

11.写像（関数） (2)

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

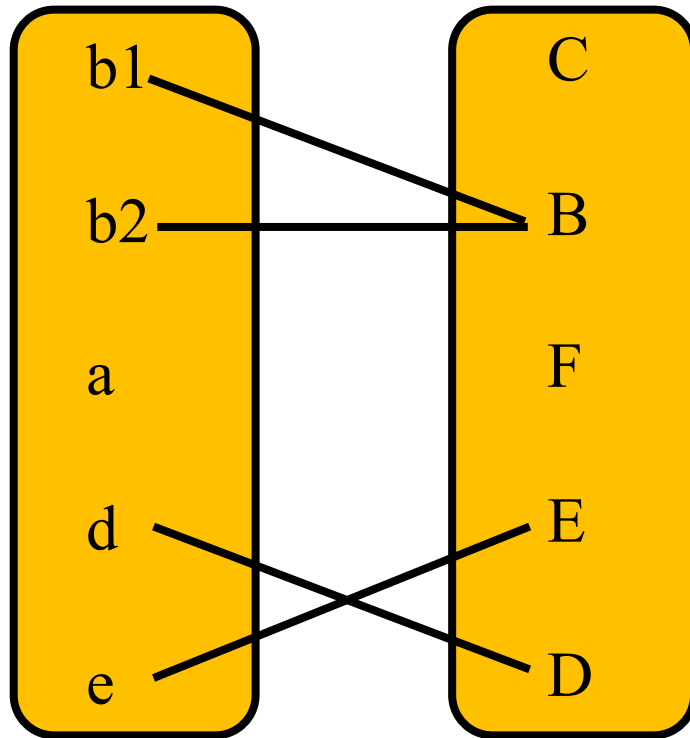
本授業の構成

- 第1回 10月7日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月21日：第3回 命題論理
- 第4回 10月28日：第4回 述語論理
- 第5回 11月4日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月11日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月18日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 12月2日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月9日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月16日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月23日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 1月6日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、
グラフによる表現
- 第13回 1月20日：第13回 同値関係
- 第14回 1月27日：第14回 順序関係：半順序集合、
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 2月3日：第15回 期末試験

