2. 集合の基礎と全称記号・存在記号

植野真臣

電気通信大学　情報数理工学プログラム

離散数学学習システム試作モニター募集

大学入試センターの宮澤芳光教授が問題、システムを開発しました．モニターを募集します．

- 自宅で週1回　約1時間以内
- 授業終了後　１週間以内に　演習問題を

Web上の学習システムで学習できます.ヒントや解答も出ます.各授業に対応する演習問題が存在していますのでその週内にやってください．このモニターをやったことで成績に加点することはしませんが，離散数学の力はつくと思います.

要件：離散数学の勉強に熱心な人,

授業が終わる最後まで辞めずに続けれる人

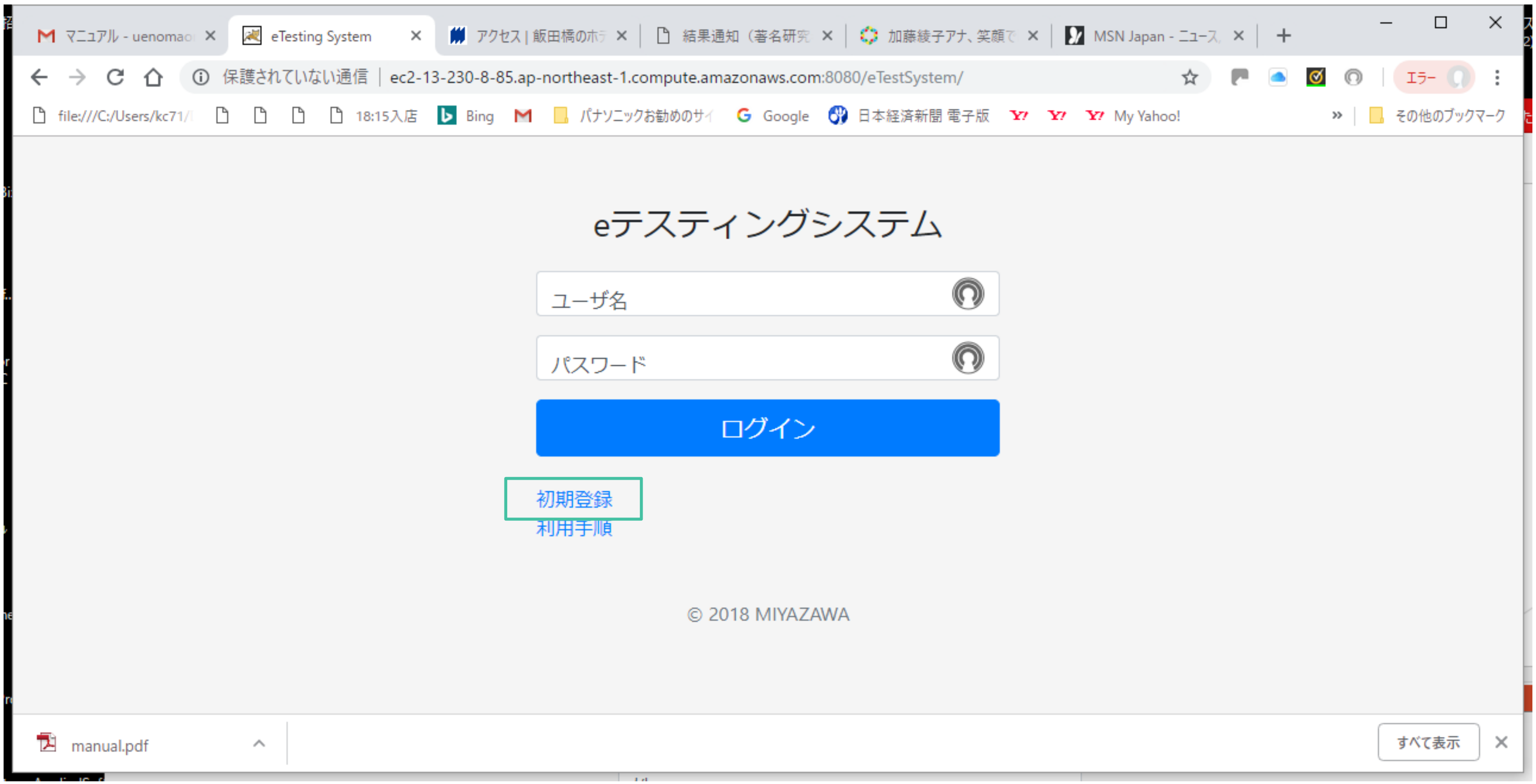
希望者の方は　タイトルに　離散数学学習システム試作モニター希望　と書いて,　本文にメール送付者の学籍番号と氏名を書いて

kato あっとai.lab.uec.ac.jpと Yamada あっと ai.lab.uec.ac.jp

10月18日までにメールください.

