

9.再帰的定義 と数学的帰納法

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学プログラム

本授業の構成

- 第1回 10月2日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月9日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月16日：第3回 命題論理
- 第4回 10月23日：第4回 述語論理
- 第5回 10月30日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月6日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月13日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 11月20日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月4日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月11日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月18日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 12月25日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
- 第13回 1月15日：第13回 同値関係
- 第14回 1月22日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 1月29日：第15回 期末試験

1. 本日の目標

- ① 自然数とペアノの公理
- ② 数学的帰納法
- ③ 再帰的定義
- ④ 再帰的計算

1. 自然数とペアノの公理

自然数の定義(G.Peano, 1858-1932) .

Def

1. $1 \in \mathbb{N}^+$
2. $\forall x \in \mathbb{N}^+$ に対し, 次の数と呼ばれる $x + 1 \in \mathbb{N}^+$ がただ一つ存在する。
3. $x + 1 = 1$ となる x は存在しない。
4. $x + 1 = y + 1$ なら, $x = y$ 。
5. \mathbb{N}^+ は1-4を満たす最小の集合である。
 $\{1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, (1 + 1 + 1) + 1, \dots\}$ のこと

自然数

$$\{1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, (1 + 1 + 1) + 1, \dots\}$$

を簡単に

$$\{1, 2, 3, 4 \dots\}$$

と書く。

2. 自然数の性質

Th.1.

自然数の部分集合 $N' \subseteq N^+$ について,

1. $1 \in N'$
2. $x \in N' \rightarrow x + 1 \in N'$

が成り立てば, $N' = N^+$ である。

証明

自然数の部分集合 $N' \subseteq N^+$ で条件 1、2 を満たすことは、ペアノの公理の1-4を満たす。 N^+ は最小の集合であるので $N' = N^+$ ■

3. 数学的帰納法

Th 2.

$\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n)]$ を自然数に関する命題とする。このとき,

(1) $P(1) = T$

(2) $\forall k \in \mathbb{N}^+ [P(k) = T \rightarrow P(k + 1) = T]$ である。

が成立すれば

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n) = T]$$

数学的帰納法を証明せよ。

Th 2.

$\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n)]$ を自然数に関する命題とする。このとき、

(1) $P(1) = T$

(2) $\forall k \in \mathbb{N}^+ [P(k) = T \rightarrow P(k + 1) = T]$ である。

が成立すれば $\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n) = T]$

証明

(1)(2) が成り立つとき、

$$\begin{aligned} P(1) = T &\rightarrow P(1 + 1) = P(2) = T \\ &\rightarrow P(2 + 1) = P(3) = T \rightarrow \dots \end{aligned}$$

となり、 $\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n)]$ は真である。 ■

注) Th 1 は命題の真理集合で、Th 2を書き変えただけ。

数学的帰納法の手順

1. 「 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ についての命題を $P(n)$ とおき、数学的帰納法により証明する。」と書く。
2. 「1. $n = 1$ のとき, 」と場合分けし、 $P(1)$ が真であることを証明。
3. 「2. $n = k$ のとき, $P(k) = T$ と仮定する。」と場合分けする。 (\rightarrow は含意型の証明なのでその手順と同じ)
4. $n = k$ のとき, $P(k) = T$ を用いて, $P(k + 1) = T$ を示す。
5. 「これより, $\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n) \text{ が成り立つ}]$ 」と書く。

例題1

次の命題を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

例題1

次の命題を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

[証明]

命題 $P(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ とし, 数学的帰納法により証明する。

- (1) $n = 1$ のとき, 左辺は $P(1) = 1$, 右辺は $\frac{1}{2}1(1+1) = 1$ で $P(1)$ は真。
- (2) $n = k$ のとき, $P(k) = T$ と仮定する。つまり,

$$P(k) = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$n = k + 1$ のとき, $P(k + 1)$ の左辺は

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1)$$

①より, $= \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \left(\frac{1}{2}k+1\right)(k+1) = \frac{1}{2}(k+2)(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ は $P(k+1)$ の右辺。

これより, $\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n)=T]$

例題 2

次の命題を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

例題 2

次の命題を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$$

[証明]

命題 $P(n) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$ とし, 数学的帰納法により証明する。

(1) $n = 1$ のとき, 左辺は $P(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$, 右辺は $1^2 = 1$ で $P(1)$ は真。