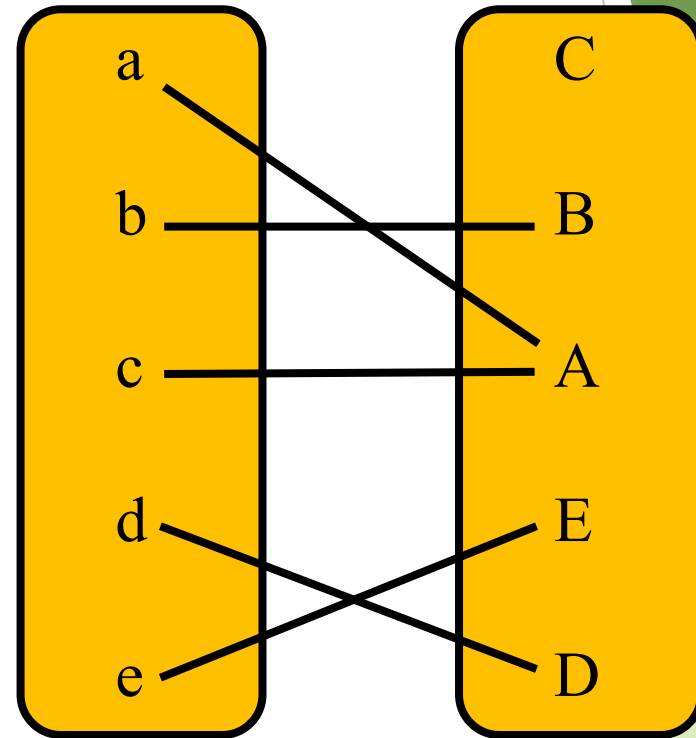
1. 本日の目標

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

復習 以下はどのような写像か？

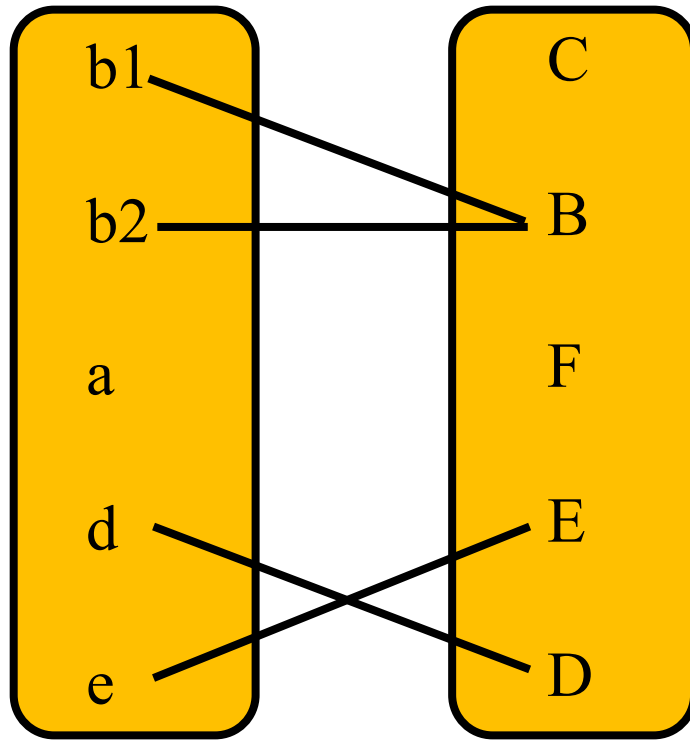


?????

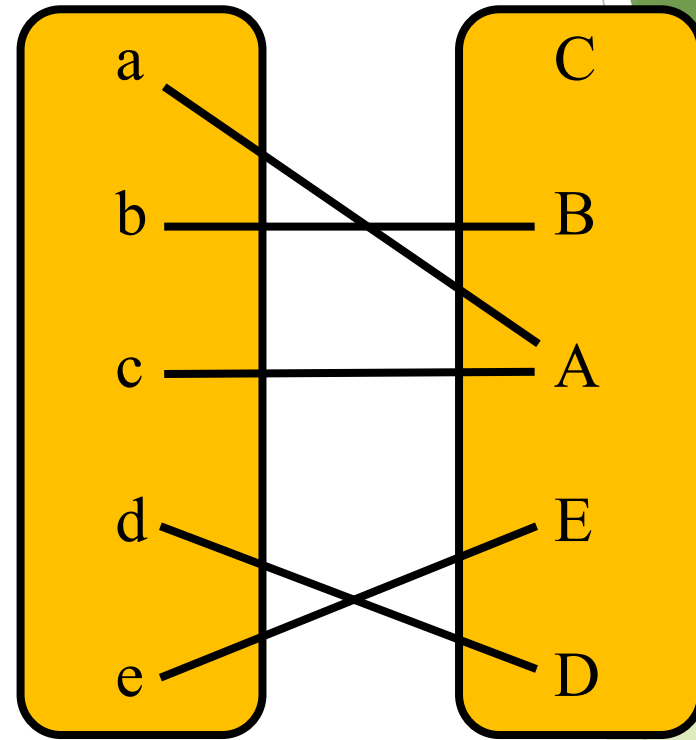


?????

