ベイズの定理

植野真臣
電気通信大学
情報理工学研究科
情報数理工学プログラム

今後のスケジュール（予定）

4月7日　授業の概要とガイダンス
4月14日　ベイズの定理
4月21日　ベイズはどのように誕生したか？
4月28日　ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！
5月12日　アランチューリングとベイズ
5月19日　ベイズから機械学習へ
5月26日　確率の基礎の復習
6月2日　ビリーフとベイズ
6月9日　尤度と最尤推定
6月16日　数値計算法による推定
6月 23日　ベイズ推定と事前分布
6月30日　ベイジアンネットワーク
7月7日　ベイジアンネットワークと機械学習
7月14日　ベイジアンネットワーク分類器
7月28日　国際会議で休講
8月 4日　テストと総括

授業の目標

ベイズの定理の意味を知る！！
ベイズの定理を使えるようになる。

ベイズの定理を簡単に説明します！！

事象Ａ が起こったときの事象Bの起こる確率を$\mathrm{P}(B|A)$ と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる同時確率はどのように計算できるか？

同時確率

事象Ａ が起こったときの事象Bの起こる確率を$P(B|A)$ と書く。
このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A,B) = P(B|A)P(A)$$

同様に

事象B が起こったときの事象Aの起こる確率をP$(A|B)$ と書く。
このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

よって

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

まとめると

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

よって

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(B|A) = ?$$

まとめると

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

よって

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$$

まとめると

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A})$$

$$\mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

よって

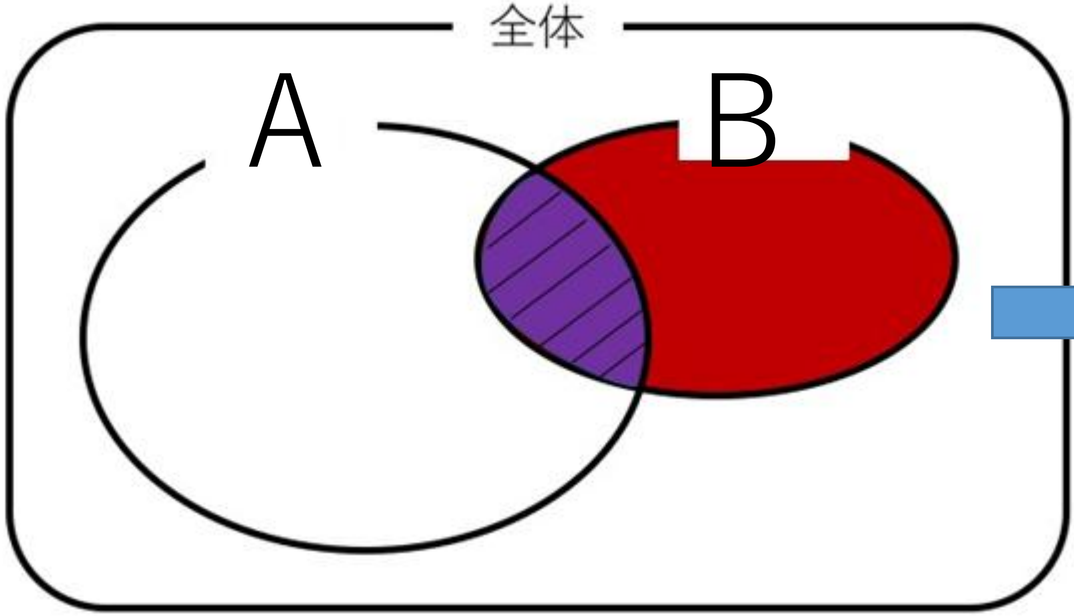
$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$$

