

12.写像と関係

二項関係、関係行列、グラフによる表現

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

本授業の構成

- 第1回 10月7日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月21日：第3回 命題論理
- 第4回 10月28日：第4回 述語論理
- 第5回 11月4日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月11日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月18日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 12月2日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月9日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月16日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月23日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 1月6日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、
グラフによる表現
- 第13回 1月20日：第13回 同値関係
- 第14回 1月27日：第14回 順序関係：半順序集合、
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 2月3日：第15回 期末試験

1. 本日の目標

- ① 関係（二項関係）
- ② 関係と写像
- ③ グラフによる表現
- ④ 関係行列
- ⑤ 有向グラフと無向グラフ
- ⑥ 隣接集合と隣接行列
- ⑦ 木、完全グラフ、クリーク
- ⑧ 2部グラフ

1. 関係（二項関係）

再掲 5 章：

Def 1.

二つの集合 U, V の直積集合 $U \times V$ の部分集合 R を U から V への「（二項）関係」という.

また, $R \ni (a, b)$ のとき aRb : a と b は関係ある
 $R \not\ni (a, b)$ のとき $a \nexists b$: a と b は関係なし
と書く.

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への関係 R は以下のうちどれか?

$$R = \{(a, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への関係 R は以下のうちどれか?

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), \\ (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への関係 R は以下のうちどれか?

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \quad \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への関係 R は以下のうちどれか?

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \quad \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), \\ (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \quad 8$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への関係 R は以下のうちどれか?

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \quad \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \quad 9$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への関係 R は以下のうちどれか?

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \quad \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \quad \bigcirc$$

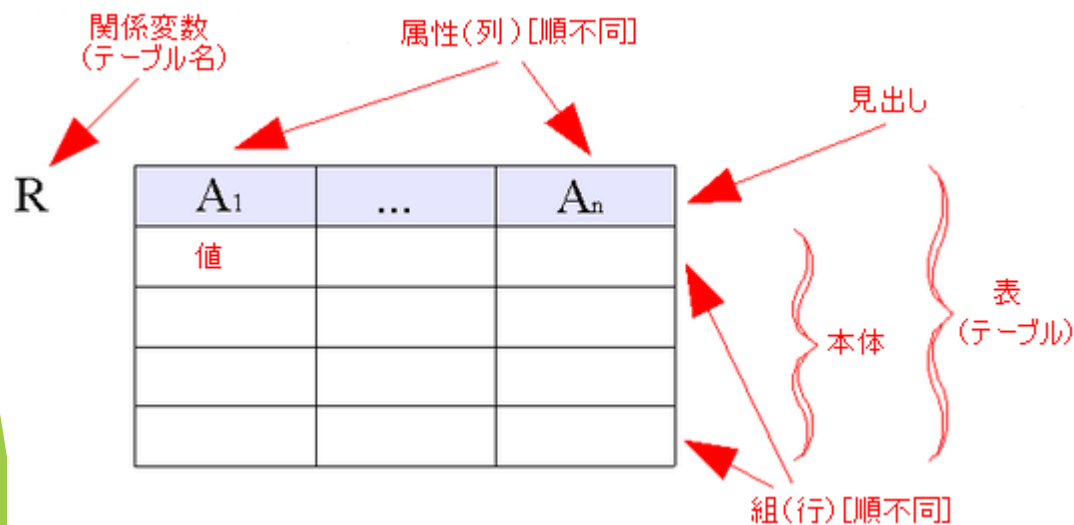
$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \quad \times$$

参考：データベースと n 項関係

データベース理論における関係モデルでは、関係の概念を n 項に拡張している.

すなわち, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ の部分集合として定義される. 関係モデルの基礎的な要素は定義域、instance ドメインである.



2. 関係の述語による内包的記述による定義

Def2.

自由変数 $(a, b) \in U \times V$ についての **2変数述語**

$P(a, b): R \ni (a, b)$ の真理集合
 $\{(a, b) | P(a, b)\}$

または

aRb の **真理集合** $\{(a, b) | aRb\}$

を U から V への「関係」, もしくは「二項関係」という.

3. 関係による写像の定義

Def 3.

自由変数 $(a, b) \in U \times V$ についての述語 aRb が各 a に対して一つの b が対応するとき,

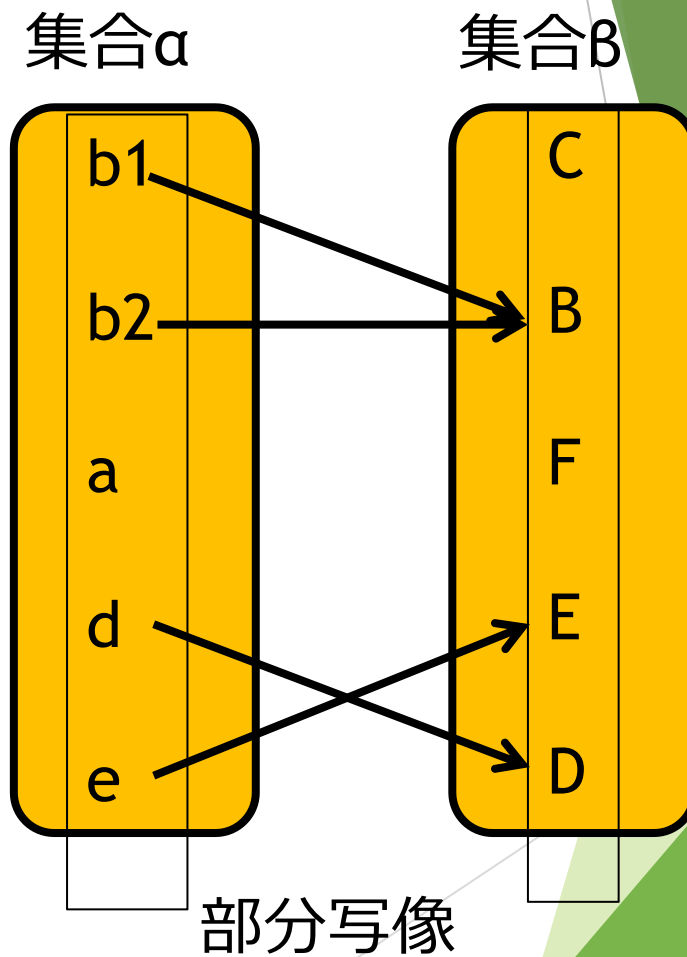
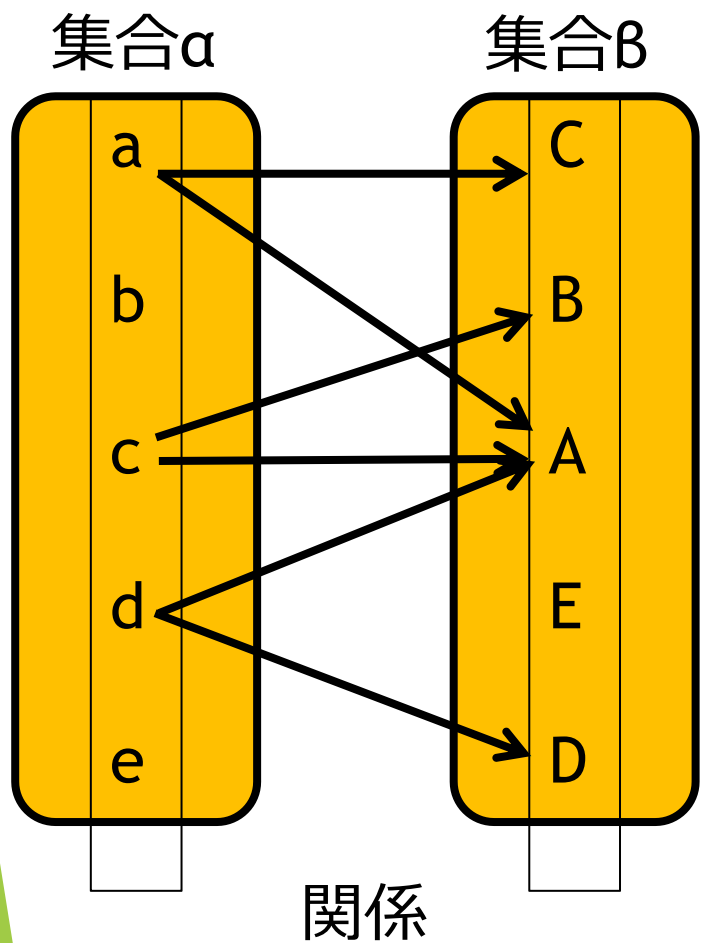
$$\{(a, b) | aRb\}$$

を U から V への「写像」と呼ぶ.

写像の中で対応する b がない a を許す場合, U から V への「部分写像」と呼ぶ.

写像は、関係の特殊なケース.