復習 以下はどのような写像か？

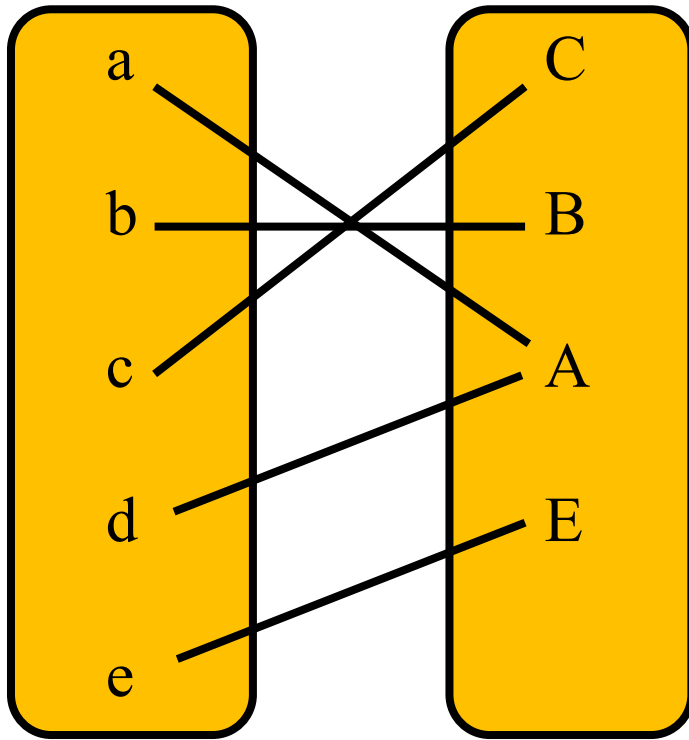


部分写像

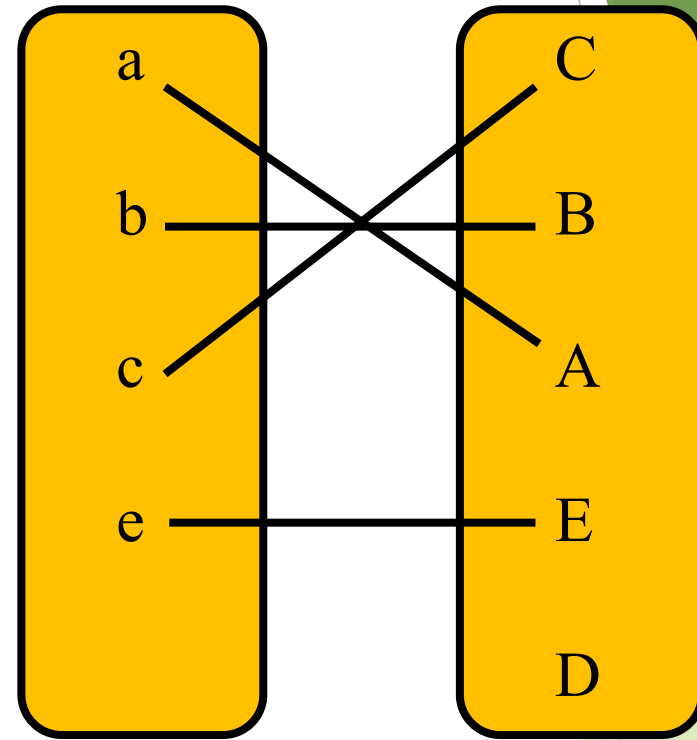


写像(関数)
 $\subseteq$ 部分写像

復習 以下はどのような写像か？

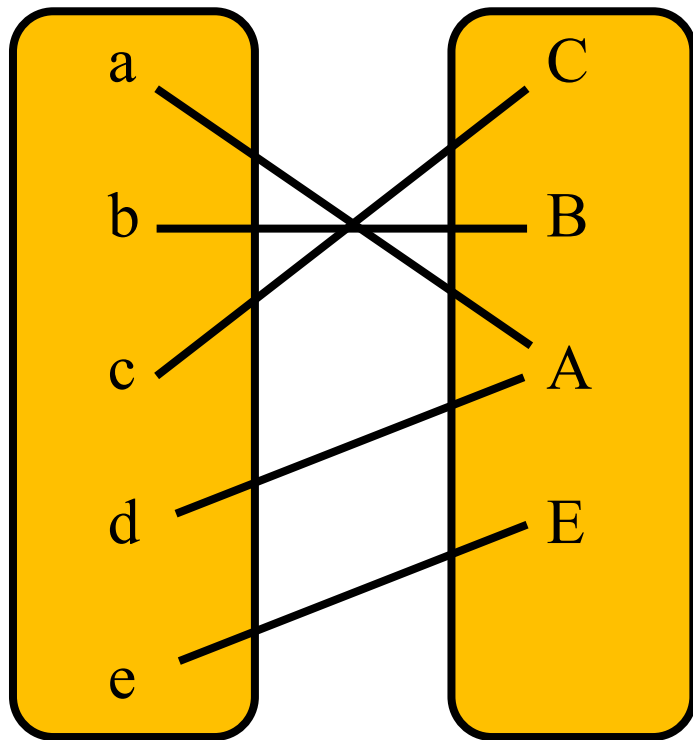


?????