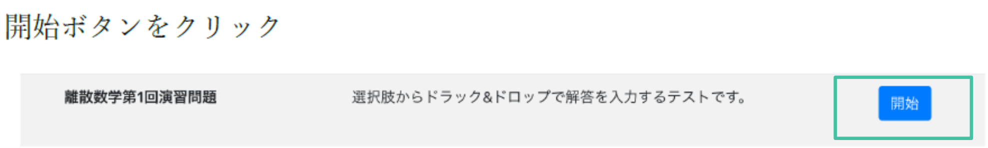
学習システム

システムへの登録



学習システム

開始ボタンをクリック



学習システム

プルダウンメニューから解答を選択

1項目 / 全6項目

以下の証明はどこでおかしくなったか?

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

証明

$$3 > 2$$

両辺に$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$をかける

$$3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) >_{(1)} 2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

両辺の$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$の係数を真数の肩にかける

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3 >_{(2)} \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

両辺を真数に戻す

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 >_{(3)} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{8} >_{(4)} \frac{1}{4}$$

上記の証明は, (1) から正しくない。

解答

演習システム

間違えるとヒントが出ます.ヒントを参考にもう一度解いてください.正答したら次の問題を解いてください.

誤答：選択肢下部に表示されたヒントを読み，再度，入力してください。

1項目 / 全6項目

以下の証明はどこでおかしくなったか?

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

証明

$$3 > 2$$

両辺に$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$をかける

$$3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) >_{(1)} 2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

両辺の$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$の係数を真数の肩にかける

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3 >_{(2)} \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

両辺を真数に戻す

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 >_{(3)} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{8} >_{(4)} \frac{1}{4}$$

上記の証明は，(1) から正しくない。

ヒント1：$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$は負の値

解答

本授業の構成

第１回　10月 7日：第1回 命題と証明
第２回　10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月21日：第3回 命題論理
第４回　10月28日：第4回 述語論理
第５回　11月4 日：第5回 述語と集合
第６回　11月11日：第6回 直積と冪集合
第７回　11月18日：第7回 様々な証明法 (1)
第８回　12月 2日：第8回 様々な証明法 (2)
第９回　12月 9日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月16日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月23日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　1月6日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、

グラフによる表現
第１３回　 1月20日：第13回 同値関係
第１４回　 1月27日：第14回 順序関係：半順序集合、

ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　2月3日：第15回 期末試験

１．本日の目標

１．集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が
正しく使える
２．全称記号∀，　存在記号∃が使える
３．部分集合と包含関係を理解する
４．集合の演算（和、積、補、差、素，要素数）

2．重要な集合

$\emptyset$ ：

$\mathbb{N}$ ：

$\mathbb{N}^{+}$ ：

$\mathbb{Z}$ ：

$\mathbb{Q}$ ：

$\mathbb{R}$ ：

$\mathbb{C}$ ：

2．重要な集合

$\emptyset$：空集合　（empty set）

（ギリシャ語φとは違う）

$\mathbb{N}$：自然数集合　(0を含む）

$\mathbb{N}^+$:自然数集合　(1以上）

$\mathbb{Z}$：整数集合

$\mathbb{Q}$: 有理数集合

$\mathbb{R}$: 実数集合

$\mathbb{C}$：複素数集合

要素数が有限の集合を有限集合(finite set),要素数が無限の集合を無限集合(infinite set）と呼ぶ

普遍集合

Def

議論の対象とする全体集合

例

普遍集合を $\mathbb{N}$ とする

$\Rrightarrow$

自然数全体を全体集合とする

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$

と書く。

3．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき　$a \in A$　と書く。

外延的記法：

内包的記法：

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$　と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A=\{1,2,3,4,5\}=\{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A=\{1,3,5,7\cdots\}$　（無限集合）

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

3．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$　と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$　（無限集合）

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

（∩（かつ）を示す場合にはカンマで区切る）

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

例

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$を外延的記法で表せ。

例

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$を外延的記法で表せ。

$A = \{1,2,3,4,5\}$

例

$A = \{2,4\}$を先の例の内包的記法$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$に条件を足して表せ。

例

$A = \{2,4\}$を先の例の内包的記法$A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$に条件を足して表せ。

回答

$A = \{n|\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n\text{は偶数}\}$

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，$n \geq 0$が成り立つ」

4．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，$n \geq 0$が成り立つ」

↓

「$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$」

$\forall$：意味：すべての(all, any)　読み方: “for all”

日本語訳：

「$\mathbb{N}$に属するすべてのnについて,$n \geq 0$が成り立つ」

例

「すべての実数xについて, $x^2 \geq 0$」を全称記号を用いて表せ.

