

# ベイズの定理

植野真臣

電気通信大学

情報理工学研究所

情報数理工学プログラム

# 今後のスケジュール（予定）

- 4月8日 授業の概要とガイダンス
- 4月15日 ベイズの定理
- 4月22日 ベイズはどのように誕生したか？
- 5月13日 ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！
- 5月20日 ビリーフとベイズ
- 5月27日 6月3日 6月10日 尤度と最尤推定
- 6月17日 6月24日 7月1日 ベイズ推定と事前分布、階層ベイズ、因果推論
- 7月8日 自宅でオンデマンド授業
- 7月15日 自宅でオンデマンド授業
- 7月22日 7月29日 確率的グラフィカルモデル、ベイジアンネットワークと機械学習
- 8月5日 テストと総括

# 授業の目標

ベイズの定理の意味を知る！！

ベイズの定理を使えるようになる。

# ベイズの定理を簡単に説明します！！

事象A が起こったときの事象Bの起こる確率を $P(B|A)$  と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる同時確率はどのように計算できるか？

# 同時確率

事象A が起こったときの事象Bの  
起こる確率を $P(B|A)$  と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる  
確率はどのように計算できる

か？  $P(A, B) = P(B|A)P(A)$

# 同様に

事象B が起こったときの事象Aの起こる確率を $P(A|B)$  と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = ?$$



まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

# まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

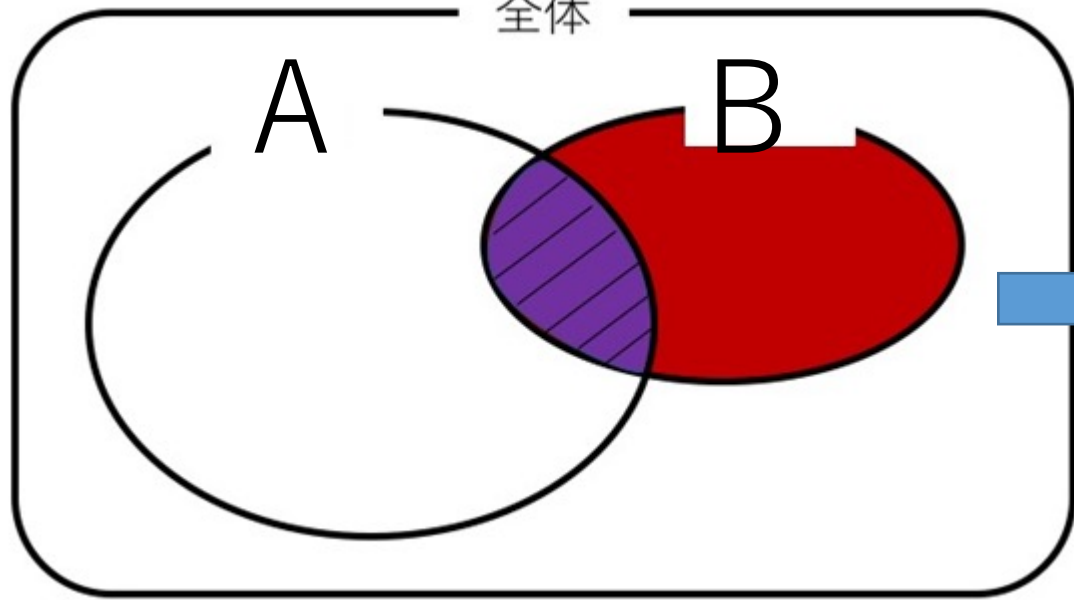
$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)} \end{aligned}$$