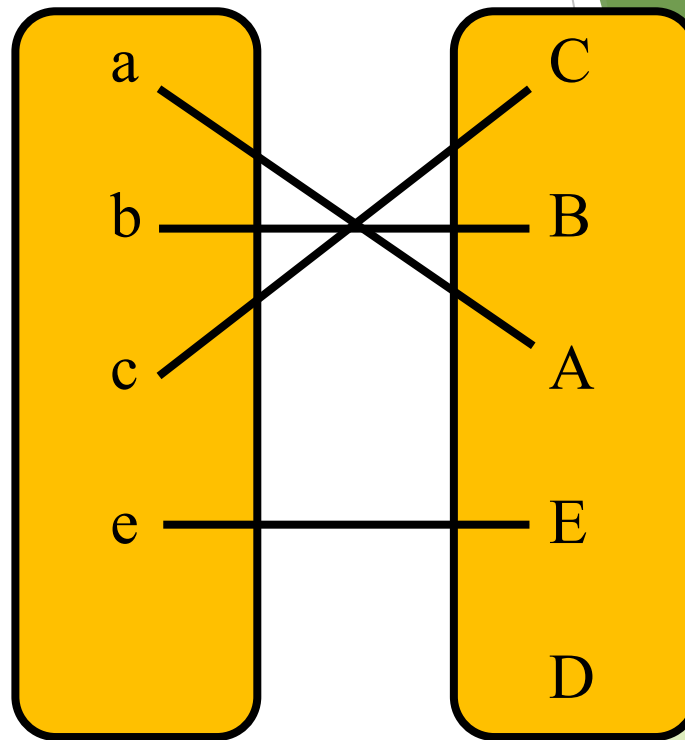


?????

復習 以下はどのような写像か？

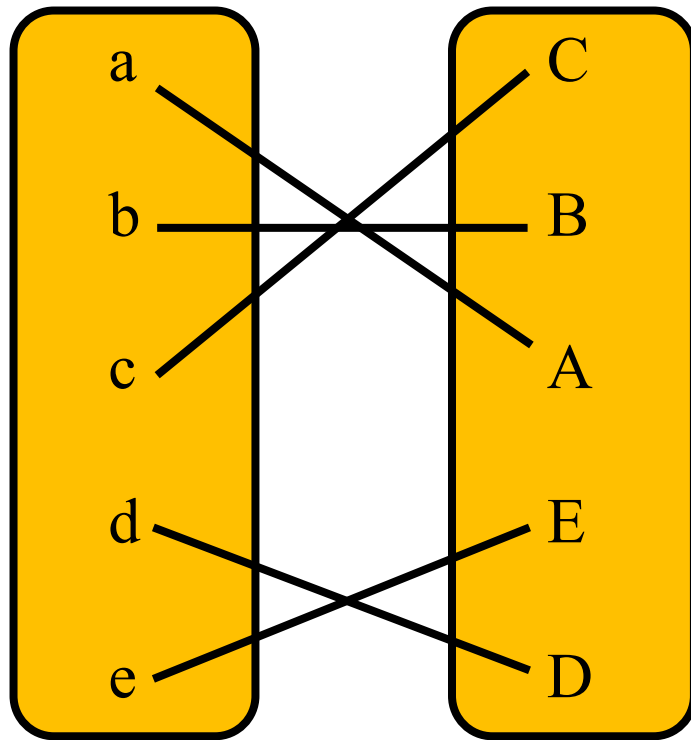


全射 $\subseteq$
写像 $\subseteq$ 部分
写像



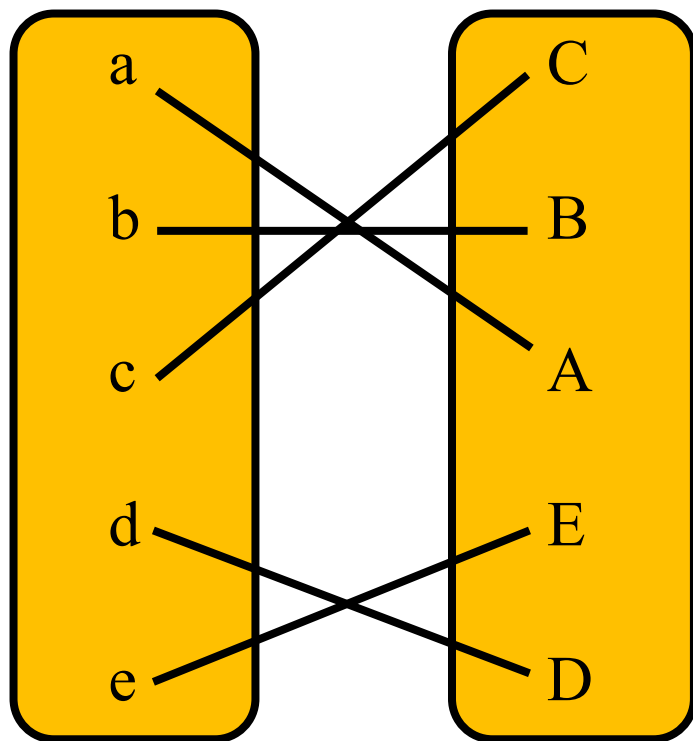
単射 $\subseteq$
写像 $\subseteq$ 部分
写像

復習 以下はどのような写像か？



?????