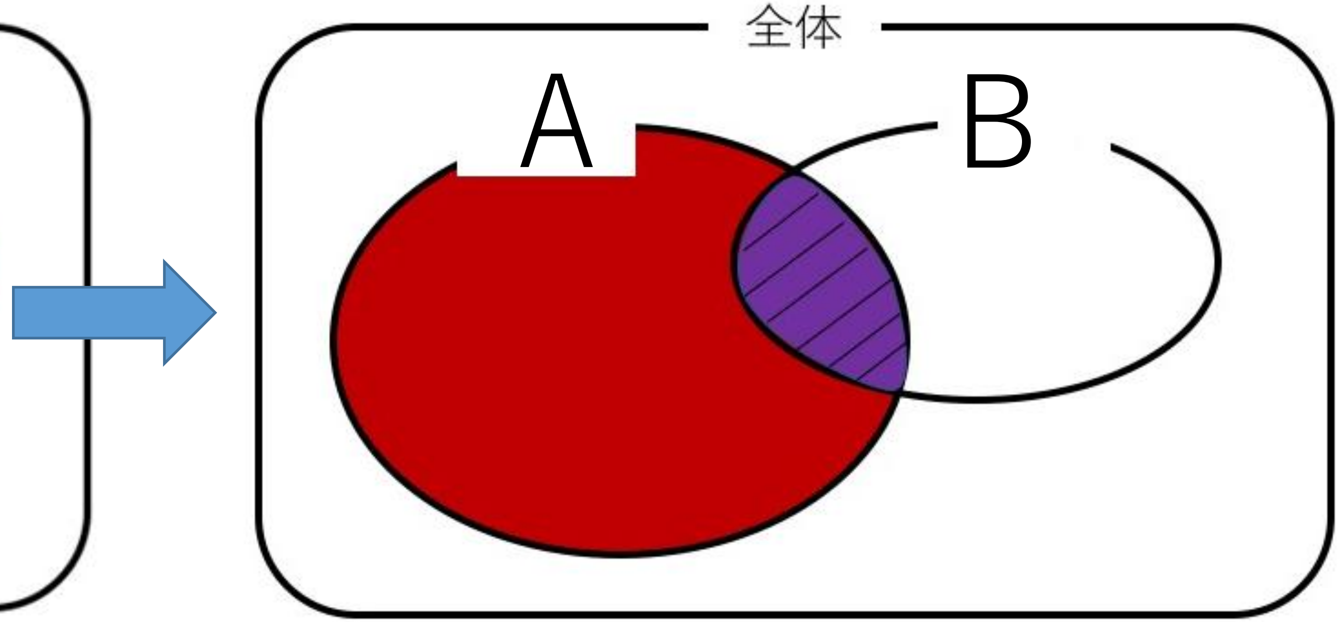
$$= \frac{\mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(A|\neg\mathrm{B})\mathrm{P}(\neg\mathrm{B})}$$

ベン図で考えると

$$\mathrm{P}(A|\mathrm{B})$$



$$\mathrm{P}(B|\mathrm{A})$$



ベイズの定理

原因　→　結果　が分かっているときに

結果が起こったときの原因の確率を求める数学の定理

$$P(\text{原因}|\text{結果}) = \frac{P(\text{原因})P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果})}$$

$$= \frac{P(\text{原因})P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果}|\text{原因})+P(\text{結果}|\text{異なる原因})}$$

本授業の主役のベイズの定理

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})}{\mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(A|\neg\mathrm{B})\mathrm{P}(\neg\mathrm{B})}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(陽性|がん)=0.9, P(陽性|\neg がん)=0.1,$$
$$P(がん)=0.1$$

についてある人は，がん検診で陽性となった.

この人のがんの確率を求めよ。

例題 1

がん検診データ

$$\mathrm{P}(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, \mathrm{P}(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1,$$
$$\mathrm{P}(\text{がん})=0.1$$

についてある人は，がん検診で陽性となった.

この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$\mathrm{P}(\text{がん}|\text{陽性})$$
$$=\frac{\mathrm{P}(\text{陽性}|\text{がん})\mathrm{P}(\text{がん})}{\mathrm{P}(\text{陽性}|\text{がん})\mathrm{P}(\text{がん})+\mathrm{P}(\text{陽性}|\neg\text{がん})\mathrm{P}(\neg\text{がん})}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(陽性|がん)=0.9, P(陽性|\neg がん)=0.1,$$
$$P(がん)=0.1$$

についてある人は，がん検診で陽性となった.

この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(がん|陽性) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(陽性|がん)=0.9, P(陽性|\neg がん)=0.1,$$
$$P(がん)=0.1$$

についてある人は，がん検診で陽性となった.