(2) $n = k$ のとき, $P(k) = T$ と仮定する。つまり,

$$P(k) = \sum_{i=1}^k (2i - 1) = k^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$n = k + 1$ のとき, $P(k + 1)$ の左辺は①より,

$$k^2 + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

$(k + 1)^2$ は $P(k + 1)$ の右辺。

これより, $\forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n) = T]$

4. 漸化式

Def 1 数列 a_1, a_2, \dots, a_n が

$$\begin{aligned} a_1 &= a, \\ a_n &= a_{n-1} + d, n \geq 2 \end{aligned}$$

を満たすとき, この数列を「等差数列」と呼ぶ。

4. 漸化式

Def 1 数列 a_1, a_2, \dots, a_n が

$$\begin{aligned}a_1 &= a, \\ a_n &= a_{n-1} + d, n \geq 2\end{aligned}$$

を満たすとき, この数列を「等差数列」と呼ぶ。

Def 2 数列 a_1, a_2, \dots, a_n が

$$\begin{aligned}a_1 &= a, \\ a_n &= a_{n-1}r, n \geq 2\end{aligned}$$

を満たすとき, この数列を「等比数列」と呼ぶ。

4. 漸化式

Def 3.

数列の第 n 項 a_n が a_{n-1} までの項と初期値 $a_1 = a$ で表せるとき, この式を「漸化式」と呼ぶ。

5. 再帰的定義（帰納的定義）

漸化式のように初期値が与えられ、 a_n が a_{n-1} までの式で与えられるような定義は数学的帰納法に似ている。

このように、定義しようとしている概念そのものを用いて概念を定義することを「再帰的定義」（帰納的定義ともいう）と呼ぶ。

例 1

自分の子孫を再帰的に定義せよ。

例 1

自分の子孫を再帰的に定義せよ。

- (1) 自分の子どもは子孫である。
- (2) 子孫の子どもは子孫である。

例 2

$n!$ の定義は、一般的には

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 1$$

で与えられる。…が定義としてはあいまいである。

$n!$ を再帰的に定義せよ。

例 2

$n!$ の定義は、一般的には

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdots 1$$

で与えられる。

$n!$ の再帰的定義は以下のように定義できる。

(1) $0! = 1,$

(2) $n \in \mathbb{N}^+$ について $n! = n \cdot (n - 1)!$

…がなく明確に定義できる。

例 3

和の記号 Σ の定義は,

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Σ を再帰的に定義せよ。

例 3

和の記号 Σ の定義は,

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Σ を再帰的に定義せよ。

(1) $\sum_{i=1}^1 a_i = a_1,$

(2) 2以上の自然数 n について,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$$

例 4

「正の奇数」全体の集合を再帰的に定義せよ。

「正の偶数」全体の集合を再帰的に定義せよ。

例 4

「正の奇数」全体の集合の再帰的定義

1. $1 \in O,$
2. $n \in O \rightarrow n + 2 \in O$

「正の偶数」全体の集合の再帰的定義

1. $2 \in E,$
2. $n \in E \rightarrow n + 2 \in E$

例 5 余因子展開

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式 $\det(A)$ について i 行と j 列を取り除いて得られる $(n - 1)$ 次行列式 A_{ij} を (i, j) 成分の余因子と呼ぶ。余因子により行列式は再帰的定義で以下のように計算できる。

(1) $n = 1$ のとき, $\det(A) = a_{11}$

(2) $n \geq 2$ のとき, $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j})$.

例 5 余因子展開

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A)$$

を求めよ。

例 5 余因子展開

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) =$$

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) =$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$-3 + 12 - 9 = 0$$

