

ベイズの定理は どのように誕生したのか？

植野真臣

電気通信大学

情報理工学研究科

情報数理工学プログラム

今後のスケジュール（予定）

4月7日 授業の概要とガイダンス

4月14日 ベイズの定理

4月21日 ベイズはどのように誕生したか？

4月28日 ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！

5月12日 アランチューリングとベイズ

5月19日 ベイズから機械学習へ

5月26日 確率の基礎の復習

6月2日 ビリーフとベイズ

6月9日 尤度と最尤推定

6月16日 数値計算法による推定

6月 23日 ベイズ推定と事前分布

6月30日 ベイジアンネットワーク

7月7日 ベイジアンネットワークと機械学習

7月14日 ベイジアンネットワーク分類器

7月28日 国際会議で休講

8月 4日 テストと総括

授業の目標

ベイズはどうして生まれたのか？

ベイズの定理が生まれた背景を知り、ベイジアンを哲学を学ぶ。

先週の復習

例題3

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象を A ，少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を B とし， $P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.005$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

回答

$$P(B|A) = 1.0, P(B|\neg A) = 0.5, P(A) = 0.005$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{\sum_A P(A)P(B|A)}$$
$$= \frac{0.005 \times 1.0}{0.005 \times 1.0 + (1 - 0.005) \times 0.5} = \frac{0.005}{0.5025}$$
$$\div 0.01$$

約 2 倍になった！！

例題 4

同じようなもう一人のうそつき少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう.

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.01$ とする.

回答

$$P(B|A) = 1.0, P(B|\neg A) = 0.5, P(A) = 0.01$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{\sum_A P(A)P(B|A)}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{0.01 \times 1.0}{0.01 \times 1.0 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.01}{0.505} \\ &\div 0.019802 \div 0.02 \end{aligned}$$

約 2 倍になった！！

例題 5

この後、違う嘘つき少年20人が「独立にオオカミが来た」と叫んだ（ B' と書く）！！

オオカミが来ている確率 $P(A|B')$ を求めてみよう.

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.02$ とする.

回答

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.02$ より

$$\begin{aligned} P(A|B') &= \frac{P(A)P(B|A)^{20}}{P(A)P(B|A)^{20} + P(\neg A)P(B|\neg A)^{20}} \\ &= \frac{0.02 \times 1.0^{20}}{0.02 \times 1.0^{20} + (1 - 0.02) \times 0.5^{20}} \\ &= 0.9999 \end{aligned}$$

例題6 設定を変えよう

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を A 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を B とし、

$P(B|A) = 0.4$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.01$ とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

回答

- $P(B|A) = 0.4, P(B|\neg A) = 0.5,$
 $P(A) = 0.01$ より,

- $$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{\sum_{A, \neg A} P(A)P(B|A)} =$$
$$\frac{0.01 \times 0.4}{0.01 \times 0.4 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.004}{0.499} \doteq$$
$$0.008016$$

- 約 8 割になった！！

ベイズはなぜベイズの定理を生み出したのか？

1748年 哲学者デビッド・ヒューム
人間知性研究を出版

イエスの復活を見たという人々の主張
が不正確である確率は、それがそもそも
も起きた確率よりも遥かに大きいと主
張

牧師ベイズ怒る

ヒュームが間違っていることを完全に証明しようと、ベイズは出来事の発生確率の定量化を試みる。

ベイズのアイデア

キリストの復活に関する様々な証言は、ヒュームが主張したような形でその出来事の信憑性を無にすることはできない、と考えた。

ベイズの結果は、たとえ弱いあいまいな証拠であっても積み重ねれば、あり得ないような出来事の低い確率を覆すことができ、それを事実として確立することができる！！

ベイズは以下の定理を発見した.

- 客観的なデータから自分の信念を変える手法
- 事前確率：データの無い確率、尤度：データの起こる確率
- 事後確率：データによって更新された確率
- 事後確率 $\propto$ 事前確率 $\times$ 尤度
- 世界最初のオンライン学習（逐次学習）

数学者からは不人気！！

- 主観を扱っている！！
- 事前の確率が分からない場合は、すべての可能性を等確率にする。

→

無知を確率で計量化しており、おかしい！！
さらに、数学的記述が不正確なものであった！！

プライス牧師

1767年にベイズの友人だったプライス牧師は「キリスト教の重要性、その証拠、およびそれに対し申し立てられた異議」を出版し、ベイズの考えを用いてヒュームの主張に挑戦した。

プライス牧師

統計学者スティーブン・スティグラーは、「基本的な確率論的な論点は、ヒュームは奇跡を目撃したという独立した証言が数多くあることの重要性を過小評価したが、ベイズの結果は、たとえ危うい証拠であっても積み重ねれば、あり得ないような出来事の低い確率を覆すことができ、それを事実として確立することができる、という手法を示した」と言う。

プライスにより、ベイズの考え方は世に出た！！

この時点では、まだ数学的に厳密な記述はなかった。

ベイズの定理の発見

ベイズの論文から10年がたったころ、天文学の観測でなぜデータがばらつくのかの原因を推定しようとする。25歳のラプラスは以下のベイズの定理によく似た定理を導く。彼自身は、原因確率の定理と呼んでいた。

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)}$$

ラプラス、ベイズを知る！！

1781年に、プライスがパリを訪れて、ベイズの話を講演した。

その講演を聞いたラプラスは感動し、自分の作った原因確率の定理に、解釈を与え、さらに事前確率を等確率にする制約を組み込んだ。

1814年、現在の定理を導く

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) P(B|A_i)}$$

地球科学、気圧変動の推定に用いる。
ラプラスはナポレオンにかわいがられ、
内務大臣も務めた。

例題 7

しまでキリストの弟子がキリストの復活を信じている。実際にキリストの復活した確率を求めよう。ただし、 $P(A|B) = 1.0$, $P(A|\neg B) = 0.5$, $P(B) = 0.01$ とする。21人の弟子がキリストの復活したとき、本当にキリストの復活した確率を求めよう。まずは次ページの補題から取りかかろう。

$P(A|B) = 1.0$, $P(A|\neg B) = 0.5$, $P(B) = 0.01$ とする。

補題：21人の弟子がキリストの復活を見た
たと証言したときの尤度は？

例題 8 (もう少しリアルに考えましょう)

しでキス
ま人がリ
いの子キ
でだけ弟に
んだ。実際
望るす。実
をいまA,
活てりをP
復似あ象る
のしが事す
ト少とるB
スてこそす
リぎう言を
キすま証象
は強しと事
ちがてたう
たみえ見い
子望見をと
弟にに活た
のりト復し
トマスの活
スありト復
リ。キスが
きたもリト

$P(A|B) = 1.0,$
 $\neg B)$
 $= 0.5,$
 $P(B) = 0.00001$
 $= 0.00001$

がスら
子リか
度尤
も本
こ
きこ
す
と
う
よ
み
め
求
求

$P(A|B) = 1.0$, $P(A|\neg B) = 0.5$, $P(B) = 0.00001$ とする.

補題：11人の弟子がキリストの復活を見た
証言したときのキリスト復活の尤度は？

本日のまとめ

- ベイズがなぜベイズの定理を導いたのかを学んだ。
- ベイズは 神の存在証明のために ベイズを導いた。
- ベイズの定理とは 一つ一つは信頼性のないエビデンスでも、多く集まれば非常に有益なエビデンスになっていくことを示している。