この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(がん|陽性) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)} = 0.5$$

例題 1

がん検診データ

$$\mathrm{P}(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, \mathrm{P}(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1,$$

$$\mathrm{P}(\text{がん})=0.1$$

についてある人は，がん検診で陽性となった.

この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$\mathrm{P}(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)} = 0.5$$

⇒ 精密検査

データによる確率更新

P(がん)=0.1　事前確率

↓ 検査後

P(がん|陽性) = 0.5　事後確率

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事後確率

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事前確率

事後確率

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{\boxed{P(C_i)}P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事前確率　データの出る確率（尤度）

事後確率

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{\boxed{P(C_i)}\boxed{P(X|C_i)}}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事前確率　データの出る確率（尤度）

事後確率

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{\boxed{P(C_i)}\boxed{P(X|C_i)}}{\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}}$$

C_iについて定数

が成り立つ.

例題 2

メールに「セール」という単語がある(Sと書く)と スパムメール(Spamと書く) であることが多い.

今, $P(S \mid Spam) = 0.8$, $P(S \mid \neg Spam) = 0.1$, $P(Spam) = 0.1$ とする.

メールに「セール」という単語が入っていた. スパムメールである確率を求めてみよう.

回答

P(S | Spam) = 0.8 , P(S |¬Spam) = 0.1 ,
P(Spam) = 0.1より,

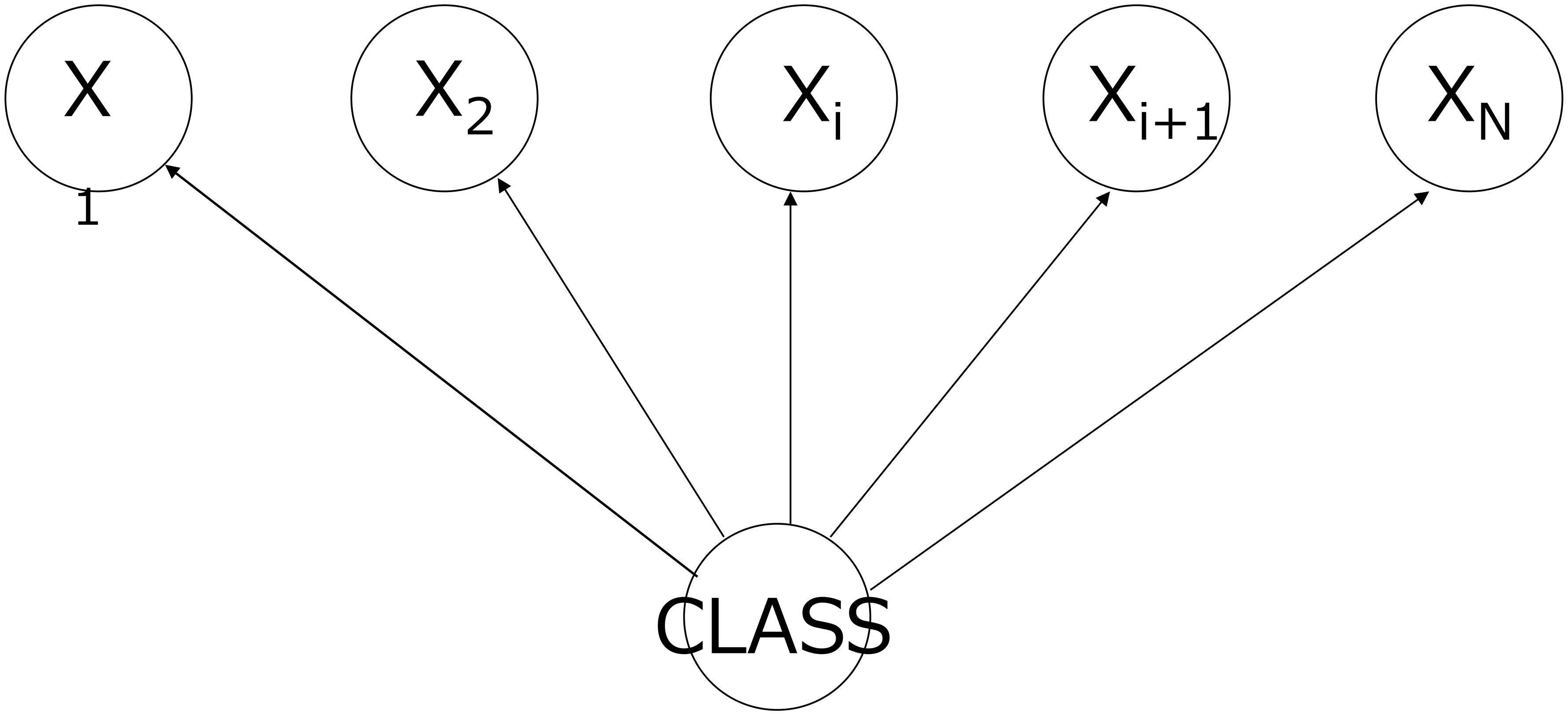
$$P(Spam|S) = \frac{P(Spam)P(S|Spam)}{P(Spam)P(S|Spam)+(1-\mathrm{P(Spam)})P(S|\neg\mathrm{Spam})}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.8}{0.1 \times 0.8 + (1 - 0.1) \times 0.1} = \frac{0.08}{0.17} ≒ 0.47$$