例

「すべての実数xについて, $x^2 \geq 0$」
を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$となる実数xが存在する」

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2+7x<0$となる場合がある」

↓

「$x^2+7x<0$となる実数xが存在する」

↓

「$\exists x \in \mathbb{R}, x^2+7x<0$」

∃：意味：存在する(Exist)　読み方: “there exists”

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

6. 部分集合

Def (定義：　Definitionのこと)

対象としているもの全体を普遍集合（全体集合）と呼び，Uと書く．また，要素を一つも持たない集合を空集合といい，$\emptyset$で表す．

Def

集合Aの要素が集合Bの要素でもあるとき，AはBの部分集合であるといい，

$A \subseteq B$ または $B \supseteq A$

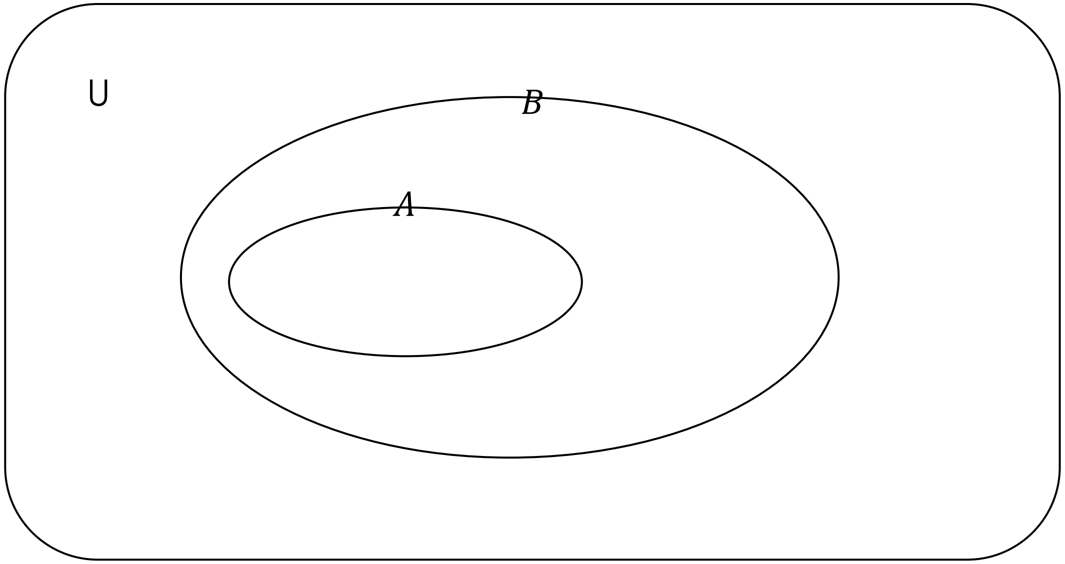
で表す．

部分集合の数学的表現

Def $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \to x \in B]$

→は「ならば」という意味、

xがAに含まれているならば，そのxのすべてはBに含まれる.



注意

Def $A \subseteq B \iff \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

この部分集合の定義では，B自身もBの部分集合であることがわかる．

例題　次の命題は正しいか？真偽を証明せよ。

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

(1)の解答

$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4\}$　に対して $A \subseteq B$

解答　　　真

証明

A の要素1,2,3はすべてBの要素で,

$$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

が成り立つ．定義より

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ならば$A \subseteq B$

$A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2,3,4\}$　に対して

$\forall x[x \in \{1,2,3\} \rightarrow x \in \{1,2,3,4\}]$　が成り立つ.

従って　$A \subseteq \mathrm{B}$

■

(2)の解答の方針

(2) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$　に対して $A \subseteq \mathrm{B}$

解答　　偽

証明の方針

Aの要素で1はBの要素でない.