「関係」の図示表現 (関係を→で示す)



例題

以下は関係か？ 関係
の場合，部分写像か？

関係

写像

- (1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$
- (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$
- (3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$
- (4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$
- (5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \text{は} y \text{の約数}$

例題

以下は関係か？ 関係
の場合，部分写像か？

関係

写像

- (1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$
- (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$
- (3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$
- (4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$
- (5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \text{は} y \text{の約数}$

○

○

例題

以下は関係か？ 関係
の場合，部分写像か？

関係

写像

- (1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$
- (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$
- (3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$
- (4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$
- (5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \text{は} y \text{の約数}$

○

○

○

○

例題

以下は関係か？ 関係
の場合，部分写像か？

	関係	写像
(1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \text{は} y \text{の約数}$		

例題

以下は関係か？ 関係
の場合，部分写像か？

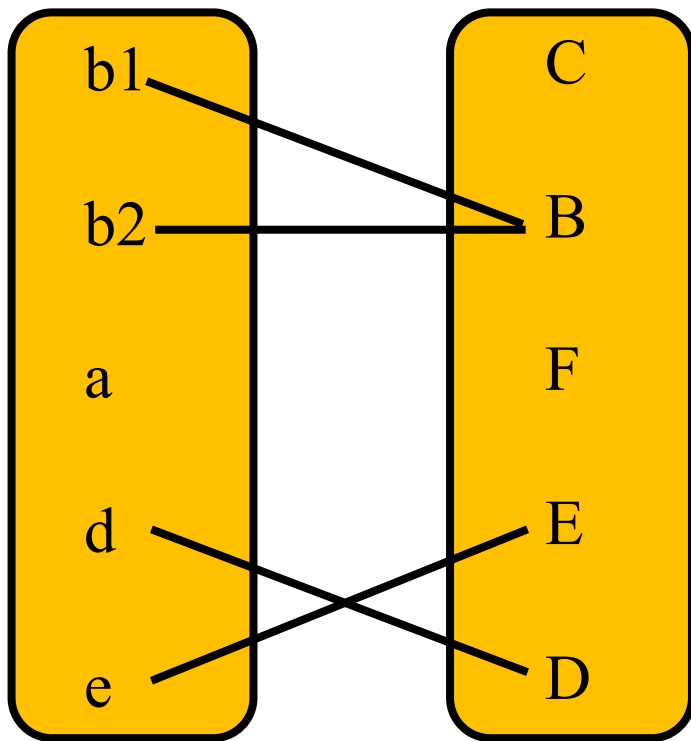
	関係	写像
(1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \text{は} y \text{の約数}$		

例題

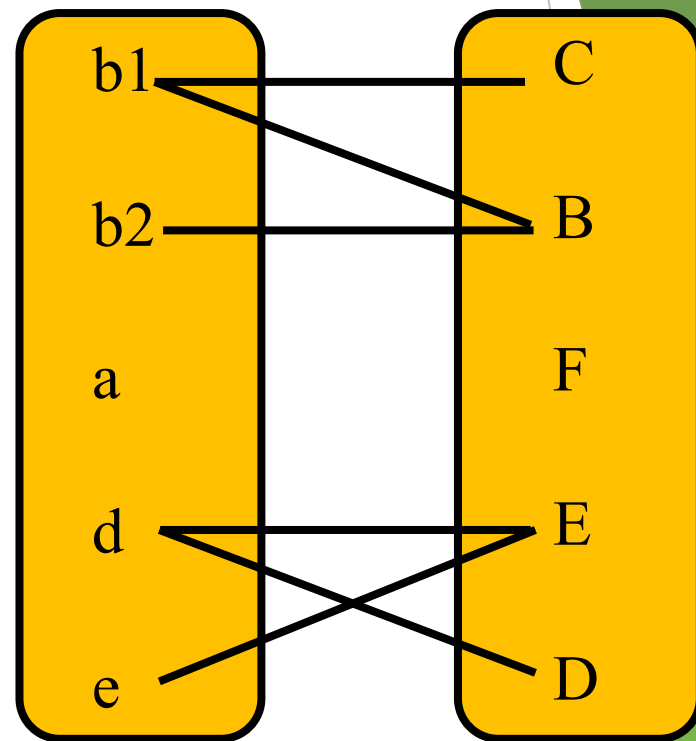
以下は関係か？ 関係
の場合，部分写像か？

	関係	写像
(1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \text{は} y \text{の約数}$	○	×

関係は部分写像の一般化



部分写像



関係

4. 関係行列

Def 4

二つの集合を $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$,
 $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ として, A から B へ
の関係行列は $R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \dots, m, j =$
 $1, \dots, n)$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1: a_i R b_j \text{ のとき} \\ 0: a_i \not R b_j \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義される.

例題 1

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

例題 1

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例題 2

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への次の関係
行列を書け。

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

例題 2

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への次の関係
行列を書け。

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例題 3

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

例題 3

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき, U から V への次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 上への関係

Def 5

集合 A から A の関係を, 「 A 上の関係」
(または「中の関係」) と呼ぶ.

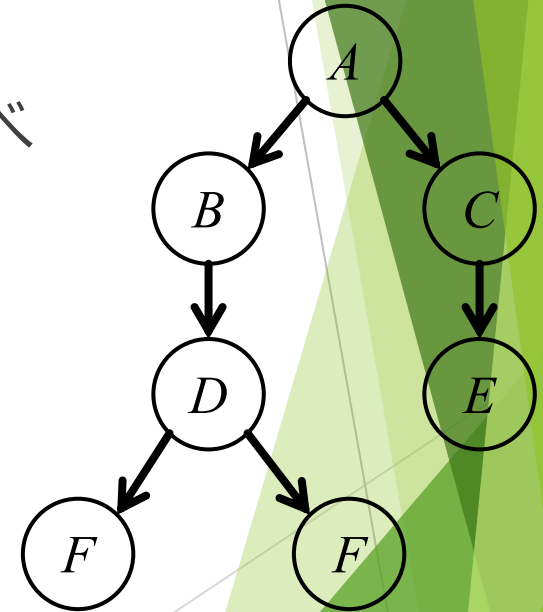
グラフによる関係の表現

Def 6

グラフ $G = (V, E)$ は二つの集合 V と E によって定義され, V は頂点 (Vertex) (または, 節点・ノード) の有限集合 $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ で, E は辺 (edge) (または枝、アーク) 集合である. さらに, グラフは個々の頂点における二つの組を結合したすべての可能性のある集合の部分集合である.

Def 7

$G = (V, E)$ をグラフとする. $E_{ij} \in E$ かつ $E_{ji} \notin E$ のとき, 枝 E_{ij} を **有向辺** (directed edge) と呼ぶ. V_i と V_j の有向辺は $V_i \rightarrow V_j$ と書く.



有向グラフと無向グラフ

Def 8

$G = (V, E)$ をグラフとする. $E_{ij} \in E$ かつ $E_{ji} \in E$ のとき, 辺 E_{ij} を **無向辺** (undirected edge) と呼ぶ. V_i と V_j の無向辺は $V_i - V_j$ または $V_j - V_i$ と書く.

Def 9

すべての辺が有向辺のグラフを **有向グラフ** (directed graph) と呼び, すべての辺が無向辺のグラフを **無向グラフ** (undirected graph) と呼ぶ.

例

有向グラフと無向グラフの例を図(a), (b) にそれぞれ示している.

有向グラフ(a) では, グラフは以下で与えられ,

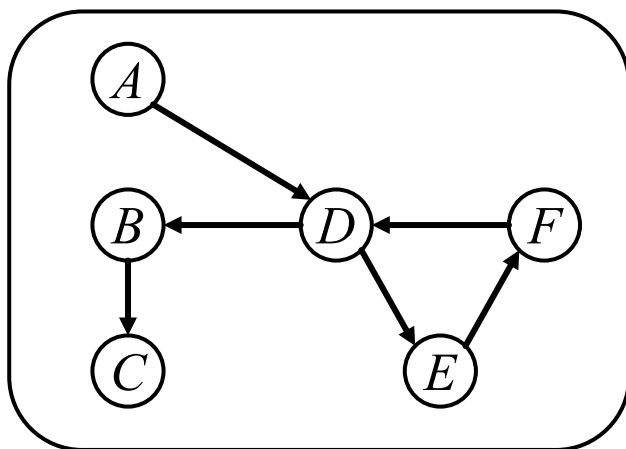
$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{A \rightarrow D, B \rightarrow C, D \rightarrow B, F \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow F\}$$

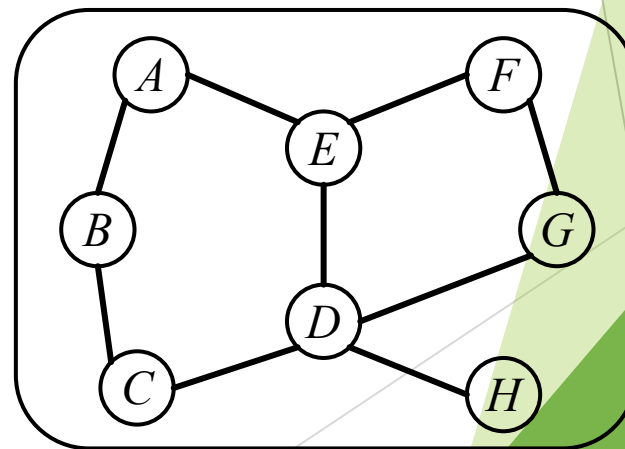
無向グラフ(b) では, グラフは以下で与えられる.