復習 以下はどのような写像か？



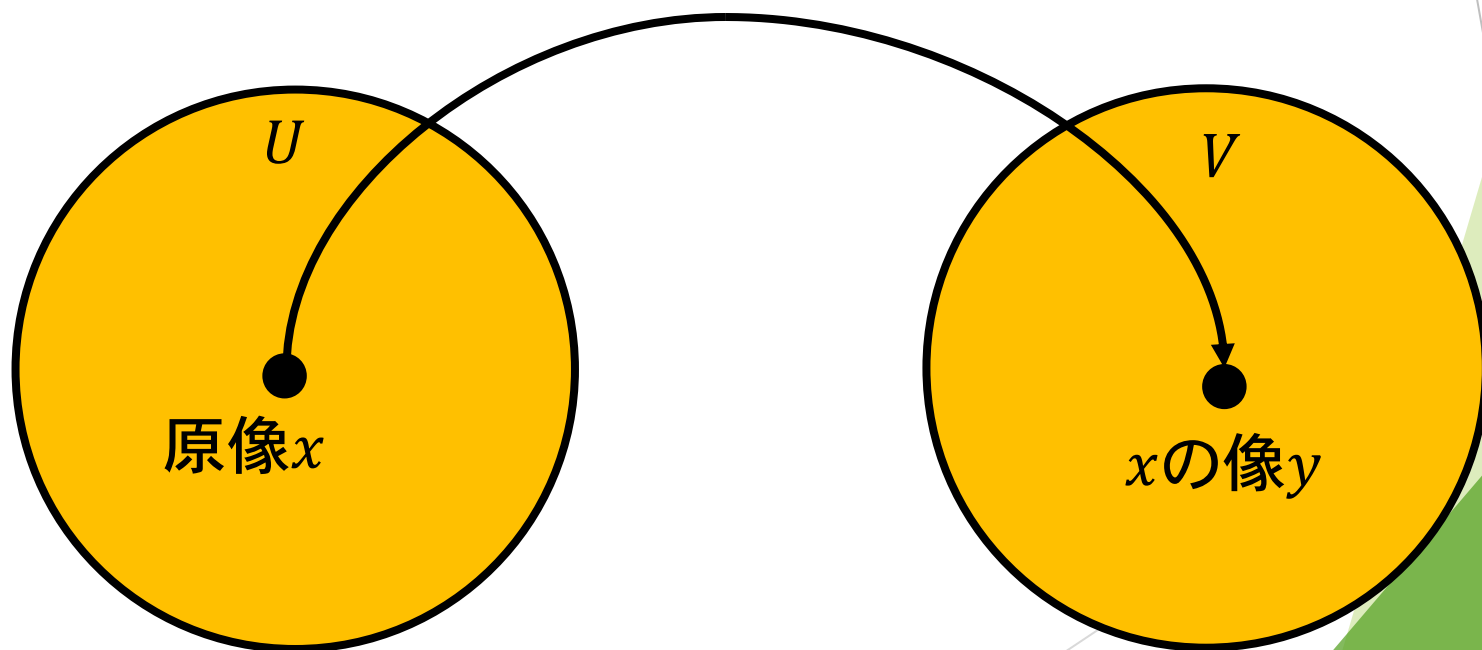
全単射($\subseteq$ 全射または $\subseteq$ 単射) $\subseteq$
写像 $\subseteq$ 部分写像

1. 像と原像

Def 1.