$\forall x[x \in A \to x \in B]$の否定⇒

$$\exists x \in A[x \notin B]$$

(2)の解答

(2) $A=\{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$　に対して $A\subseteq \mathrm{B}$

解答　　偽

証明

Aの要素で1はBの要素でない．従って

$$\exists x\in A[x\notin B]\Leftrightarrow\neg\forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$$

定義より

「$\forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$が成り立たない」ならば

「$A\subseteq \mathrm{B}$は成り立たない」

従って、命題は偽　■

重要:全称記号∀の否定に存在記号∃が用いられる

$$\neg\forall x[x \in A \to x \in B]$$

↓

「 Aのすべての要素がBの要素である」の否定

↓

「 Aの要素の中でBの要素でないものがある」

↓

$$\exists x \in A[x \notin B]$$

「～ならば　～である」の否定は、反例∃xを一つ示せばよい。

問い

$\neg\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\exists x \in A[x \notin B]$

ということは

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\forall\, x \in A[x \in B]$

も成り立つ？

問い

$\neg\forall x[x \in A \to x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\exists x \in A[x \notin B]$

ということは

$\forall x[x \in A \to x \in B]$

$\Leftrightarrow$

$\forall\, x$ [illegible] $]$

も成り立つ？

成り立ちません。この理由は　命題論理からの授業で明らかになります。

同等

Def $A \subseteq B \ and \ B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

AとBは等しいという.

例題

$A = \{4n + 3 \,|n \in \mathbb{Z}\}$,

$B = \{4m - 1 \,|m \in \mathbb{Z}\}$

のとき,

$A = B$を証明せよ.

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

$A = \{4n+3\ |n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4m-1\ |m \in \mathbb{Z}\}$のとき,

$A = B$を証明せよ.

証明

(1) $A \subseteq B$

$$\forall x \in A \Rightarrow \forall x\ [x = 4n+3, n \in \mathbb{Z}]$$

$\Rightarrow \forall x\ [x = 4(n+1)-1, n \in \mathbb{Z}]$, $(n+1) \in \mathbb{Z}$より $\Rightarrow \forall x\ [x = 4m-1, m \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x[x \in B]$ より$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$. 従って$A \subseteq B$

例題

$A=\{4n+3\ |n\in\mathbb{Z}\}, B=\{4m-1\ |m\in\mathbb{Z}\}$のとき, $A=B$を証明せよ.

証明

(2)$A\supseteq B$

$$\forall x\in B\Rightarrow\forall x\ [x=4m-1, m\in\mathbb{Z}]$$

$\Rightarrow\forall x\ [x=4(m-1)+3, m\in\mathbb{Z}]$, $(m-1)\in\mathbb{Z}$より　$\Rightarrow$ $\forall x\ [x=4n+3, n\in\mathbb{Z}]\Rightarrow\forall x[x\in A]$　より

$\forall x[x\in B\rightarrow x\in A]$. 従って$A\supseteq B$

(1)(2)より$A\subseteq B$ and $A\supseteq B$

■

が成り立つ. 従って$A=B$

真部分集合

Def　$A \subseteq B$　and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

AはBの真部分集合であるという.

$\Updownarrow$

Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ and ??????

真部分集合⊂ は⊊　とも書く．本授業では⊂を用いる.

真部分集合

Def　$A \subseteq B$　and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

AはBの真部分集合であるという.

$\Updownarrow$

Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \to x \in B]$ and $\exists y \in B\ [y \notin A]$

真部分集合$\subset$ は$\subsetneq$　とも書く. 本授業では$\subset$を用いる.

例題

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$を証明せよ.

証明

①$\forall x[x \in \mathbb{N} \to x \in \mathbb{Z}]$　が成り立つ

②$y = -1$について

$y \in \mathbb{Z}$であるが$y \notin \mathbb{N}$

従って

$$\exists y \in \mathbb{Z}[y \notin \mathbb{N}]$$

①②より$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

■

7. 集合演算

集合A, Bと普遍集合をUとする.

A, BをUの部分集合として以下の演算を定義する.