事前確率0.1から事後確率0.47になった！！

Naïve Bayes

G. Graham, “A plan for spam”, (2002)



モデル

$$p(class|x_1,\cdots,x_N)=\frac{p(x_1,\cdots,x_N|class)p(class)}{p(x_1,\cdots,x_N)}$$

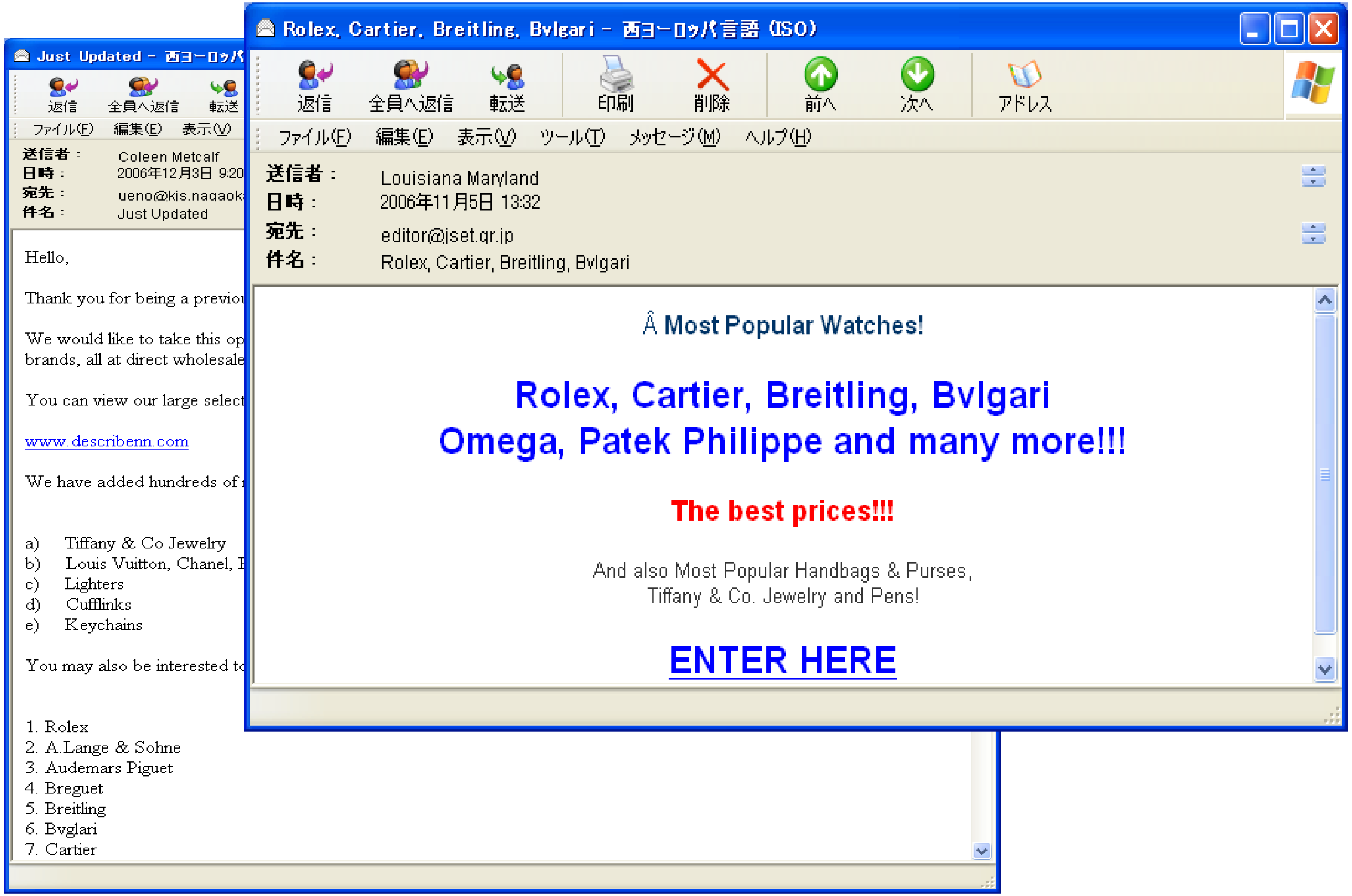
$$\approx\frac{p(class)}{p(x_1,\cdots,x_N)}\prod_{i=1}^{N}p(x_i|class)$$