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$E = \{A - B, B - C, C - D, D - E, E - A, E - F, F - G, G - D, D - H\}$$



(a)



(b)

二項関係とグラフは同値

有向グラフ $G = (V, E)$ において,
 $E \subseteq V^2$ であり, E は V 上の二項関係

$\Leftrightarrow$

有限集合上の二項関係が定義されていると, 二項関係を普遍集合の部分集合とみなせるので、有向グラフで表現できる

$\Leftrightarrow$ 「有限集合上の二項関係」

$\Leftrightarrow$ 「有向グラフ」

A上の関係Rのグラフ表現

A上の関係Rのグラフ表現を
頂点集合をAとして,

aRb であるときのみ, $a \rightarrow b$ とい
う有向辺による有向グラフで表現
する。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

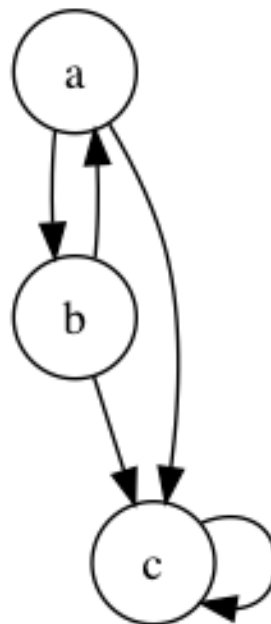
集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ を有向グラフで示せ。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ を有向グラフで示せ。

[解答]



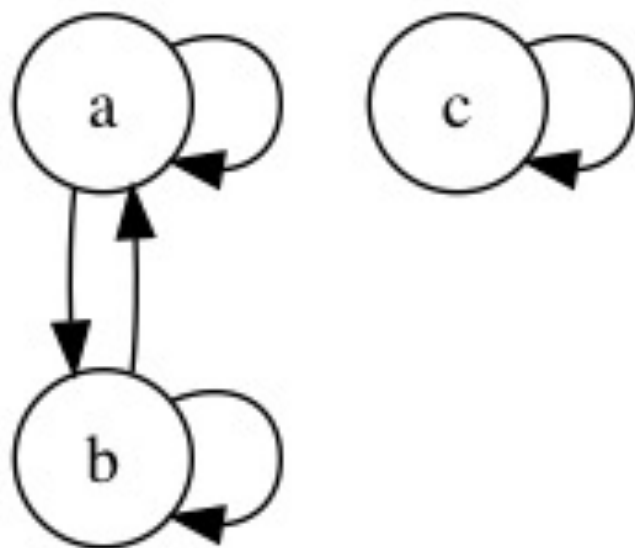
例題2

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ を有向グラフで示せ。

例題2

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ を有向グラフで示せ。

[解答]



6. A 上の関係の関係行列

Def 10

集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ 上の関係の関係行列は $R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m)$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1: a_i R a_j \text{ のとき} \\ 0: a_i \not R a_j \text{ のとき} \end{cases}$$

として定義される.

例題1

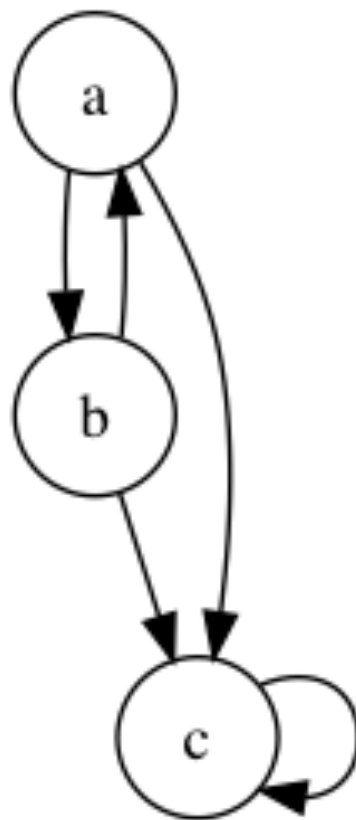
集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

例題1

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題2

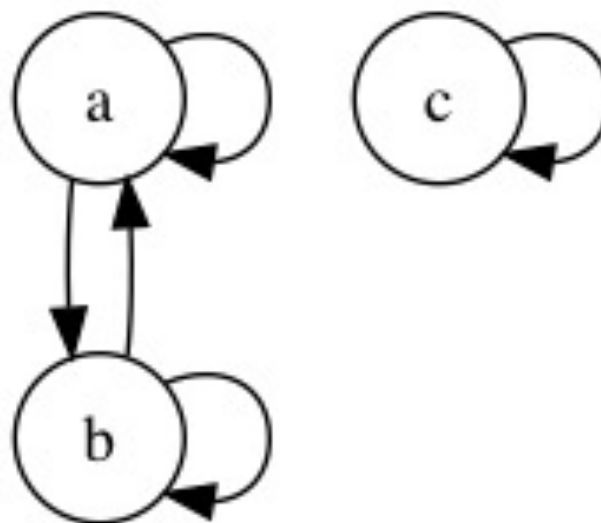
集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

例題2

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題3

$A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 R について, 次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (d, a), (d, d)\}$$

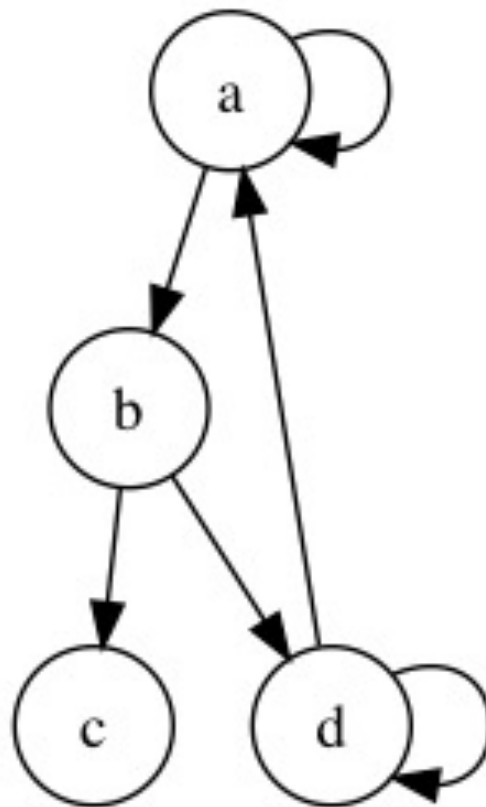
例題3

$A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 R について, 次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (d, a), (d, d)\}$$

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



7. 具体的な関係

例題 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 R について

$R \ni (a, b)$ のとき aRb : a は b の約数である
とすると, 関係行列と有向グラフを書け。

7. 具体的な関係

例題 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 R について

$R \ni (a, b)$ のとき aRb : a は b の約数である
とすると, 関係行列と有向グラフを書け。

[ヒント] Def

$(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ に対して,

$$\exists m \in \mathbb{N}^+, s. t. a = bm$$

のとき, a は b の約数であるという。

7. 具体的な関係

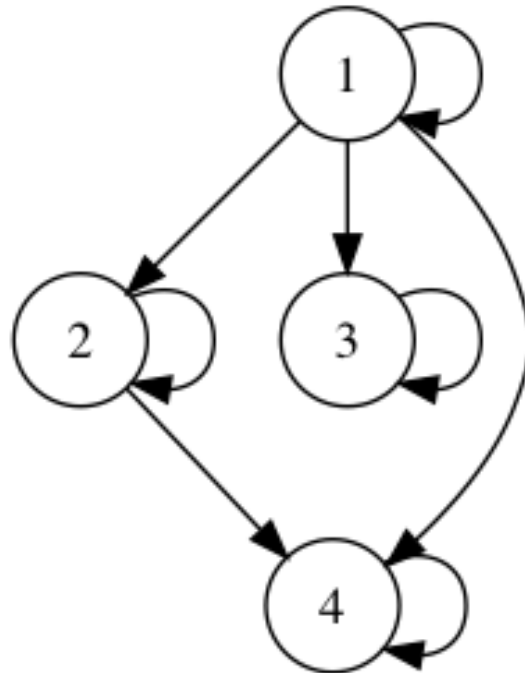
例題 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 R について

$R \ni (a, b)$ のとき aRb : a は b の約数である
とすると, 関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題 2

$A = \{a, b\}$ の冪集合 2^A 上の関係 R について
 $X, Y \in 2^A$ のとき $XRY : X \subseteq Y$ とすると,
関係行列と有向グラフを書け。