$f: U \mapsto V; f(x)$ について

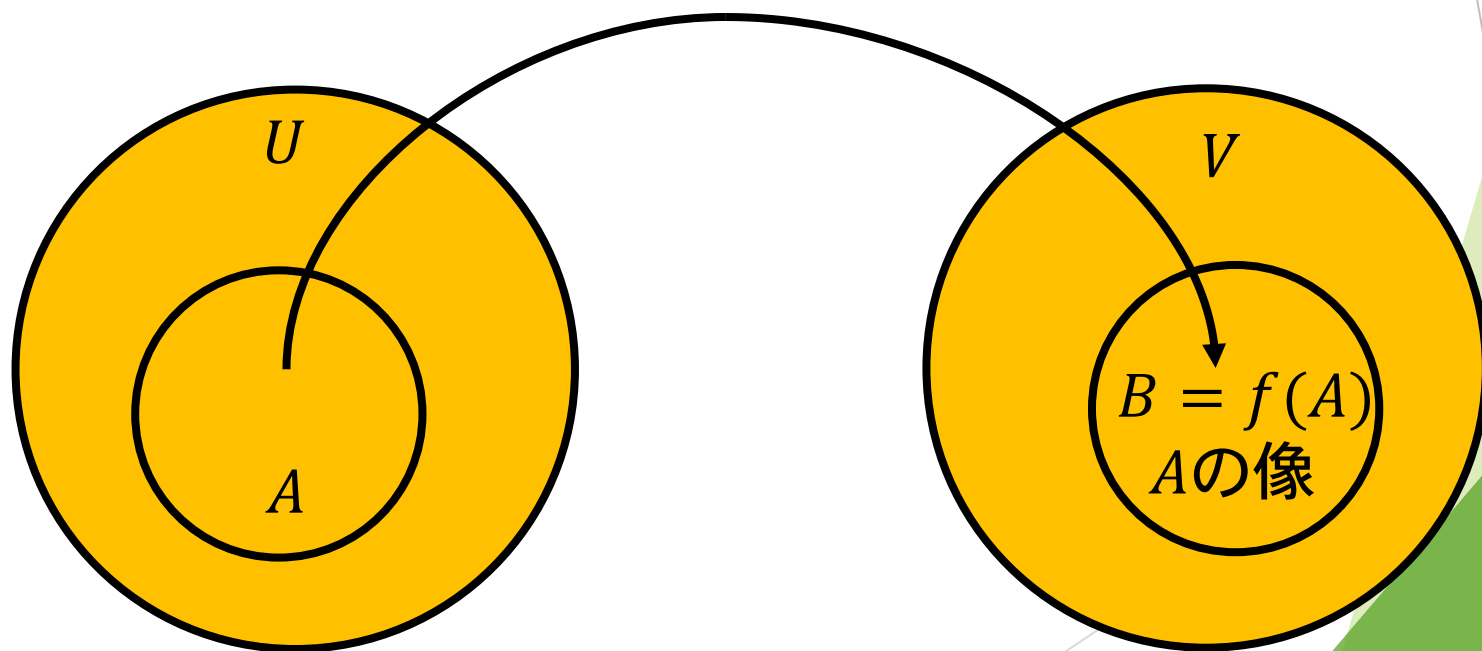
$y = f(x) \in V$ を $x \in U$ の像,
 $x \in U$ を $y \in V$ の原像という。



1. 像と原像

像の概念を部分集合に拡張：

$f: U \mapsto V; f(x)$ について 部分集合 $A \subseteq U, B \subseteq V$ を考える。 V の要素のうち、 A の要素の f による値になっているものを集めて、写像 f による集合 A の像という。 $B = f(A)$ と書く。



1. 像と原像

数学的に定義しよう。

内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{y | \text{????????}\}$$

を A の像という。

1. 像と原像

数学的に定義しよう。
内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{y | \exists x \in A [f(x) = y]\}$$

を A の像という。

1. 像と原像

数学的に定義しよう。

もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{ \text{? ? ? ? ?} \}$$

を A の像という。

1. 像と原像

数学的に定義しよう。

もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

を A の像という。

例題 1 .

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ の f の値域を像を用いて示せ。

例題 1 .

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ の f の値域を像を用いて示せ。

正答

$$\text{ran}(f) = f(U)$$

例題 2 .

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について f は U から V への全射であるときの必要十分条件は

$$f(U) = \text{????}$$

例題 2 .

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について f は U から V への全射であるときの必要十分条件は

正答

$$f(U) = V$$

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$

$f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき,

- (1) f の値域を求めよ。
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$
 $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき,

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f(1,2,3)$ を求めよ。
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f(1,3,5)$ を求めよ。

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$
 $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき,

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
 $\{2,5\}$
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$
 $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