(1) 和集合

(2) 積集合

(3) 補集合

(4) 差

(1) 和集合

$A \cup B = \{x | x \in A,$ または$x \in B\}$

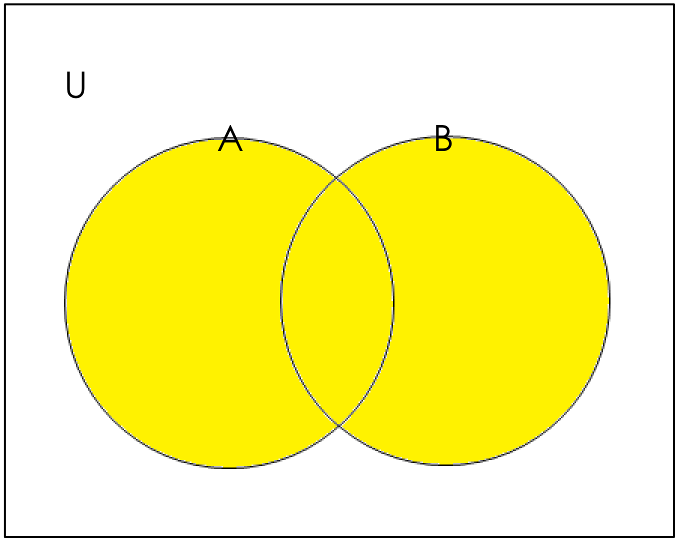
集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，A, Bの和集合

とはAとBの要素を

すべて併せた集合の

こと



(2) 積集合

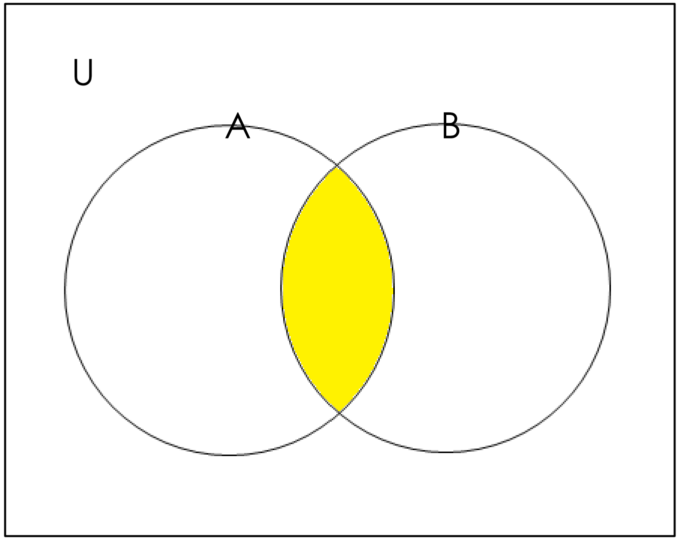
$A \cap B = \{x | x \in A,$ かつ$x \in B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，A, Bの積集合とは、

AとBの共通要素のみ

からなる集合のこと



(3) 補集合

$\bar{A} = \{x | x \in U, \text{かつ} x \notin A\}$

普遍集合をUとし、その部分集合A

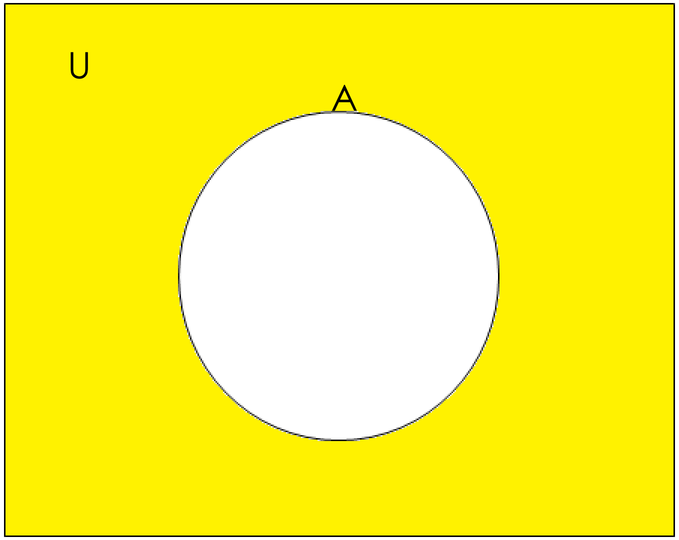
を考える.

このとき，Aの補集合

とは　Uのうち

Aに含まれない要素の

集合のこと



(4)差

$A - B = \{x | x \in A,$ かつ $x \notin B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