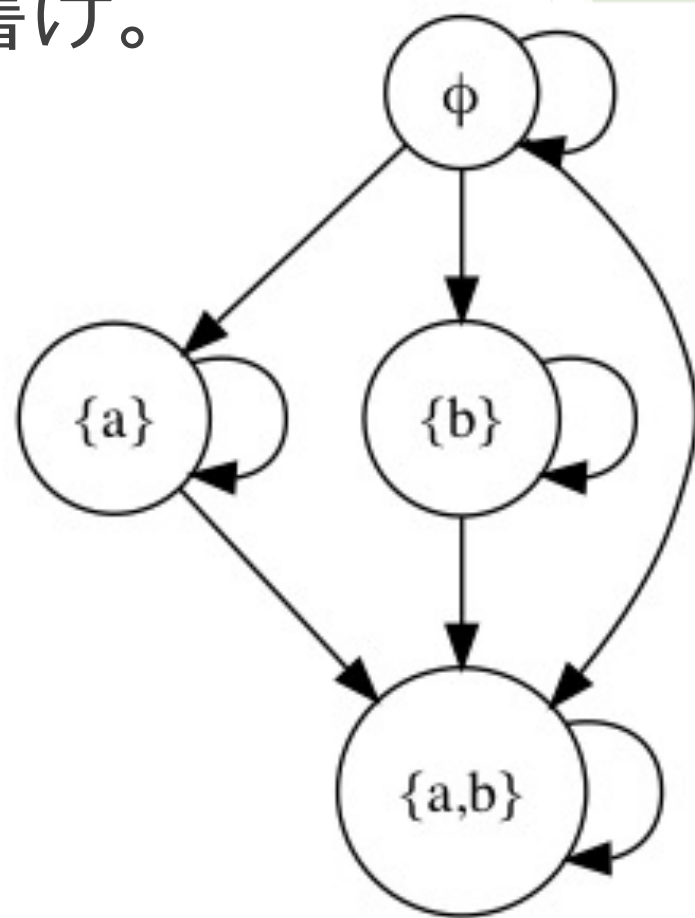
例題 2

$A = \{a, b\}$ の冪集合 2^A 上の関係 R について
 $X, Y \in 2^A$ のとき $XRY : X \subseteq Y$ とすると、
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題3

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 R について

$x, y \in A$ のとき $xRy : x < y$ とすると,
関係行列と有向グラフを書け。

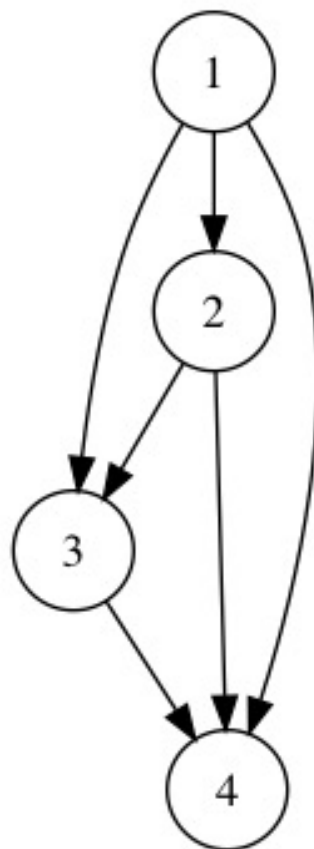
例題3

$A = \{1,2,3,4\}$ 上の関係 R について

$x, y \in A$ のとき $xRy : x < y$ とすると、
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



ここから グラフ理論の基礎を学びます

9. 隣接頂点集合

Def 11

$G = (V, E)$ について, V_i の隣接頂点集合 (adjacency vertexes set) は, V_i から直接辺が引かれた頂点集合

$Adj(V_i) = \{V_j \in V | E_{ij} \in E\}$ を示す.

Def 12

グラフ G で V_i に接続する辺の数を V_i の次数といい, $d(V_i)$ と書く.

Th. 1

$G = (V, E)$ について,

$V = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N\}$ で辺の数が q のとき,

$$\sum_{i=1}^N d(V_i) = 2q$$

Th. 1

$G = (V, E)$ について, $V = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N\}$
で辺の数が q のとき,

$$\sum_{i=1}^N d(V_i) = 2q$$

[証明] 一つの辺は次数としてはかならず両端を含めて2と数えられるので, $\sum_{i=1}^N d(V_i) = 2q$



隣接行列

Def 12

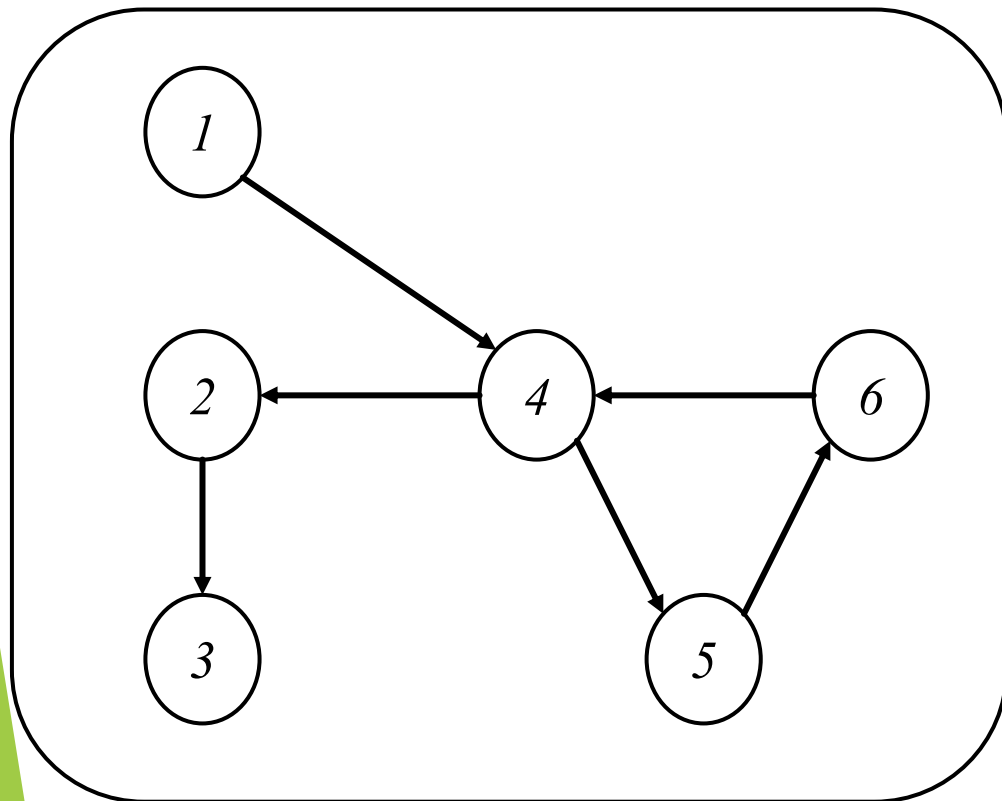
$G = (V, E)$ について, $V = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N\}$

のとき, 以下の行列

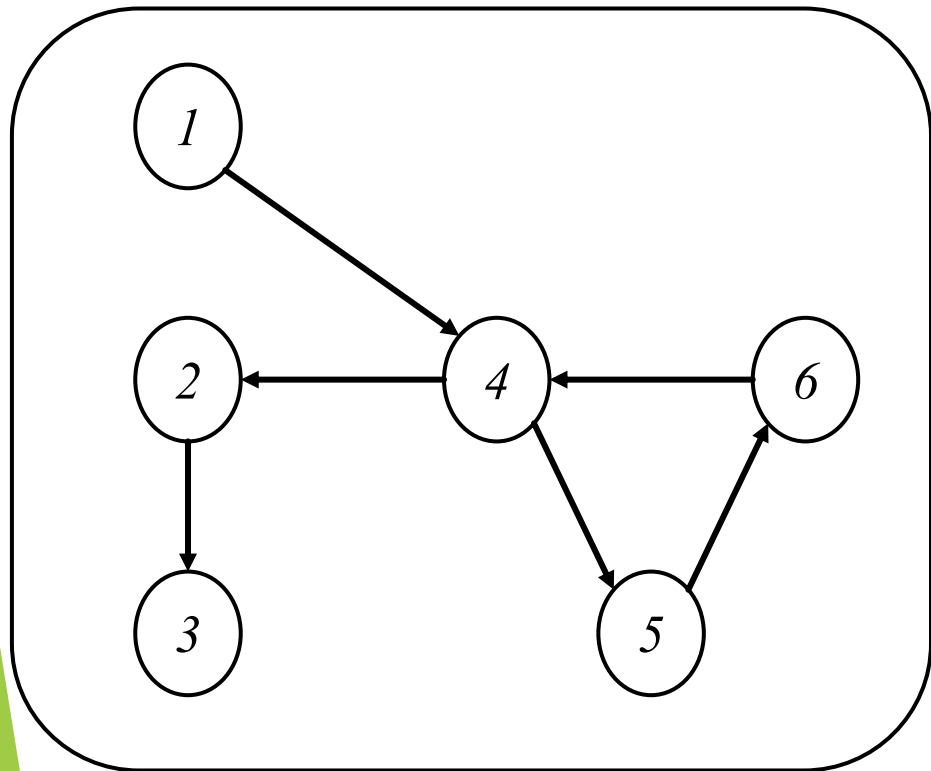
$$R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N)$$

$r_{ij} = V_i$ と V_j を結ぶ辺数
を G の隣接行列と呼ぶ。

例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Th. 2

関係行列は，二頂点間の辺があるかないかを示した隣接行列である。

10.経路

Def. 13 V_i から V_j への**経路**は, $V_{i_1} = V_i$ で始まり, $V_{i_r} = V_j$ で終わるような以下を満たす順序化された頂点集合 $(V_{i_1}, \dots, V_{i_r})$ を示す.

$$V_{i_{k+1}} \in Adj(V_{i_k}). \quad (k = 1, \dots, r - 1)$$

10.道と路、閉路

Def.14すべての頂点が異なる経路を**道(path)**と呼ぶ.