$p(x_i|class)$ は、classでx_iが出現する文書数

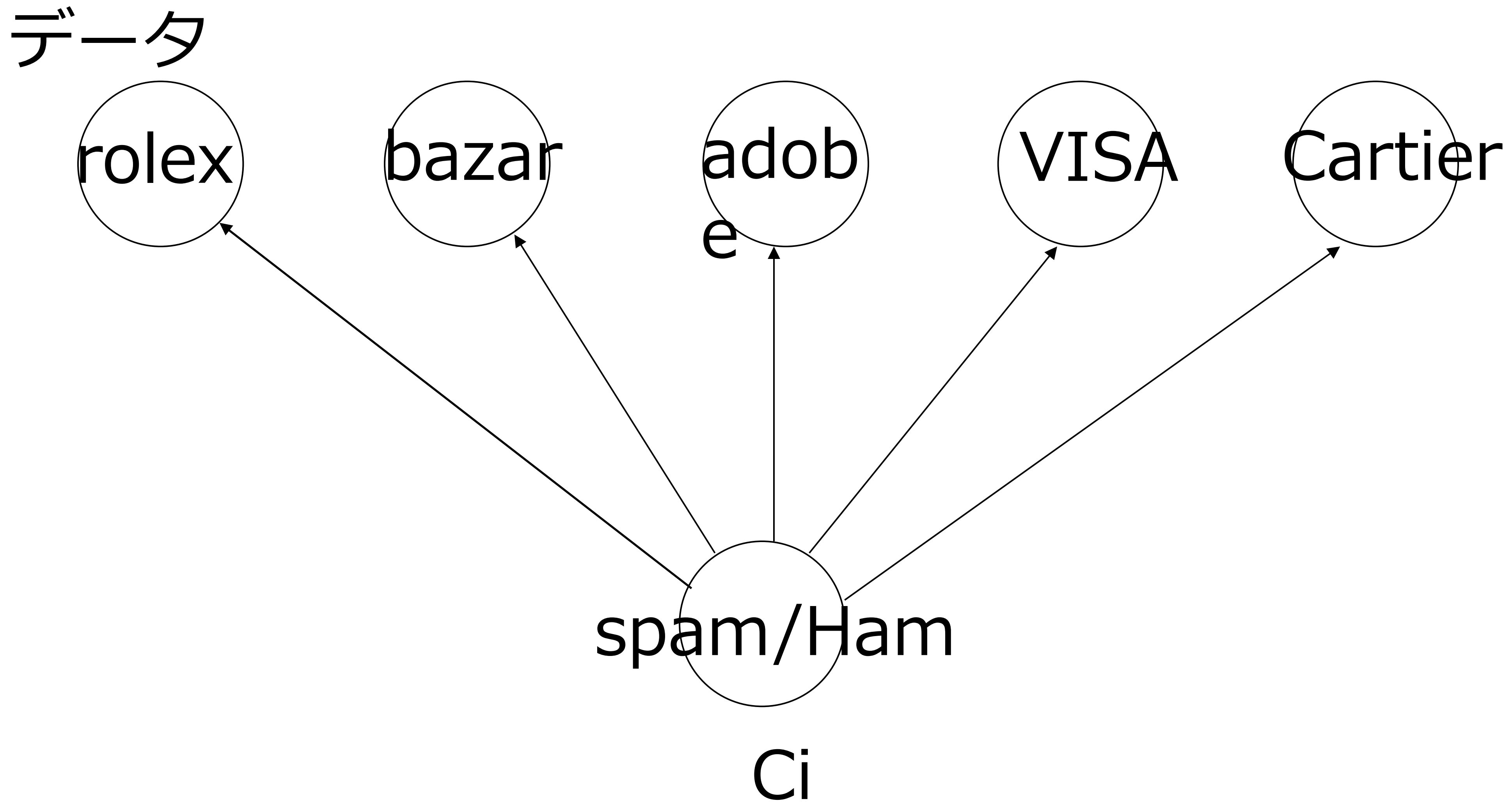
識別関数

$$g_{class} = \log p(class) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid class)$$

例：ベイジアン・フィルタリング



例：ベイジアン・フィルタリング



識別関数の比較判断

$$g_{spam} = \log p(spam) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid spam)$$

$$g_{ham} = \log p(ham) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid ham)$$

例題3

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象をA,少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象をBとし， $\mathrm{P}(B|A) = 1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.005$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

回答

$$\mathrm{P}(B|A) = 1.0,\ \mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5,\ \mathrm{P}(A) = 0.005$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A)\mathrm{P}(B|A)}{\sum_A P(A)\mathrm{P}(B|A)}$$

$$= \frac{0.005 \times 1.0}{0.005 \times 1.0 + (1 - 0.005) \times 0.5} = \frac{0.005}{0.5025}$$

$$\fallingdotseq 0.01$$

約２倍になった！！

例題 4

同じようなもう一人のうそつき少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう.

$\mathrm{P}(B|A) = 1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.01$とする.

回答

$$\mathrm{P}(B|A) = 1.0,\ \mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5,\ \mathrm{P}(A) = 0.01$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A)\mathrm{P}(B|A)}{\sum_A P(A)\mathrm{P}(B|A)}$$