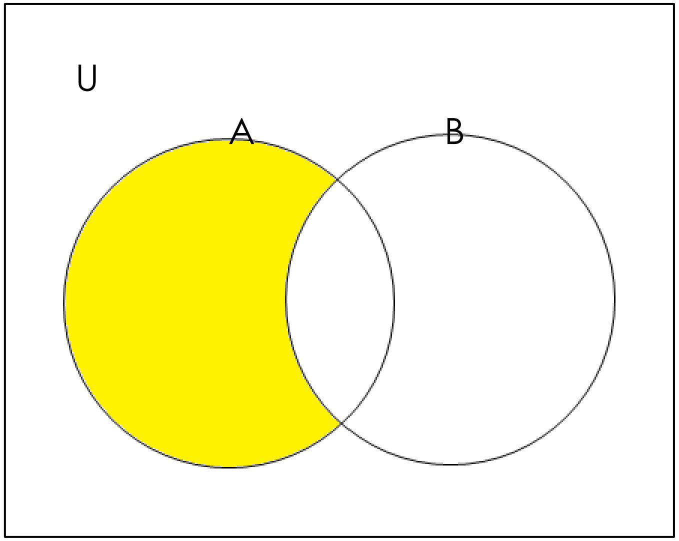
このとき，差$A - B$とは、

AからBの要素を除いた集合

のこと.$A - B = \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$と書く

こともある．$A - B = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$

と書ける.



(5) 素

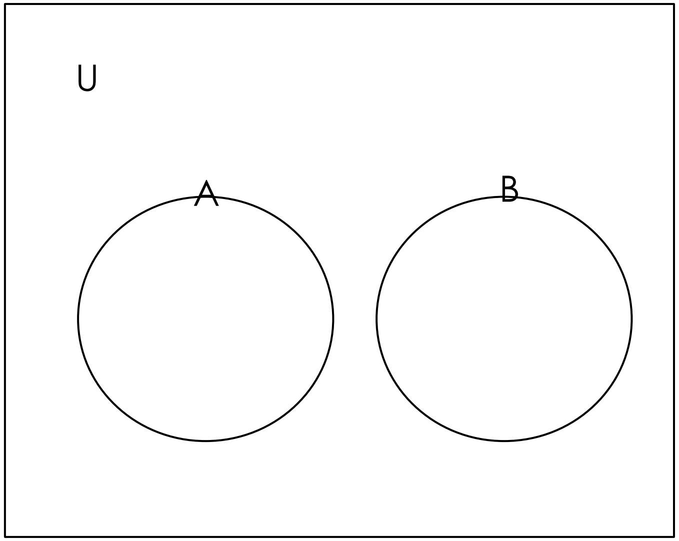
集合A, Bと普遍集合をUとする.

AとBに共通要素がない場合

$\mathrm{A} \cap B = \emptyset$

「このときAとBは素である」

という.



8. ド・モルガンの法則を証明せよ

集合A, Bと普遍集合をUとする.

$$(1)\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2)\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ヒント

証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

解答(1)

$$(1)\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

証明

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{または}\ x \in B\}$$

$$\overline{A \cup B} = \{x | x \in U, \text{かつ}\ x \notin A \cup B\}$$
$$= \{x | x \in U, \text{かつ}\ x \notin A, \boxed{\text{かつ}} x \notin B\}$$
$$= \bar{A} \cap \bar{B}$$

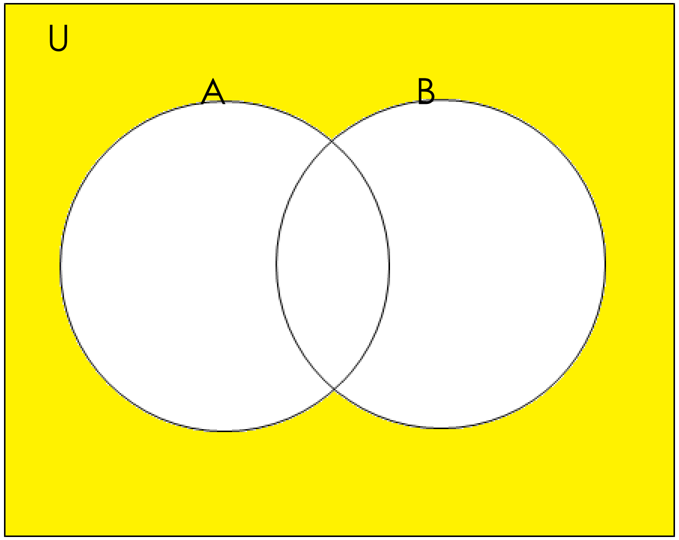
注意

$A \cup B$に含まれないのでそれぞれにも含まれない

■

(1)のイメージ

$$(1)\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



解答(2)