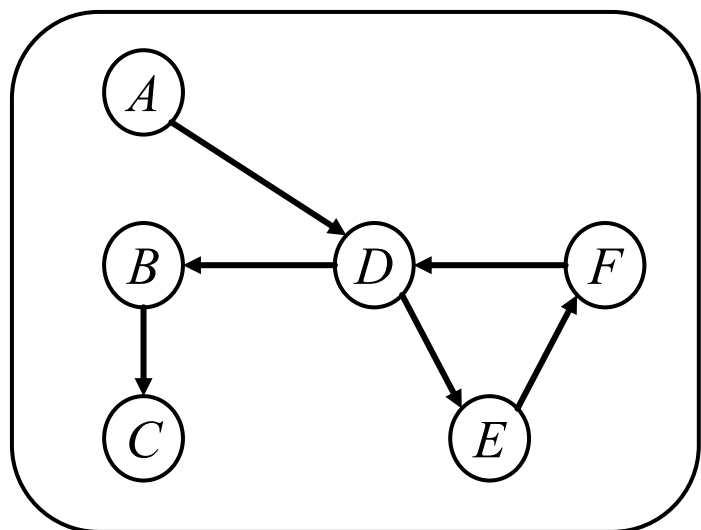
すべての辺が異なる経路を**路(trail)**と呼ぶ.

Def.15始点と終点が同じ頂点となる場合
(すなわち, $V_{i_1} = V_{i_r}$), 路 $(V_{i_1}, \dots, V_{i_r})$
は**閉路** (closed path) と呼ばれる.

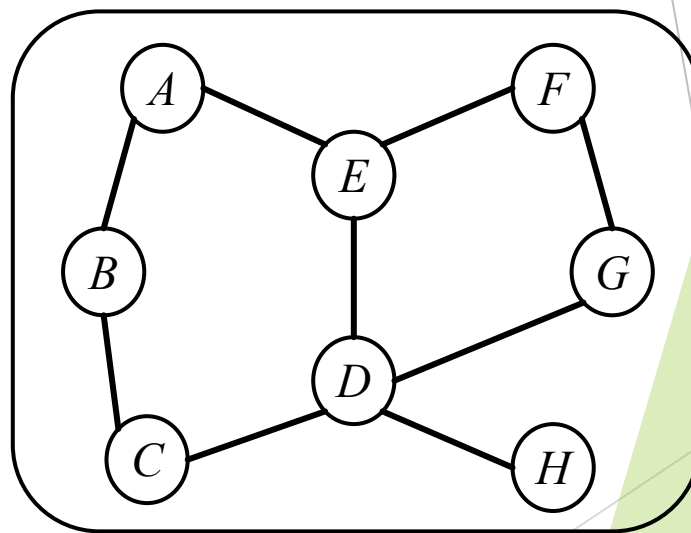
例

有向グラフ(a)の経路 $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ は**閉路**である.

無向グラフ(b)の経路 $A - B - C - D - E - A$ は**閉路**である.



(a)



(b)

Th. 3

$G = (V, E)$ について,
 $\forall V_i \in V, d(V_i) \geq 2$ のとき, 必ず G
は閉路を含む.

Th. 4

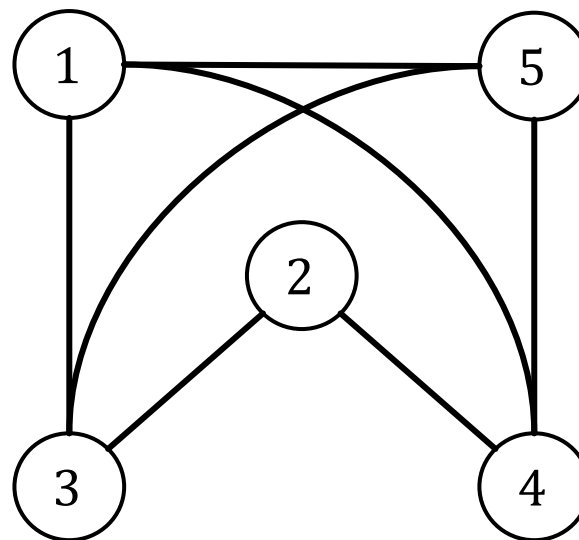
$G = (V, E)$ について, 隣接行列を R とする.

R^n の (i, j) 成分は長さ n の $V_i - V_j$ の経路の数に等しい.

例題

$G = (V, E)$ について, 以下の隣接行列 R を持つ. 長さ3の $V_1 - V_4$ の経路の数を求めよ.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Def 16 同型

二つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ について,

$$V = V' \quad \wedge \quad E = E'$$

のとき,二つのグラフは同型であるいう。

$$G \cong G'$$

と書く.

11. 完全グラフと完全集合

Def 17

すべての頂点間に辺が張られた無向グラフを**完全グラフ** (complete graph) と呼ぶ. N 頂点の完全グラフを K_N と示す.

Def 18

グラフ G の部分頂点集合 S が, すべての頂点間に辺が張られている場合, S を**完全集合** (complete set) と呼ぶ.

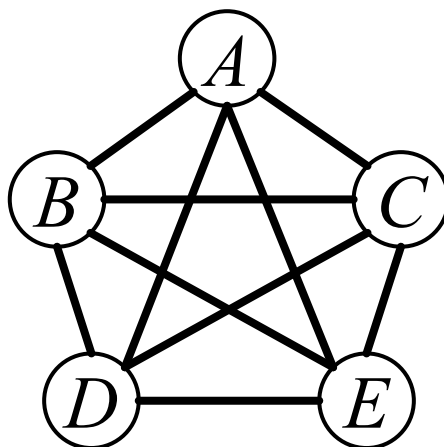


図 完全グラフ K_5

12. クリーク

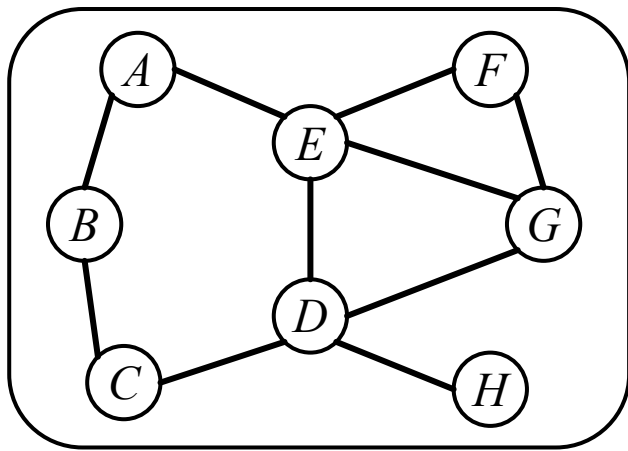
Def 19

完全集合 C が他のどの完全集合の部分集合にもなっていない場合、すなわち、最大の完全集合である場合、 C を **クリーク** (clique) と呼ぶ。

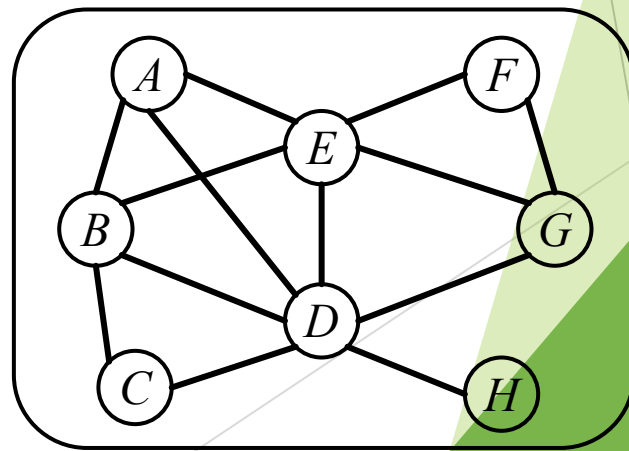
例

図は、二つの異なるグラフのクリークを示している。グラフ(a)は、クリーク $C_1 = \{A, B\}$, $C_2 = \{B, C\}$, $C_3 = \{C, D\}$, $C_4 = \{D, H\}$, $C_5 = \{A, E\}$, $C_6 = \{D, E, G\}$, $C_7 = \{F, E, G\}$ を含む。