ベン図で考えると

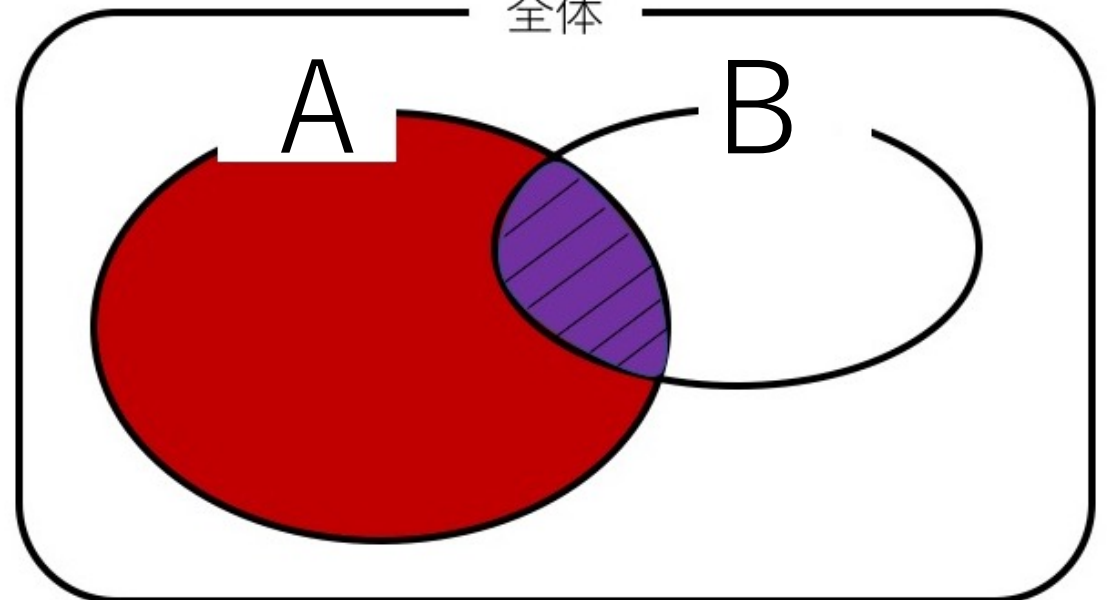
$P(A|B)$

全体



$P(B|A)$

全体



# ベイズの定理

原因 → 結果 が分かっているときに  
結果が起こったときの原因の確率を求める  
数学の定理

$$P(\text{原因}|\text{結果}) = \frac{P(\text{原因}) P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果})}$$

$$= \frac{P(\text{原因}) P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果}|\text{原因}) + P(\text{結果}|\text{異なる原因})}$$

# 本授業の主役のベイズの定理

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)}$$

# 例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1,$$
$$P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。  
この人のがんの確率を求めよ。

# 例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。  
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) \\ = \frac{P(\text{陽性}|\text{がん})P(\text{がん})}{P(\text{陽性}|\text{がん})P(\text{がん}) + P(\text{陽性}|\neg\text{がん})P(\neg\text{がん})}$$

# 例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。  
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)}$$



# 例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。  
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)} = 0.5$$

# 例題 1


がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。  
この人のがんの確率を求めよ。

回答

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = \frac{0.9 \times 0.1}{0.9 \times 0.1 + 0.1 \times (1 - 0.1)} = 0.5$$

 精密検査

# データによる確率更新

$$P(\text{がん})=0.1 \quad \text{事前確率}$$

↓ 検査後

$$P(\text{がん}|\text{陽性}) = 0.5 \quad \text{事後確率}$$

ベイズの定理(一般化された記述)

データ  $X$  が得られたときの  $C_i$  の確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データ $X$ が得られたときの $C_i$ の確率

事後確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

# ベイズの定理(一般化された記述)

データ $X$ が得られたときの $C_i$ の確率

$$\text{事後確率} \quad P(C_i|X) = \frac{\text{事前確率} \quad P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

# ベイズの定理(一般化された記述)

データ $X$ が得られたときの $C_i$ の確率

事後確率      事前確率      データの出る  
確率      確率      確率 (尤度)

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

# ベイズの定理(一般化された記述)

データ $X$ が得られたときの $C_i$ の確率

事後確率      事前確率      データの出る  
確率      確率      確率 (尤度)

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

$C_i$ について定数

が成り立つ。



## 例題 2

メールに「セール」という単語がある(Sと書く)と スпамメール(Spamと書く) であることが多い。

今,  $P(S \mid \text{Spam}) = 0.8$ ,  $P(S \mid \neg \text{Spam}) = 0.1$ ,  $P(\text{Spam}) = 0.1$  とする。