問

次の数列はどのような規則に従って数がなっているか？

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
55, 89, 144, 233,

問

次の数列はどのような規則にしたがって
数がなっているか？

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
55, 89, 144, 233,

答え

はじめの2つの1を除いたこの数列のそ
れぞれの数は、その1つ前の数と2つ前
の数との和になっている。

フィボナッチ数列

数列 a_1, a_2, \dots, a_n が

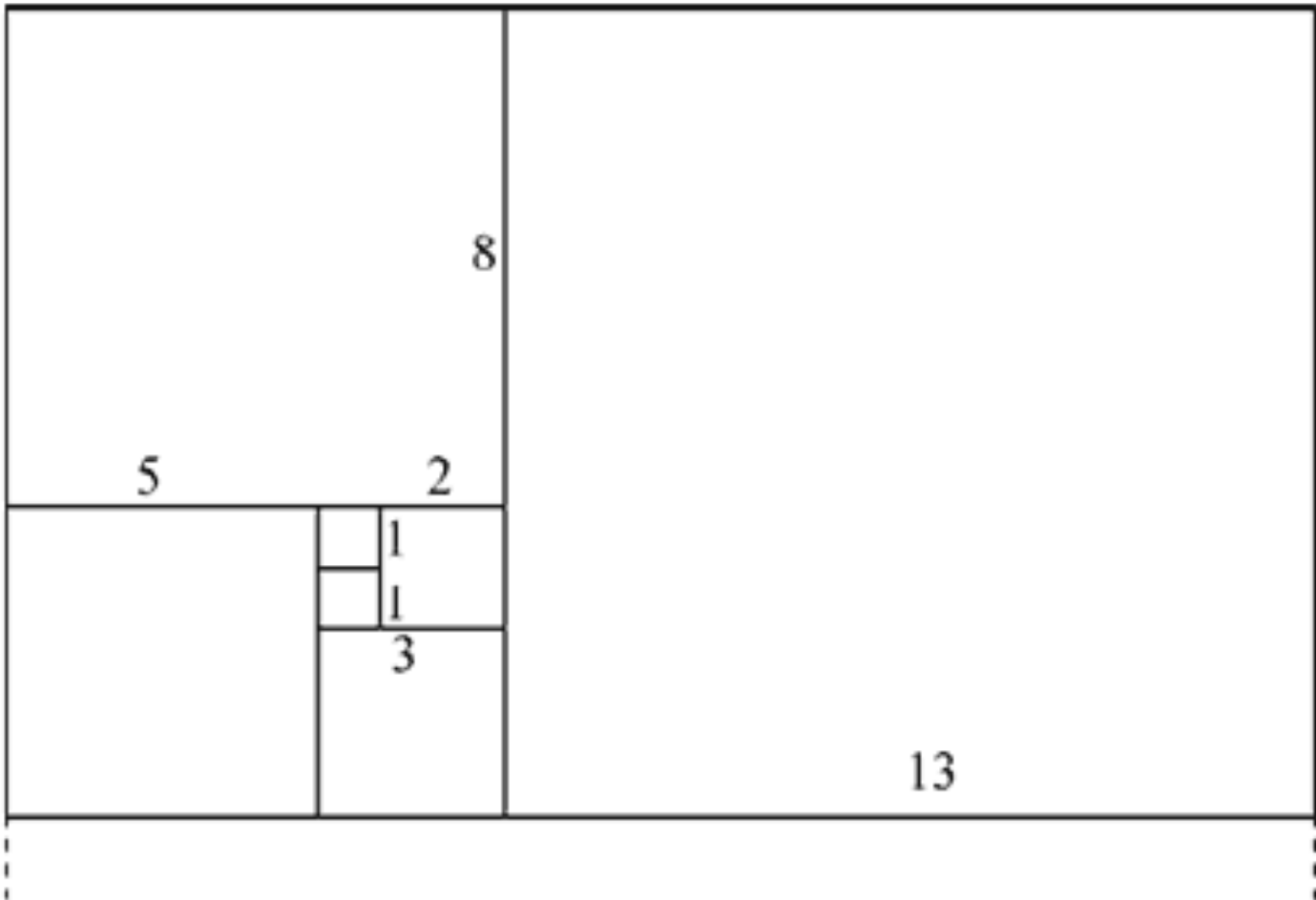
(1) $a_1 = 1, a_2 = 1,$

(2) 3以上の自然数 n について,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

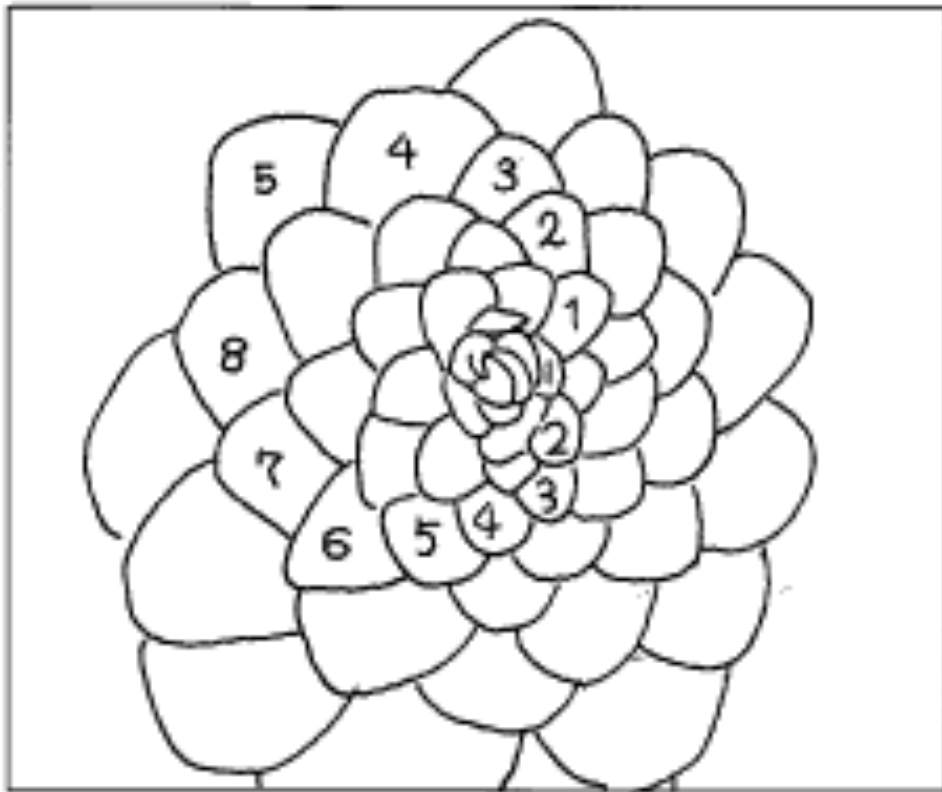
のとき, フィボナッチ数列と呼ぶ。

フィボナッチ数列の長方形



松ぼっくりや'パイナップル'の かさの数

右回りに8個ずつ, 左回りに5個ずつ, または右回りに5個ずつ, 左回りに3個ずつになっている。この, (8, 5), (5, 3)はフィボナッチ数である。 参照 <http://kk-online.jp/math007.html>



フィボナッチ数列と周期数列

Th 3

フィボナッチ数列の各項を5以外の素数で割ってできる余りの列は、周期数列である。

例

フィボナッチ数列の各項を2で割って、その余りを書きならべると、

1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0,
1, 1, ...

(1, 1, 0) という周期。これを「周期3」の周期数列という。

同様に3でわると、

1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1,
0, 1, ...

となり、これは「周期8」。

各項を11で割ると、

1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5,
8, 2, 10, 1, 0, ... となり、これは「周期10」。