グラフ(b)は、クリーク $C_1 = \{A, B, D, E\}$, $C_2 = \{B, C, D\}$, $C_3 = \{D, H\}$, $C_4 = \{D, E, G\}$, $C_5 = \{E, F, G\}$ を含む。



(a)



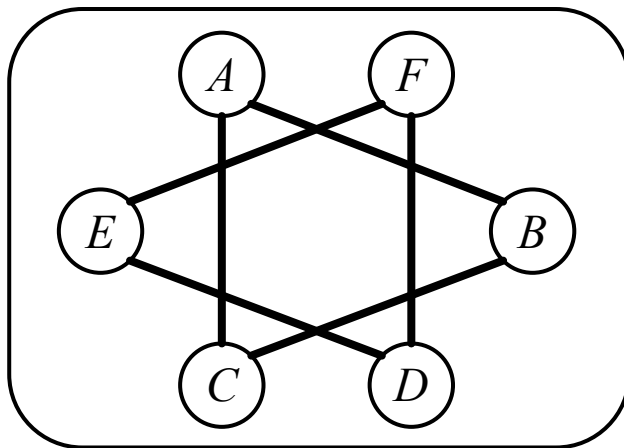
(b)

Def. 20 連結グラフと非連結グラフ

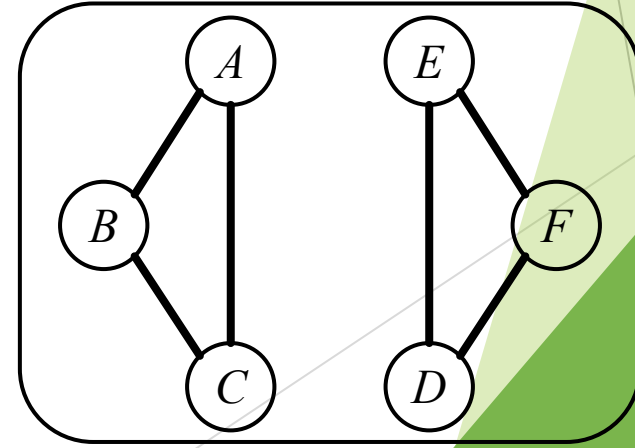
無向グラフのすべての二つの頂点間で少なくとも一つの道が存在するとき、**連結グラフ** (connected graph) と呼ぶ。それ以外を**非連結グラフ** (disconnected graph) と呼ぶ。

例18

図は、同じ構造をもつ非連結グラフの異なる二つの表現である。図(a)はエッジが交差しており、非連結には見えないが、図(b)のように交差を外し、分離すればより非連結性が強調される。



(a)



(b)

Def. 21 木

閉路を持たない連結グラフ T を木 (tree) とよぶ.

Th. 5 木

$T = (V, E)$ の $\forall V_i \forall V_j \in V$ について, V_i と V_j を結ぶただ 1 つの道が存在する.

Th. 6 木

$T = (V, E)$ は連結であり, どの辺を除いても連結ではなくなる.

Th. 7 木

$T = (V, E)$ は閉路を持たず、 辺をどのように一つ加えても閉路を一つ持つグラフになる.

Th. 8

N 個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は , $N-1$ 個の辺を持つことである.

N 個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は、 $N-1$ 個の辺を持つことである。

[証明] 数学的帰納法を用いる。

(1) 頂点数が2のとき、辺が1つで木である。

(2) 頂点数が N のとき、木の必要十分条件は $N-1$ 個の辺であるとする。

頂点数が $N+1$ のとき、閉路を持たない連結グラフになるように1つの辺を $N+1$ 番目の頂点とそれ以外の1つの頂点の間に加えなければならない。このとき、頂点数-1の辺が存在することになる。

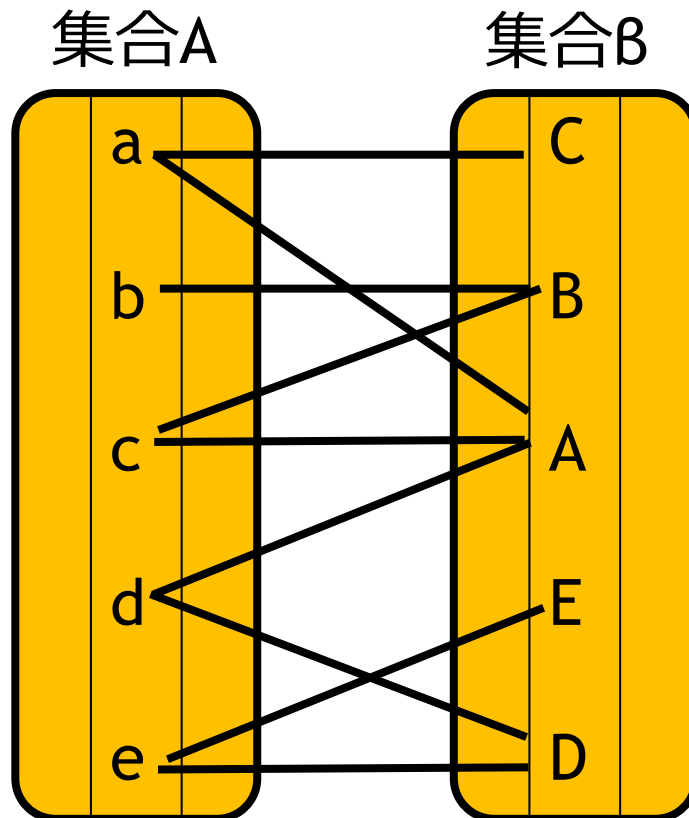
Def 22. 2部グラフ

$G = (V, E)$ とし, E の要素である辺は
 $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \emptyset, (V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset)$
となるような V の部分集合 V_1, V_2 の頂点を
結ぶようにできるとき, G を2部グラフと
呼ぶ.

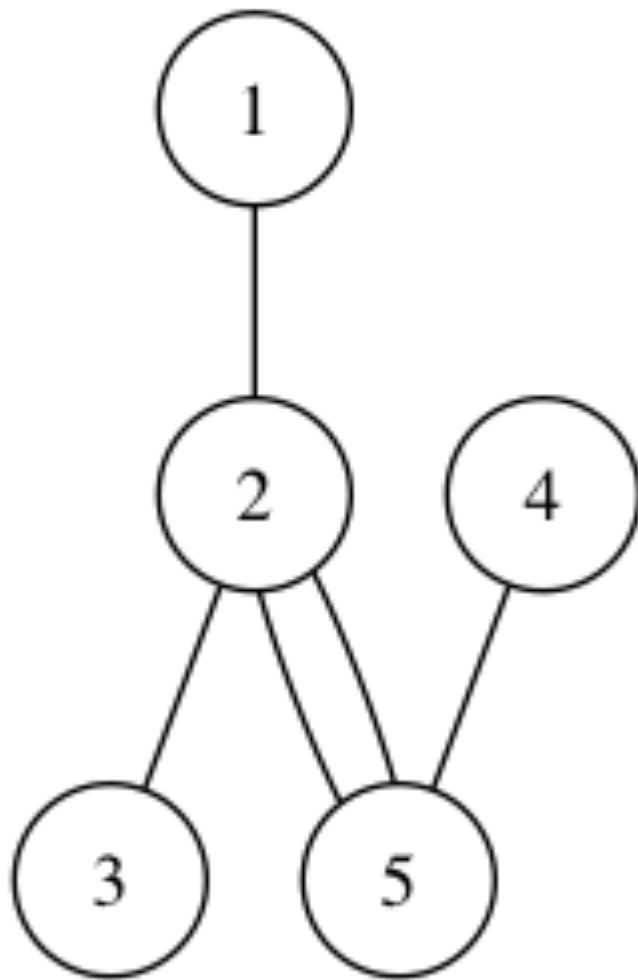
さらに V_1 と V_2 のすべての頂点が互い
に結ばれてる2部グラフを, 完全2部グラ
フと呼び, $K(m, n)$ で示す. $m = |V_1|, n =$
 $|V_2|$.

