ベイズの定理は どのように誕生したのか？

植野真臣
電気通信大学
情報理工学研究科
情報数理工学プログラム

今後のスケジュール（予定）

4月 8 日　授業の概要とガイダンス
4月15日　ベイズの定理
4月22日　ベイズはどのように誕生したか？
5月13日　ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！
5月20日　アランチューリングとベイズ
5月27日　ベイズから機械学習へ
6月3日　確率の基礎の復習
6月10日　ビリーフとベイズ
6月17日　尤度と最尤推定
6月24日　数値計算法による推定
7月 1日　ベイズ推定と事前分布
7月8日　ベイズ分類機
7月15日　国際会議出席のため休講
7月22日　ベイジアンネットワーク
7月29日　ベイジアンネットワークと機械学習
8月 5日　テストと総括

授業の目標

ベイズはどうして生まれたのか？

ベイズの定理が生まれた背景を知り、ベイジアンの哲学を学ぶ。

先週の復習

例題3

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象をA,少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象をBとし， $\mathrm{P}(B|A)=1.0, \mathrm{P}(B|\neg A)=0.5, \mathrm{P}(A)=0.005$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

回答

$$\mathrm{P}(B|A) = 1.0,\ \mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5,\ \mathrm{P}(A) = 0.005$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A)\mathrm{P}(B|A)}{\sum_A P(A)\mathrm{P}(B|A)}$$

$$= \frac{0.005\times 1.0}{0.005\times 1.0 + (1 - 0.005)\times 0.5} = \frac{0.005}{0.5025}$$

$$\fallingdotseq 0.01$$

約２倍になった！！

例題 4

同じようなもう一人のうそつき少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう.

$\mathrm{P}(B|A) = 1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.01$とする.

回答

$$\mathrm{P}(B|A) = 1.0,\ \mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5,\ \mathrm{P}(A) = 0.01$$

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{P(A)\mathrm{P}(B|A)}{\sum_A P(A)\mathrm{P}(B|A)}$$

$$= \frac{0.01 \times 1.0}{0.01 \times 1.0 + (1 - 0.01) \times 0.5} = \frac{0.01}{0.505}$$

$$\fallingdotseq 0.019802 \fallingdotseq 0.02$$

約２倍になった！！

例題 5

この後、違う嘘つき少年20人が独立に
オオカミが来た」と叫んだ！！
オオカミが来ている確率を求めてみよう．

$\mathrm{P}(B|A) = 1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.02$とする．

回答

$\mathrm{P}(B|A) = 1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.02$ より

$$\mathrm{P}(A|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)^{20}}{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)^{20} + \mathrm{P}(\neg A)\mathrm{P}(B|\neg A)^{20}}$$

$$= \frac{0.02 \times 1.0^{20}}{0.02 \times 1.0^{20} + (1 - 0.02) \times 0.5^{20}}$$

$$= 0.9999$$

例題6 設定を変えよう

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象をA,少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象をBとし，$\mathrm{P}(B|A)$ =0.4, $\mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5$, $\mathrm{P}(A) = 0.01$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

回答

- $\mathrm{P}(B|A) = 0.4,\ \mathrm{P}(B|\neg A) = 0.5,\ \mathrm{P}(A) = 0.01$より，
- $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{P(A)\mathrm{P}(B|A)}{\sum_{A\neg A} P(A)\mathrm{P}(B|A)} = \dfrac{0.01\times 0.4}{0.01\times 0.4+(1-0.01)\times 0.5} = \dfrac{0.004}{0.499} \doteqdot 0.008016$
- 約８割になった！！

ベイズはなぜベイズの定理を生み出したのか？

1748年　哲学者デビッド・ヒューム
人間知性研究を出版

イエスの復活を見たという人々の主張が不正確である確率は、それがそもそも起きた確率よりも遥かに大きいと主張

牧師ベイズ怒る

ヒュームが間違っていることを完全に証明しようと、ベイズは出来事の発生確率の定量化を試みる。

ベイズのアイデア

キリストの復活に関する様々な証言は、
ヒュームが主張したような形でその出来事の
信憑性を無にすることはできない、と考えた。

ベイズの結果は、たとえ弱いあいまいな証拠
であっても積み重ねれば、あり得ないような
出来事の低い確率を覆すことができ、それを
事実として確立することができる！！

ベイズは以下の定理を発見した.