メールに「セール」という単語が入っていた。  
スパムメールである確率を求めてみよう。

回答

$$P(S | Spam) = 0.8, P(S | \neg Spam) = 0.1,$$

$$P(Spam) = 0.1 \text{ より,}$$

$$P(Spam|S) =$$

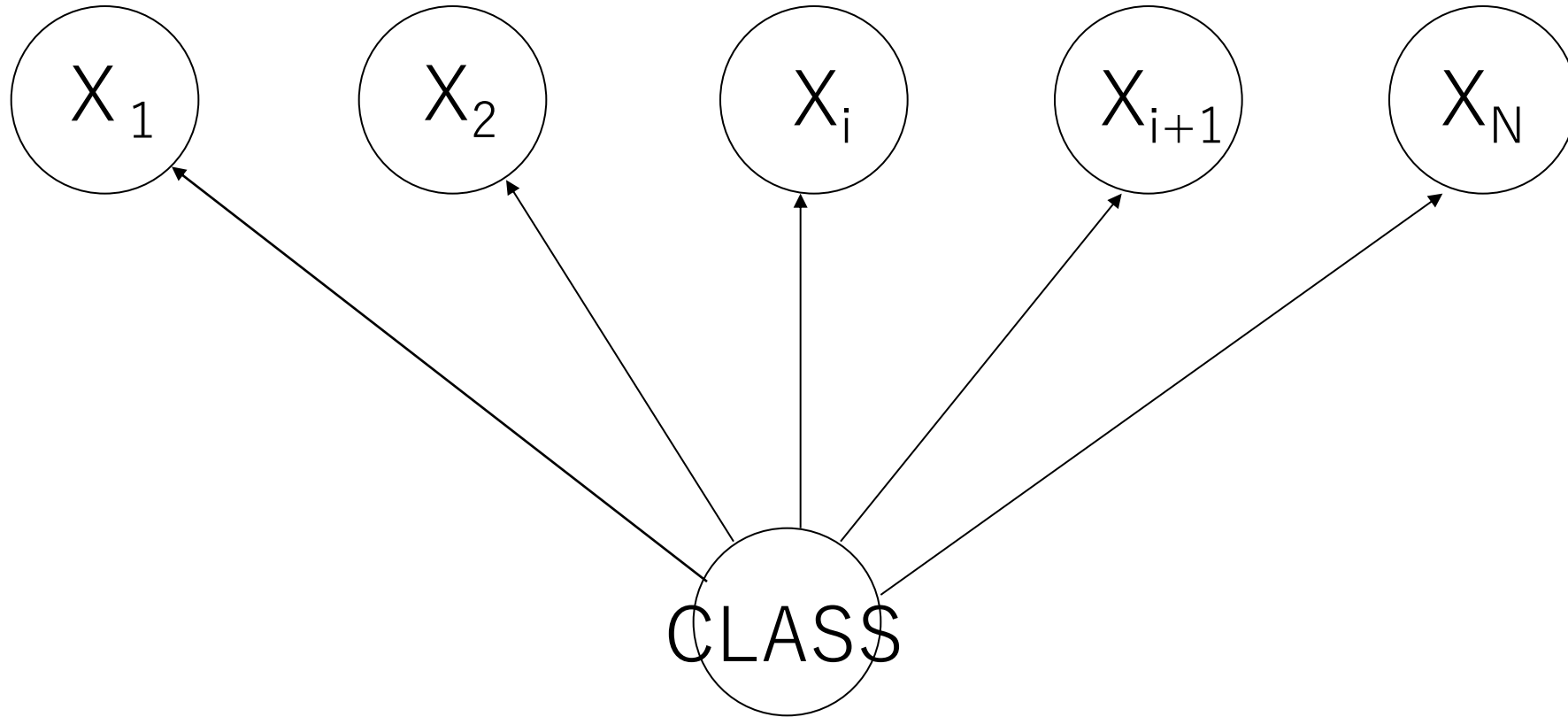
$$\frac{P(Spam) P(S|Spam)}{P(Spam) P(S|Spam) + (1 - P(Spam)) P(S|\neg Spam)}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.8}{0.1 \times 0.8 + (1 - 0.1) \times 0.1} = \frac{0.08}{0.17} \doteq 0.47$$