2部グラフとは

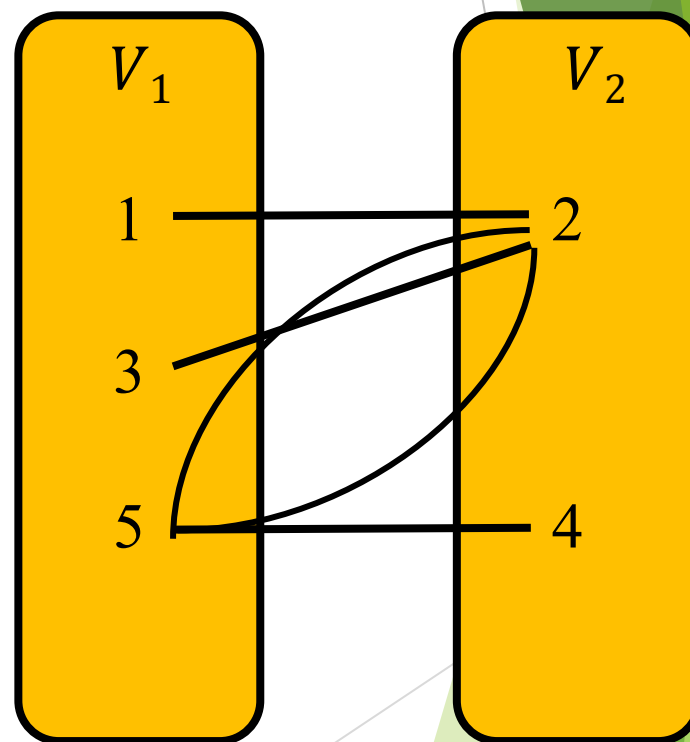
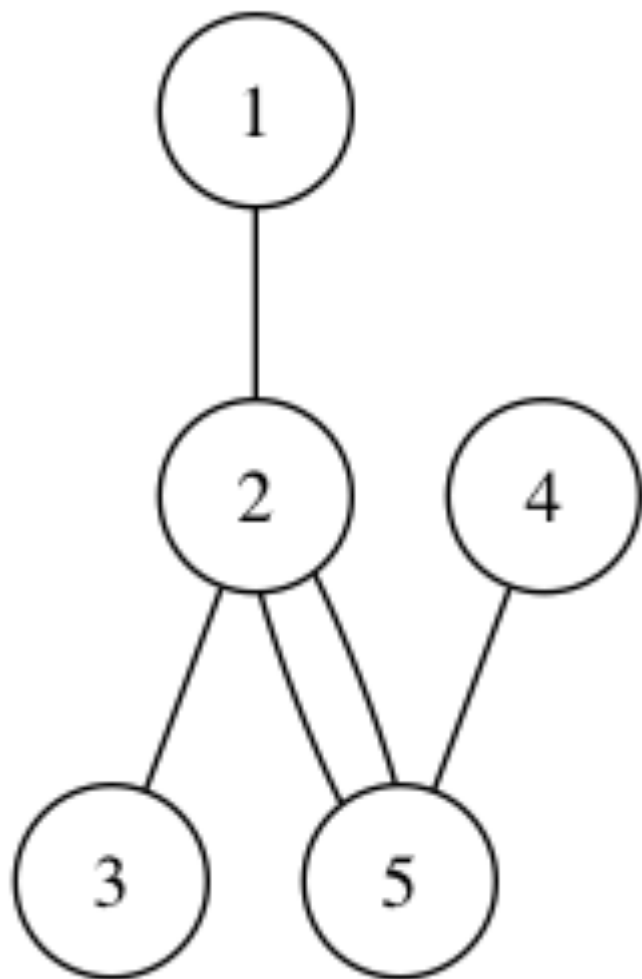
頂点集合を二つの部分集合に分割して各集合内の頂点同士の間には辺が無いようにできるグラフ



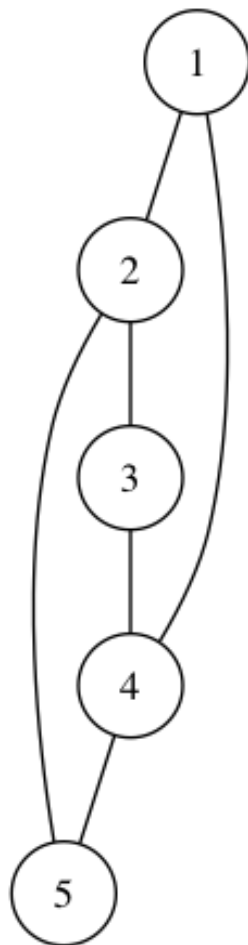
例題 1 以下のグラフは2部グラフか。



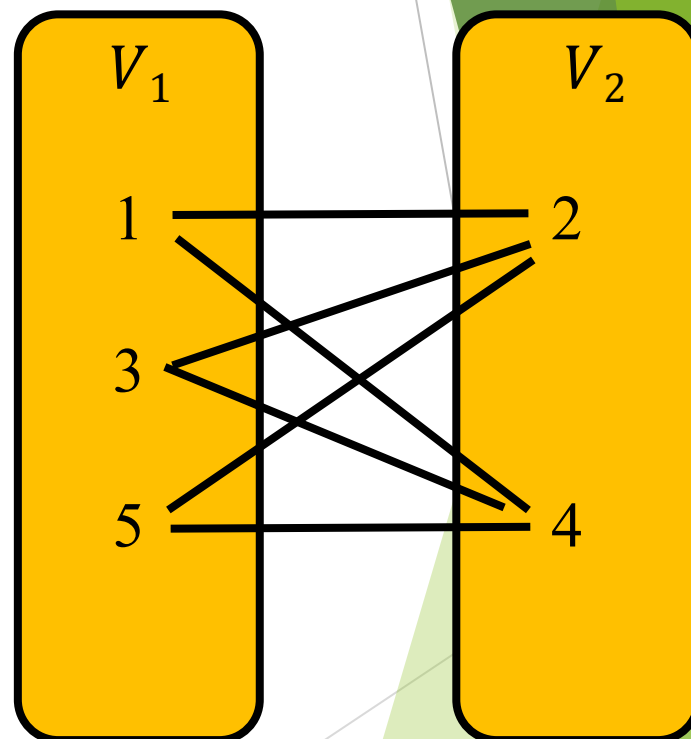
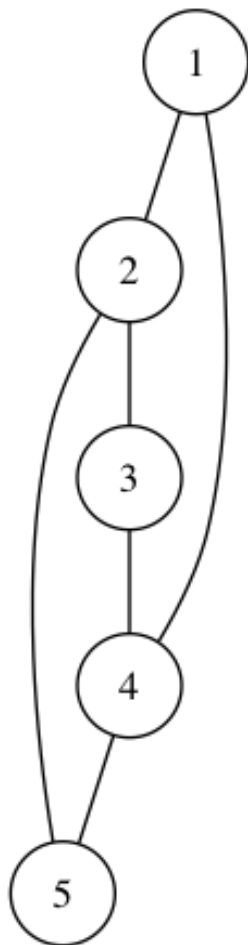
例題 1 以下のグラフは2部グラフか。



例題 2 以下のグラフは2部グラフか。



例題 2 以下のグラフは2部
グラフか。



完全2部グラフ $K(3,2)$

Def 23 オイラーグラフ

すべての辺を含む路を持つグラフを周遊可能なグラフという。(一筆がきが可能)

すべての辺を含む閉じた路を持つ連結グラフをオイラーグラフと呼ぶ。

(周遊可能なグラフの中で始点と終点が同じもの)

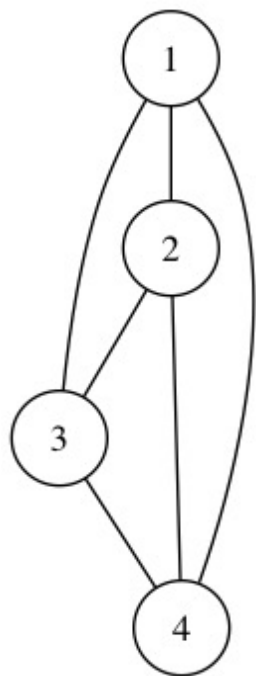
Th 9

連結グラフ G がオイラーグラフであるための必要十分条件は、 G の頂点がすべて偶頂点（次数が偶数である頂点）であることである。

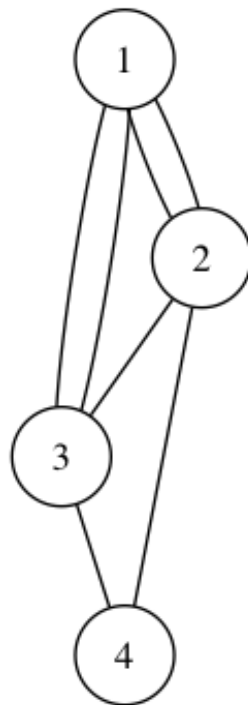
周遊可能なグラフの必要十分条件は、 G の頂点がすべて偶頂点か同じ奇頂点が2個存在することである。

例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

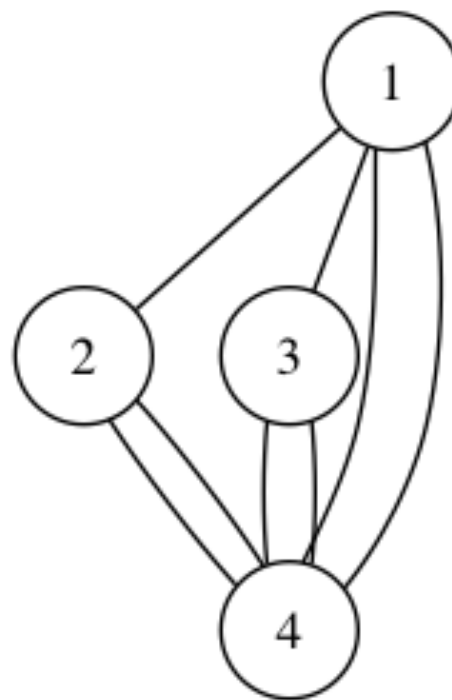
(1)