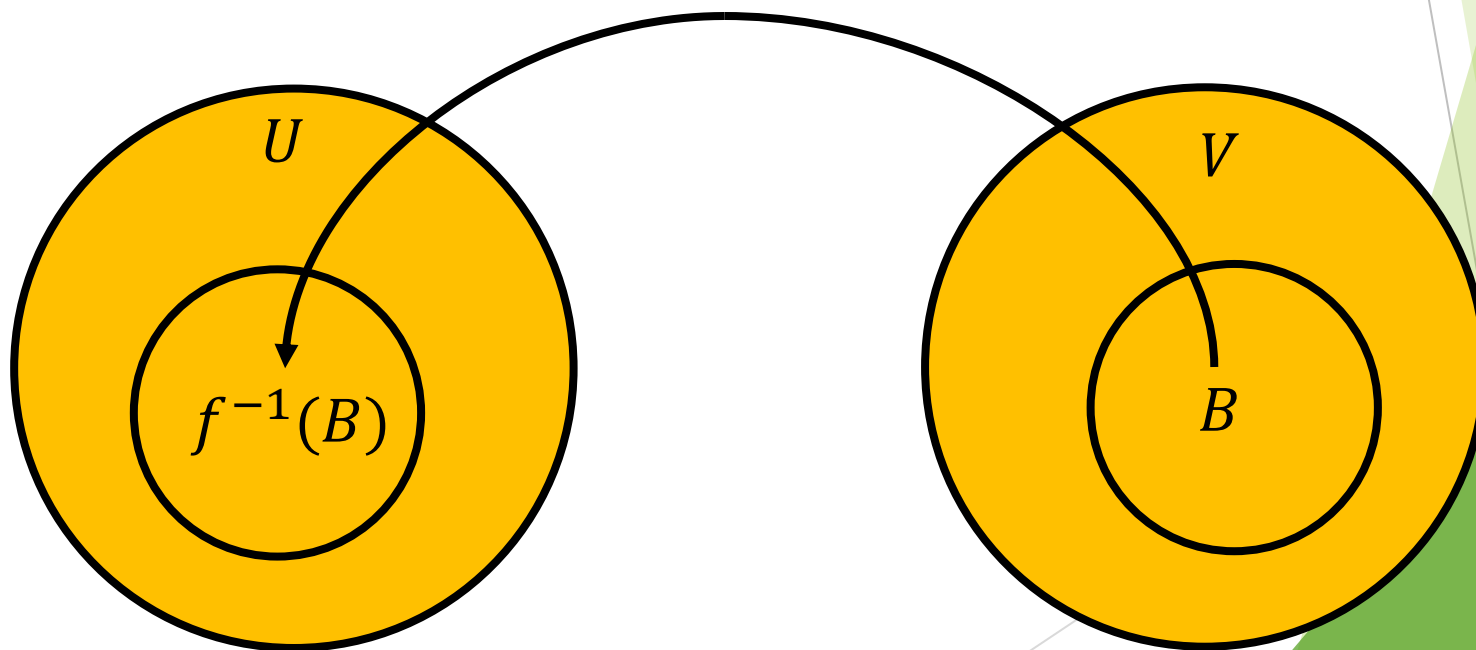
このとき,

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
 $\{2,5\}$
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。
 $\{1,2,5\}$

2. 逆像

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

U の要素のうち f による値が B に属する要素を集めてできる集合を、写像 f による B の逆像といい、 $f^{-1}(B)$ と書く。



2. 逆像

Def 3

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について,
以下の集合 $f^{-1}(B)$ を写像 f による
 B の逆像とよぶ。

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \quad .$$

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。

このとき,

- (1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。
- (2) $\{2,5\}$ の逆像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。

例題 1

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。

このとき,

- (1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。 $\{5\}$
- (2) $\{2, 5\}$ の逆像 $f^{-1}[\{2, 5\}]$ を求めよ。

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。

このとき,

- (1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。 $\{5\}$
- (2) $\{2,5\}$ の逆像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。 $\{1,2,3,4\}$

例題2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $A \subseteq U$ を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

例題2.

写像 $f: U \mapsto V$; $f(x)$ について, $A \subseteq U$ を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

[証明] 定義に戻れ: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では $\forall$ をとって束縛変数 (ある値) $x \in A$ と仮定して右边を導く。

$x \in A$ と仮定すると, $f(x) \in f(A)$. このとき逆像の定義より $f^{-1}[f(A)] = \{x | f(x) \in f(A)\}$

より $x \in f^{-1}[f(A)]$. 従って $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$



例題3.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $B \subseteq V$ を考える。
 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ を証明せよ。

例題3.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $B \subseteq V$ を考える。

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ を証明せよ。

[証明] **定義に戻れ** : $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では $\forall$ を とり束縛変数 (ある値) $x \in A$ と仮定して右辺を導く。

$y \in f[f^{-1}(B)]$ と仮定すると, $x \in f^{-1}(B)$ かつ $f(x) = y$ を満たす x が存在する. このとき, $x \in f^{-1}(B)$ なので $f(x) \in B$. 従って, $y \in B$.

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ ■

3. 写像の合成

Def 4.