$$= \frac{0.01 \times 1.0}{0.01 \times 1.0 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.01}{0.505}$$

$$\fallingdotseq 0.019802 \fallingdotseq 0.02$$

約２倍になった！！

例題 5

この後、違う嘘つき少年20人が独立に「オオカミが来た」と叫んだ（B’と書く）！！

オオカミが来ている確率P(A|B’)を求めてみよう.

$\mathrm{P}(B|A) = 1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.02$とする.

回答

$\mathrm{P}(B|A) = 1.0,\ \mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5,\ \mathrm{P}(A) = 0.02$ より

$$\mathrm{P}(A|\mathrm{B'}) = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)^{20}}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)^{20} + \mathrm{P}(\neg A)\mathrm{P}(B|\neg A)^{20}}$$

$$= \frac{0.02 \times 1.0^{20}}{0.02 \times 1.0^{20} + (1 - 0.02) \times 0.5^{20}}$$

$$= 0.9999$$

例題6 設定を変えよう

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象をA,少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象をB とし，$\mathrm{P}(B|A)$ =0.4, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.01$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

回答

- $\mathrm{P}(B|A)$ =0.4, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.01$より,
- $\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A)\mathrm{P}(B|A)}{\sum_{A \neg A} P(A)\mathrm{P}(B|A)} = \frac{0.01 \times 0.4}{0.01 \times 0.4 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.004}{0.499} \doteqdot 0.008016$
- 約８割になった！！

まとめ

ベイズの定理

データXが得られたときのC_iの確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$