(2)

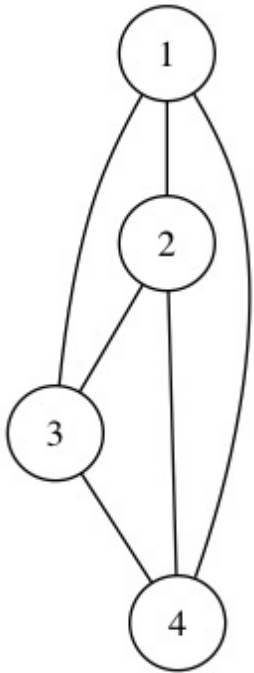


(3)

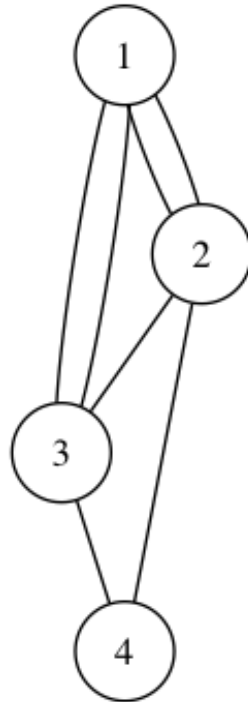


例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

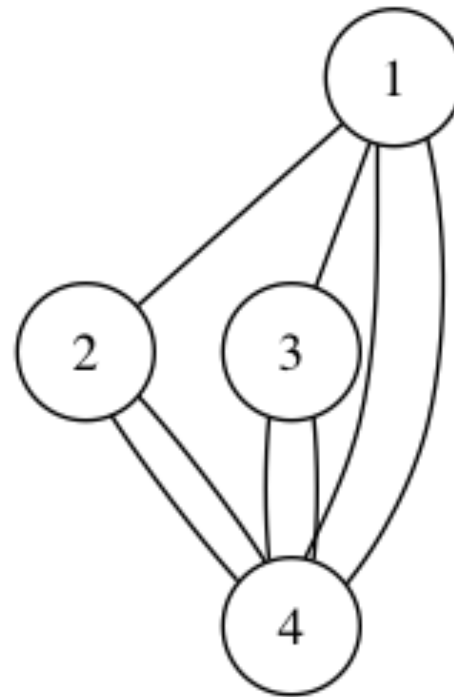
(1)



(2)



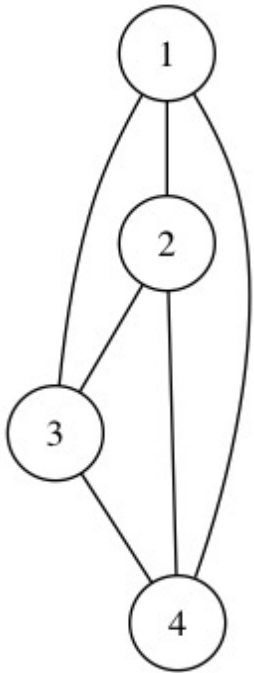
(3)



すべて次数が3で
周遊可能でなく、
オイラーグラフ
でない。

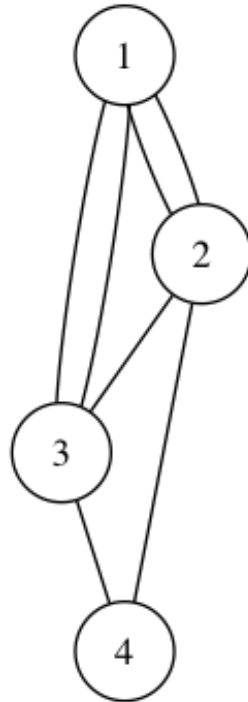
例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

(1)



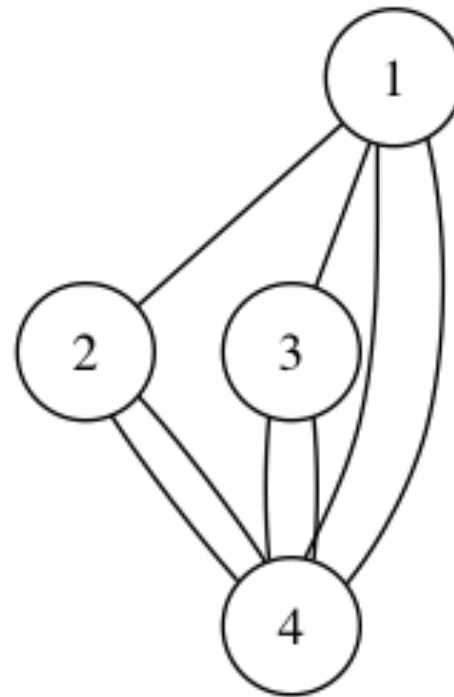
すべて次数が3で
周遊可能でなく、
オイラーグラフ
でない。

(2)



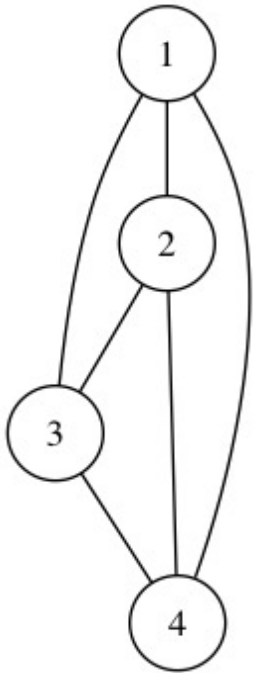
すべての次数が
偶数なので周遊
可能で、オイラー
グラフである。

(3)



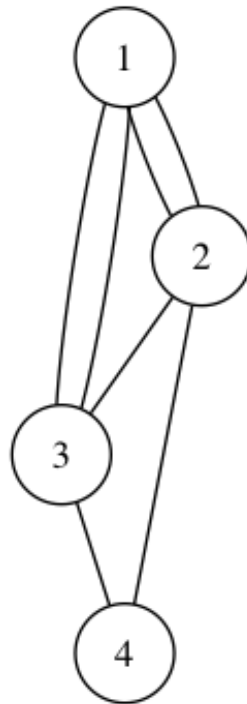
例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

(1)



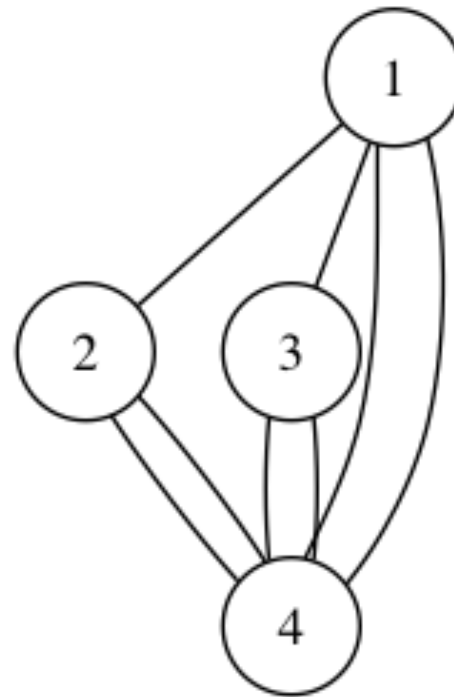
すべて次数が3で周遊可能でなく、オイラーグラフでない。

(2)



すべての次数が偶数なので周遊可能で、オイラーグラフである。

(3)



奇頂点がちょうど二つなので周遊可能で、オイラーグラフでない。

まとめ

- ① 関係（二項関係）
- ② 関係と写像
- ③ グラフによる表現
- ④ 関係行列
- ⑤ 有向グラフと無向グラフ
- ⑥ 隣接集合と隣接行列
- ⑦ 木、完全グラフ、クリーク
- ⑧ 2部グラフ

演習問題

問題1

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ とし, A 上の関係

$$R = \left\{ (a, a), (a, d), (a, e), (b, b), (c, c), (c, f), (d, d), \right. \\ \left. (d, a), (d, e), (e, e), (e, a), (e, d), (f, f), (f, c) \right\}$$

について, 有向グラフを用いて R を表せ.

問題2

$A = \{1,2,3,4,5\}$ 上の関係 R について

$x, y \in A$ のとき $xRy : x > y$ とすると, 関係行列と有向グラフを書け。

問題3

$A = \{n \mid -2 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{Z}\}$ において,
関係 $R : \lceil \equiv (\text{mod}.3) \rceil$ を

$m \equiv n (\text{mod}.3) \Leftrightarrow m - n$ は3の倍数

と定義するとき, この関係を直積 A^2 の
部分集合 R として表せ.

また, R を有向グラフで表せ.