$f: U \mapsto V; f(x)$ と $g: V \mapsto W; g(x)$ に対し,

$$h: U \mapsto W; h(x) = g(f(x))$$

を合成写像 $h = g \circ f$ と表す。

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(0) = p$$

例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

正答

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 1) \\ &= 2(x + 1) - 3 = 2x - 1\end{aligned}$$

従って

$$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1 \quad .$$

例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$
$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

正答

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3)$$
$$= (2x - 3) + 1 = 2x - 2$$

従って

$$f \circ g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 2 \quad .$$

$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1$ とは異なる

例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

正答

g は写像ではないので解なし

$x = 0$ のとき, $g(x) = -2$ で $\mathbb{N}$ でない。

例題4

$$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$$

のとき, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を証明せよ。

例題4

$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X$,
のとき, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を証明せよ。

[証明]

全称記号 $\forall x \in U$ が隠れている全称記号についての証明。 $\forall$ をとって束縛変数として扱う。

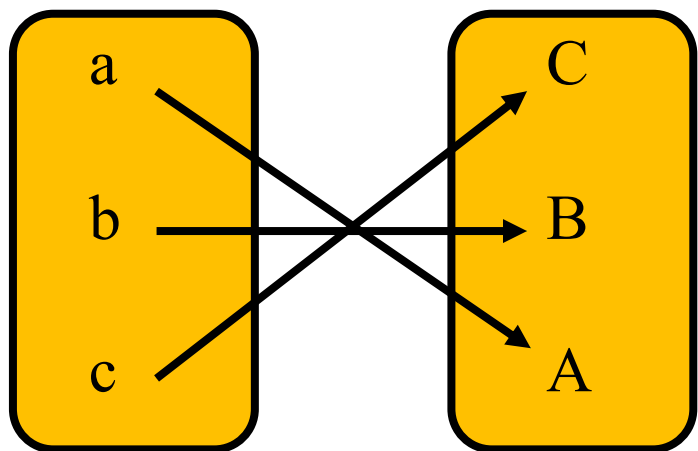
$x \in U$ とする。

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = \\ h((g \circ f)(x)) &= (h \circ (g \circ f))(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

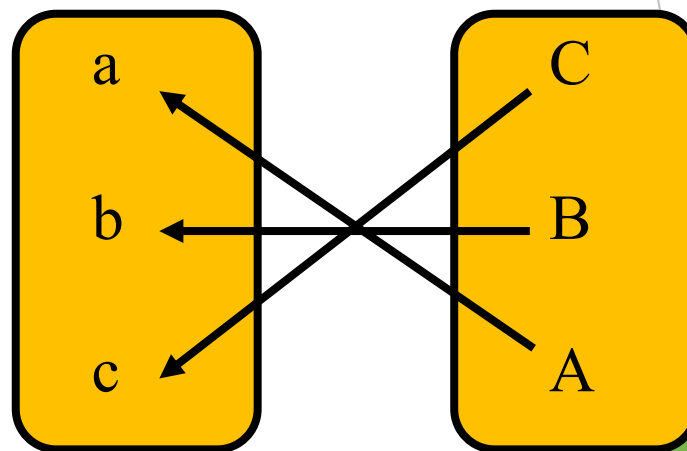
4. 逆写像

Def 5

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1}: V \mapsto U$ を f の逆写像と呼ぶ。



$f: U \mapsto V$



$f^{-1}: V \mapsto U$

例題 1

$$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$$

$f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ のとき、逆写像を求めよ。

例題 1

$$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$$

$f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ のとき、逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: V \mapsto U; 0 \mapsto b, 1 \mapsto c, 2 \mapsto a$$

例題 2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x) = y$
の逆写像を求めよ。

例題 2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x) = y$
の逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; f^{-1}(x) = \ln(y)$$

例題3

恒等写像 $\text{id}_U: U \mapsto U$; $\text{id}_U(x) = x$ の逆写像 id_U^{-1} を求めよ。

例題3

恒等写像 $\text{id}_U: U \mapsto U$; $\text{id}_U(x) = x$ の逆写像 id_U^{-1} を求めよ。

[回答]

$$\text{id}_U^{-1}(x) = \text{id}_U(x) = x$$

例題4

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1} \circ f$ はどのような写像か？

例題4

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1} \circ f$ はどのような写像か？

[回答]

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_U(x)$$

まとめ

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

演習問題

問題1

$f: U \mapsto V$, $A_1, A_2 \subseteq U$ のとき,
以下を証明せよ.

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2).$$

問題2

$f: U \mapsto V$, $B_1, B_2 \subseteq V$ のとき,
以下を証明せよ.

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2).$$

問題3

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto W$ とする.

以下を証明せよ.

- (1) f と g が単射ならば $g \circ f$ も単射である.
- (2) f と g が全射ならば $g \circ f$ も全射である.

問題4

$$U = \{a\}, V = \{a, b\}$$

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto U$ を $f(a) = a, g(a) = a, g(b) = a$ とする。

このとき, $g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ恒等写像となるか？