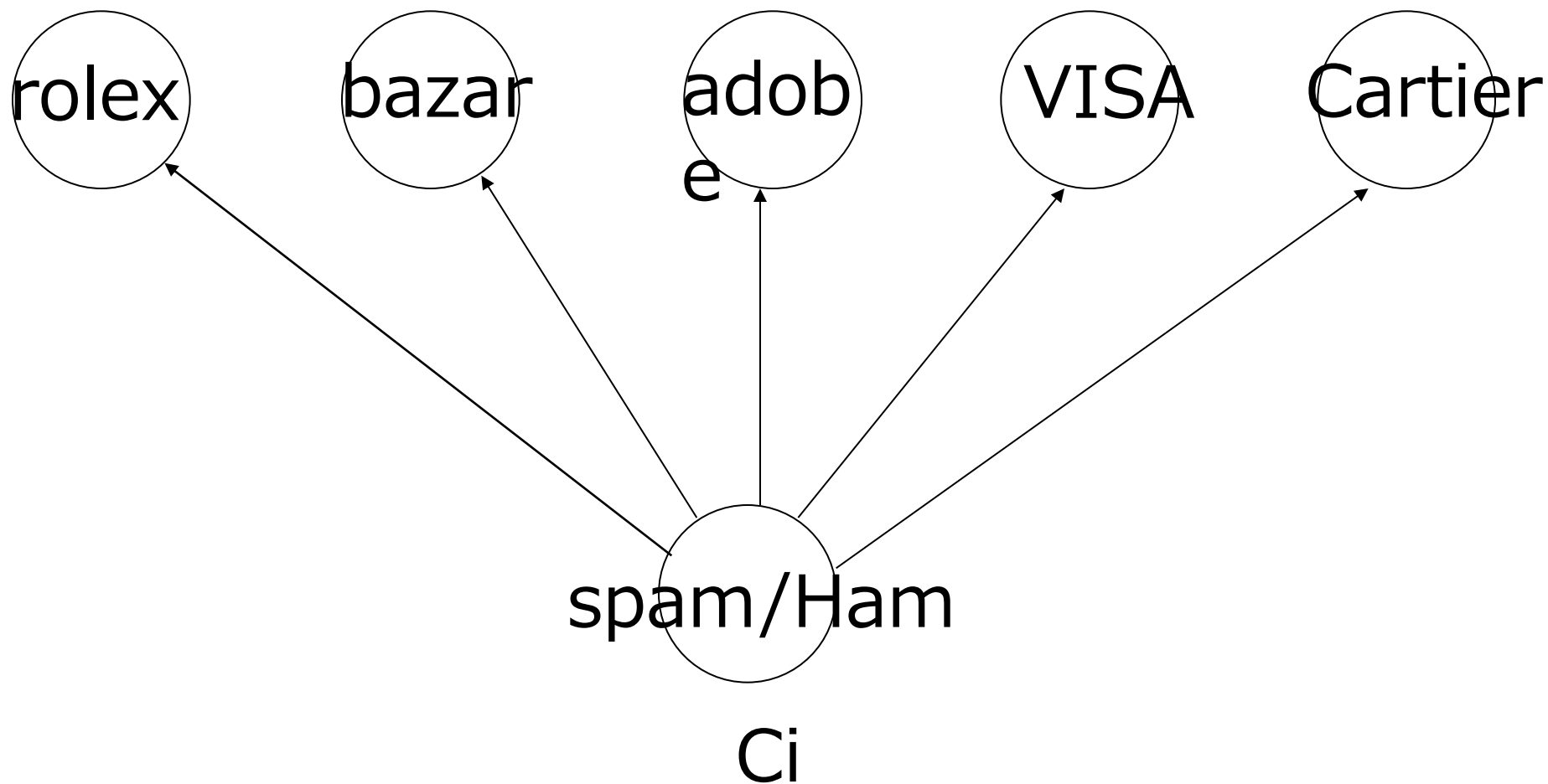
$$g_{class} = \log p(class) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i \mid class)$$

例：ベイジアン・フィルタリング



例：ベイジアン・フィルタリング

データ



識別関数の比較判断

$$g_{spam} = \log p(spam) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | spam)$$

$$g_{ham} = \log p(ham) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | ham)$$

例題3

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を A 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を B とし、 $P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.005$ とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

回答

$$P(B|A) = 1.0, P(B|\neg A) = 0.5, P(A) = 0.005$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{\sum_A P(A)P(B|A)}$$
$$= \frac{0.005 \times 1.0}{0.005 \times 1.0 + (1 - 0.005) \times 0.5} = \frac{0.005}{0.5025}$$
$$\div 0.01$$

約 2 倍になった！！

例題 4

同じようなもう一人のうそつき少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう.

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.01$ とする.

回答

$$P(B|A) = 1.0, P(B|\neg A) = 0.5, P(A) = 0.01$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{\sum_A P(A)P(B|A)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0.01 \times 1.0}{0.01 \times 1.0 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.01}{0.505} \\ &\div 0.019802 \div 0.02 \end{aligned}$$

約 2 倍になった！！

例題 5

この後、違う嘘つき少年20人が「独立にオオカミが来た」と叫んだ（ B' と書く）！！

オオカミが来ている確率 $P(A|B')$ を求めてみよう.

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.02$ とする.

回答

$P(B|A) = 1.0, P(B|\neg A) = 0.5, P(A) = 0.02$ より

$$\begin{aligned} P(A|B') &= \frac{P(A)P(B|A)^{20}}{P(A)P(B|A)^{20} + P(\neg A)P(B|\neg A)^{20}} \\ &= \frac{0.02 \times 1.0^{20}}{0.02 \times 1.0^{20} + (1 - 0.02) \times 0.5^{20}} \\ &= 0.9999 \end{aligned}$$

例題6 設定を変えよう

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を A 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を B とし、

$P(B|A) = 0.4$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.01$ とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

回答

- $P(B|A) = 0.4, P(B|\neg A) = 0.5,$
 $P(A) = 0.01$ より,

- $$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{\sum_{A, \neg A} P(A)P(B|A)} =$$
$$\frac{0.01 \times 0.4}{0.01 \times 0.4 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.004}{0.499} \doteq$$
$$0.008016$$

- 約 8 割になった！！

まとめ

ベイズの定理

データ X が得られたときの C_i の確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$