- 客観的なデータから自分の信念を変える手法
- 事前確率：データのない確率、尤度：データの起こる確率
- 事後確率：データによって更新された確率
- 事後確率∝事前確率×尤度
- 世界最初のオンライン学習（逐次学習）

数学者からは不人気！！

- 主観を扱っている！！
- 事前の確率が分からない場合は、すべての可能性を等確率にする.

→

無知を確率で計量化しており、おかしい！！

さらに、数学的記述が不正確なものであった！！

プライス牧師

1767年にベイズの友人だったプライス牧師は「キリスト教の重要性、その証拠、およびそれに対し申し立てられた異議」を出版し、ベイズの考えを用いてヒュームの主張に挑戦した。

プライス牧師

統計学者スティーブン・スティグラーは、「基本的な確率論的な論点は、ヒュームは奇跡を目撃したという独立した証言が数多くあることの重要性を過小評価したが、ベイズの結果は、たとえ危うい証拠であっても積み重ねれば、ありえないような出来事の低い確率を覆すことができ、それを事実として確立することができる、という手法を示した」と言う。

プライスにより、ベイズの考え方は世に出た！！

この時点では、まだ数学的に厳密な記述はなかった。

ベイズの定理の発見

ベイズの論文から１０年がたったころ、天文学の観測でなぜデータがばらつくのかの原因を推定しようとする。25歳のラプラスは以下のベイズの定理によく似た定理を導く。彼自身は、原因確率の定理と呼んでいた。

$$P(A_i|B) = \frac{P(B_{|A_i})}{\sum_{i=1}^{n} P(B_{|A_i})}$$

ラプラス、ベイズを知る！！

１７８１年に、プライスがパリを訪れて、ベイズの話を講演した。

その講演を聞いたラプラスは感動し、自分の作った原因確率の定理に、解釈を与え、さらに事前確率を等確率にする制約を組み込んだ。

１８１４年、現在の定理を導く

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B_{|A_i})}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,P(B_{|A_i})}$$

地球科学、気圧変動の推定に用いる。

ラプラスはナポレオンにかわいがられ、
内務大臣も務めた。

例題 7

キリストの弟子たちはキリストの復活を望んでいました。あまりに望みが強すぎて少し似ているだけの人でもキリストに見えてしまうことがあります。弟子がキリストの復活を見たと証言する事象をA, 実際にキリストが復活したという事象をBとする．$\mathrm{P}(A|\mathrm{B}) = 1.0$, $\mathrm{P}(A|\neg\mathrm{B}) = 0.5$, $\mathrm{P}(B) = 0.01$ とする． 21人の弟子がキリストの復活を見たと証言したとき、本当にキリストが復活した確率を求めてみよう．まずは次ページの補題から取りかかろう。

ただし、

$\mathrm{P}(A|\mathrm{B}) = 1.0$, $\mathrm{P}(A|\neg\mathrm{B}) = 0.5$, $\mathrm{P}(B) = 0.01$とする．

補題：21人の弟子がキリストの復活を見たと証言したときの尤度は？

例題８(もう少しリアルに考えましょう)

キリストの弟子たちはキリストの復活を望んでいました。あまりに望みが強すぎて少し似ているだけの人でもキリストに見えてしまうことがあります。弟子がキリストの復活を見たと証言する事象をA, 実際にキリストが復活したという事象をBとする．$\mathrm{P}(A|\mathrm{B}) = 1.0$, $\mathrm{P}(A|\neg\mathrm{B}) = 0.5$, $\mathrm{P}(B) = 0.00001$ とする．11人の弟子がキリストの復活を見たと証言したとき、本当にキリストが復活した確率を求めてみよう．ここでも尤度から求めよう。

$\mathrm{P}(A|\mathrm{B}) = 1.0$, $\mathrm{P}(A|\neg\mathrm{B}) = 0.5$, $\mathrm{P}(B) = 0.00001$とする．

補題：11人の弟子がキリストの復活を見たと証言したときのキリスト復活の尤度は？

本日のまとめ

- ベイズがなぜベイズの定理を導いたのかを学んだ。
- ベイズは　神の存在証明のために　ベイズを導いた。
- ベイズの定理とは　一つ一つは信頼性のないエビデンスでも、多く集まれば非常に有益なエビデンスになっていくことを示している。