$$(2)\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

証明

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{かつ} x \in B\}$$

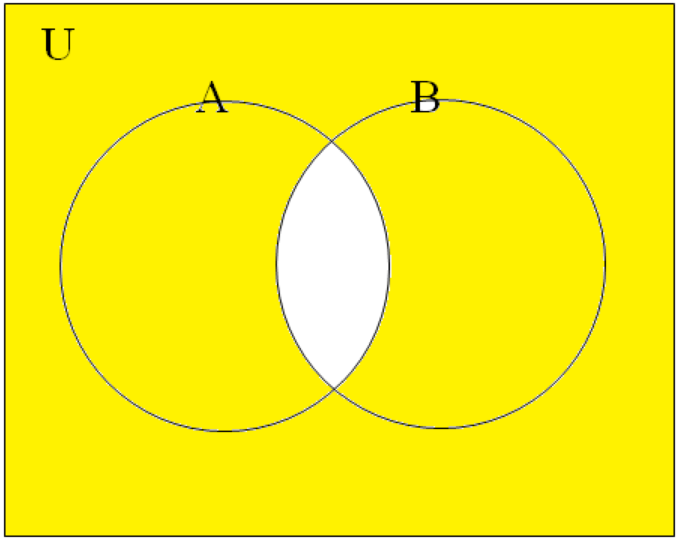
$$\overline{A \cap B} = \{x | x \in U, \text{かつ} x \notin A \cap B\}$$
$$= \{x | x \in U, \text{かつ} x \notin A, \boxed{\text{または}} x \notin B\}$$
$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

注意
AかつBに含まれないので
Aに含まれないかBに
含まれない

■

(2)のイメージ

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\},$
$B = \{4, 5\}$

このとき，

(1)和集合$A \cup B$

(2)積集合$A \cap B$

(3)補集合$\bar{A}, \bar{B}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

を求めよ.

例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\},$
$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1)和集合$A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2)積集合$A \cap B$

(3)補集合$\bar{A}, \bar{B}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合$U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,2,4\}$,
$B=\{4,5\}$

このとき,

(1)和集合$A\cup B=\{1,2,4,5\}$

(2)積集合$A\cap B=\{4\}$

(3)補集合$\bar{A},\bar{B}$

(4) $A-B$

(5) $\bar{A}\cap\bar{B}$

例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\}$,
$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1)和集合$A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2)積集合$A \cap B = \{4\}$

(3)補集合$\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\ \}$,
$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1)和集合$A \cup B = \{1,2, 4,5\}$

(2)積集合$A \cap B = \{4\}$

(3)補集合$\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B = \{1,2\}$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\}$,
$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1)和集合$A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2)積集合$A \cap B = \{4\}$

(3)補集合$\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B = \{1,2\}$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{3\}$

9. 要素の個数

集合Aが有限集合の場合，要素の数を

$$n(A) \quad \text{や} \quad |A|$$

で表す．

以下を証明せよ。

Th. 1. Uを有限な普遍集合とする。集合A, Bについて以下が成り立つ。

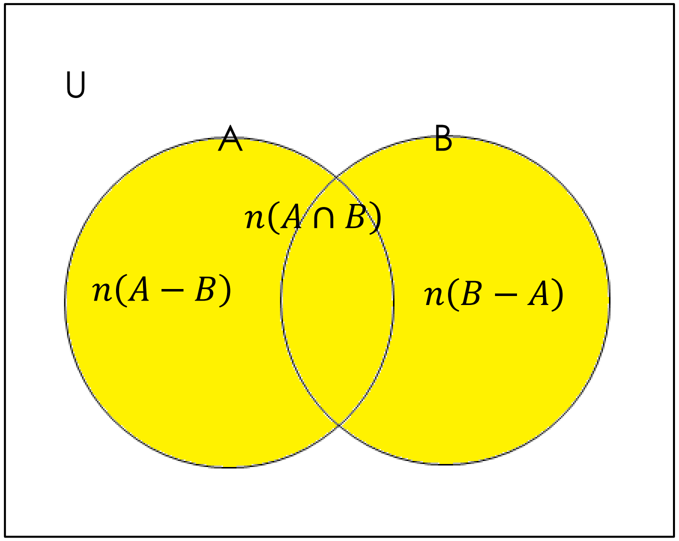
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Th. 1. Uを有限な普遍集合とする。集合A, Bについて以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[ヒント]

$$n(A \cup B)$$
$$= n(A - B) + n(B - A)$$
$$+ n(A \cap B)$$



Th. 1. Uを有限な普遍集合とする。集合A, Bについて以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[証明]

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$
$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$
$+ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

従って

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ■

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

[証明]

Th 1より， $n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$.