事前確率0.1から事後確率0.47になった！！

# Naïve Bayes

G. Graham, "A plan for spam", (2002)



モデル

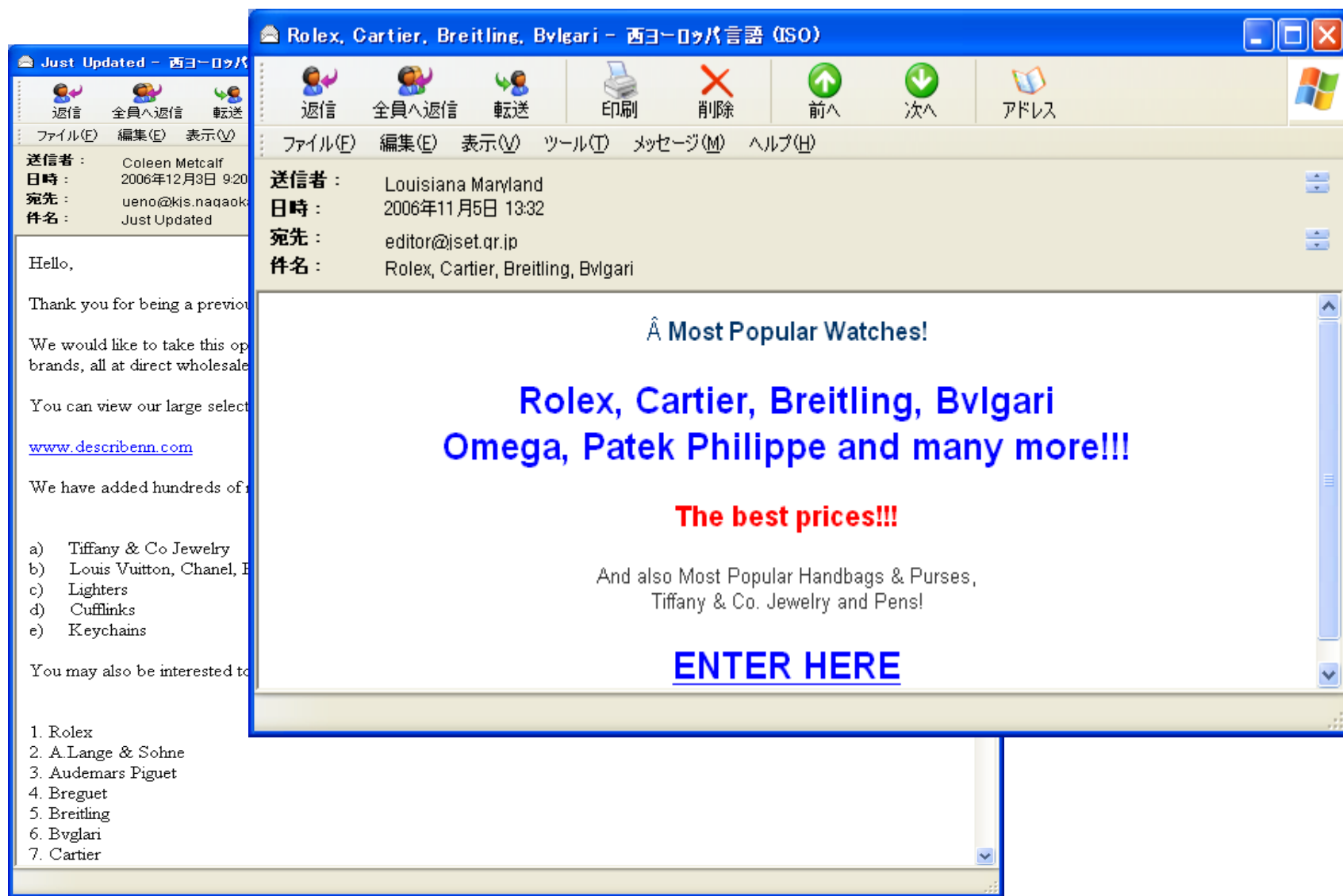
$$p(\text{class}|x_1, \dots, x_N) = \frac{p(x_1, \dots, x_N|\text{class})p(\text{class})}{p(x_1, \dots, x_N)}$$
$$\approx \frac{p(\text{class})}{p(x_1, \dots, x_N)} \prod_{i=1}^N p(x_i|\text{class})$$