$\bar{A} \cap A = \emptyset$より,

$$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$$

従って,

$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ ■

例

普遍集合$U=\{m|1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$A=\{2k|k \in \mathbb{N}\}, B=\{2k+1|k \in \mathbb{N}\},$

とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A)=25$$
$$n(B)$$
$$n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 50$$

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\},$

とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U=\{m|0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A=\{2k|k \in \mathbb{N}\}, B=\{2k+1|k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A)=26$$
$$n(B)$$
$$n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 51$$

8．まとめ

１．集合の記述法（外延的記法、内包的記法）
２．全称記号∀、存在記号∃
３．部分集合と包含関係
４．集合の演算（和、積、補、差、素,要素数）

演習問題1．次の集合を外延的記法でかけ。

(1) $A = \{n|\ 1 < n < 10, n \in \mathbb{N}, n$は偶数$\}$

(2) $B = \{4n - 1\ |n \in \mathbb{N}\}$

(3) $\mathrm{C} = \{x\ |\ x^2 - x - 6 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$

(4) $D = \{x\ |\ 2x^2 + 9x + 9 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

演習問題2．次の集合を内包的記法でかけ。

(1) $A = \{4,8,12,16,20\}$

(2) $B = \{\cdots, -14, -7, 0, 7, 14, \cdots\}$

(3) $C = \{1,8,27,64,125,216\}$

(4) $D = \{0,5,10,15,20, \cdots\}$

演習問題3.　次の数について数の集合$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$に属するか属さないかを$\in$か$\notin$を用いて表現せよ。

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\sqrt{2}$

(3) -5

(4) $2-i$

演習問題4. 次の数式を日本語で表せ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 0$

(3) $\exists n \in \mathbb{C}, n^2 \in \mathbb{N}$

(4) $\forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

(6) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq a$

(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, ax + \mathrm{b} = 0$

(8) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| < \mathrm{a}$

演習問題5. 次の日本語を全称記号，存在記号を用いて表せ

(1)実数の中には、有理数ではない数が存在する

(2)すべての実数xについて、$2x^2 - x + 2 > 0$が成り立つ

(3) 0と異なる任意の実数xについて、$\frac{y}{x} = 1$ となる実数yが存在する

(4)任意の整数nに対し$\sin(2\pi n) = 0$が成り立つ

(5)整数の中には，2で割り切れない数が存在する

(6)すべての実数xについて、$2^x > 0$である

(7)任意の実数xに対し、$x^2 + 3x + 2 > a$となる定数aが自然数の中に存在する

(8)任意の整数aに対し、$x^2 + x + 2 > a$となる有理数xが存在する

演習問題6.

(1)　$A=\{a,b,c,d\}$に対して，Aの部分集合をすべて挙げよ.

(2)集合$A=\{2,3,5,6\}$, $B=\{2,3,5,7,8\}$に対して$A\subseteq \mathrm{B}$が成り立たないことを証明せよ.

演習問題7

$A = \{5n + 2m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$のとき, $A = \mathbb{Z}$を証明せよ.

演習問題8.

普遍集合U，　集合A, B, Cについて
$A \subseteq B$, and $B \subseteq C$, のとき，

$$A \subseteq C$$

を証明せよ.

演習問題9.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$A = \{2,4,5,6,9\}$$
$$B = \{1,2,3,6,7\}$$

このとき,

(1)和集合$A \cup B$

(2)積集合$A \cap B$

(3)補集合$\bar{A}$, $\bar{B}$

(4) $A - B$

を求めよ.

演習問題10.

$U = \{n | 1 \leq n \leq 15, n \in \mathbb{Z}\}$を全体集合とし、部分集合$A = \{a | a$は偶数$\}$, $B = \{b | b$は奇数$\}$, $C = \{c | c$は4の倍数$\}$を考える．以下の要素を列挙せよ．

(1) A, B, C

(2) $B \cup C$

(3) $B \cap C$

(4) $\bar{A}$

(5) $\overline{A \cup C}$

(6) $\bar{B} \cap C$

(7) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

演習問題11. 次の命題の否定形を答えよ。

(1) 「私の視力は1.0未満であり、かつ握力は50kg以下」ということはない。

(2)このリンゴは甘いか、または酸っぱくない。

(3) 「すべての人がiPadを持っている」とは限らない

(4) 「iPad proを持っていない人がいる」ということはない

(5) (3)(4)を全称記号∀と存在記号∃を用いて書け。

演習問題12

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 100,\ m \in \mathbb{N}\}$について

$$A = \{3k | k \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{5k | k \in \mathbb{N}\},$$

とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B),$$
$$n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$