$p(x_i|\text{class})$  は、classで $x_i$ が出現する文書数

# 識別関数

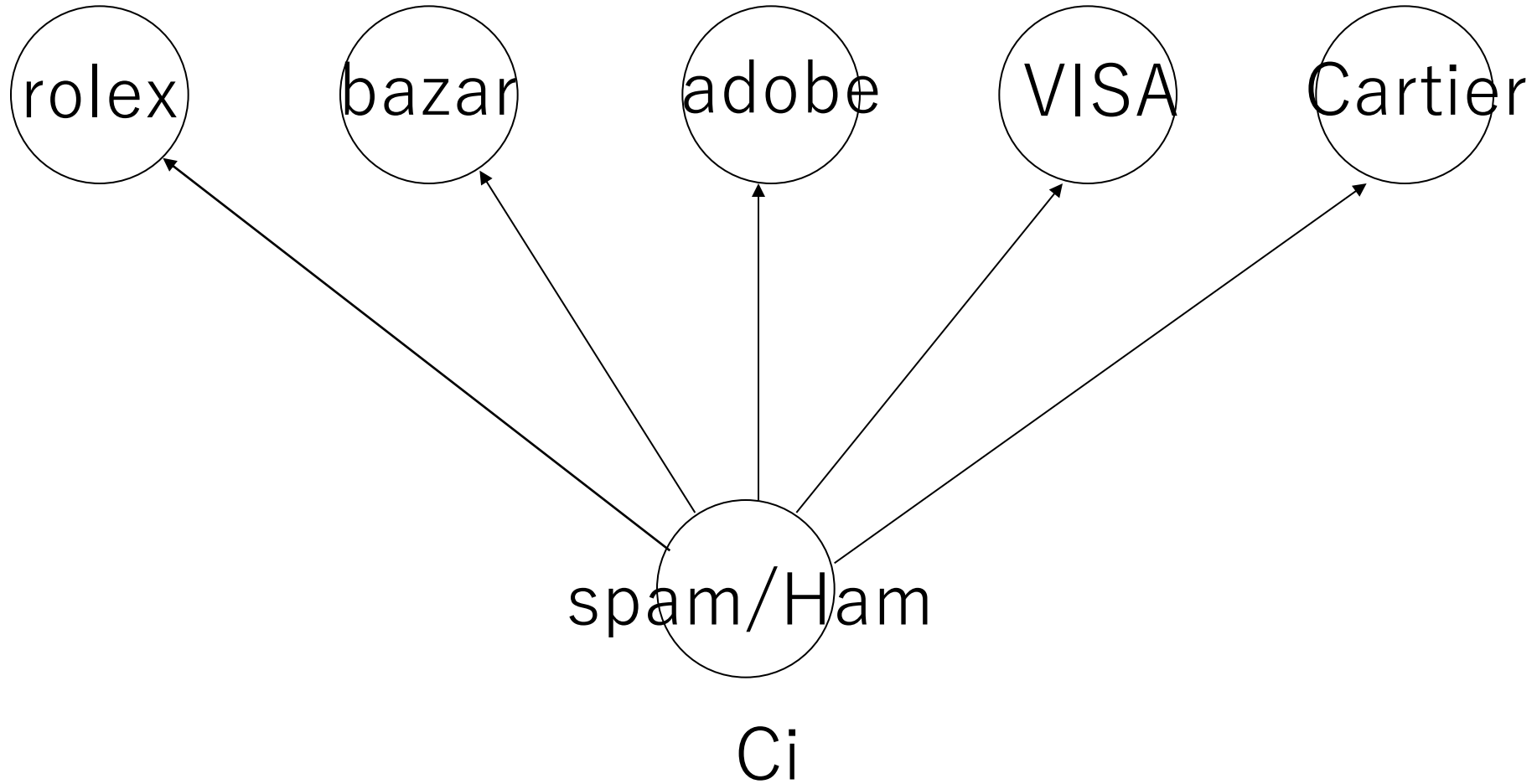
$$g_{class} = \log p(class) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | class)$$

# 例：ベイジアン・フィルタリング



# 例：ベイジアン・フィルタリング

データ



# 識別関数の比較判断

$$g_{spam} = \log p(spam) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | spam)$$

$$g_{ham} = \log p(ham) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | ham)$$



### 例題3

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を  $A$ 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を  $B$  とし、 $P(B|A) = 1.0$ ,  $P(B|\neg A) = 0.5$ ,  $P(A) = 0.005$  とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

## 例題 4

もう一度 少年が「オオカミが来た！！」  
と叫んだとき実際にオオカミが来ている確  
率を求めてみよう。

$P(B|A) = 1.0$ ,  $P(B|\neg A) = 0.5$ ,  $P(A) =$   
 $0.01$ とする。

## 例題 5

この後、少年が20回続けて「オオカミが来た」と叫んだ！！

オオカミが来ている確率を求めてみよう。

$P(B|A) = 1.0$ ,  $P(B|\neg A) = 0.5$ ,  $P(A) = 0.02$ とする。

## 例題6 設定を変えよう

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を  $A$ 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を  $B$  とし、 $P(B|A) = 0.4$ ,  $P(B|\neg A) = 0.5$ ,  $P(A) = 0.01$  とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

# まとめ

## ベイズの定理

データ  $X$  が得られたときの  $C_i$  の確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$