Th 4

フィボナッチ数列の中から2つの数を取り出したとき、その二数の最大公約数もフィボナッチ数列の中にある。

神の与えた黄金比

$$\text{黄金長方形のたて, 横の辺の比} = 1 : \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

上の比を「黄金比」とよび、これもまた、古代ギリシャの時代から、もっとも均整がとれ、美しい比であるとされてきた。

- ピラミッド（エジプト）...ピラミッドの側面にある三角形の高さと底辺の半分の長さの比は黄金比。
- パルテノン神殿（アテネ B・C 400）...この神殿を正面から見ると、たて、横の比はほぼ黄金比。
- ミロのヴィーナス（メロス島出土 B・C 200）...均整のとれたプロポーションのこの彫像は、身体の様々な部分に黄金比が応用されています。たとえば、ヴィーナスの頭のとっぺんからおへそまでの長さと、おへそからつま先までの長さの比は黄金比。

Th 5

フィボナッチ数列のとなり合う2つの数の比は、黄金比に収束する。

例 以下を証明せよ。

Th 6 カッシーニの恒等式

変数 $n \in \mathbb{N}^+$ について a_n をフィボナッチ数列の n 項とする。 以下を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ ((a_{n+1})^2 - a_{n+2}a_n = (-1)^n)$$

Th 6 カッシーニの恒等式

変数 $n \in \mathbb{N}^+$ について a_n をフィボナッチ数列の n 項とする。以下を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ ((a_{n+1})^2 - a_{n+2}a_n = (-1)^n)$$

[証明]

命題 $P(n) = (a_{n+1})^2 - a_{n+2}a_n = (-1)^n$ とし、数学的帰納法により証明する。

(1) $n = 1$ のとき、

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{より,}$$
$$(1)^2 - (2)1 = (-1)^1$$

$P(1) = (a_{n+1})^2 - a_{n+2}a_n = (-1)^n$ が成り立つ。

(2) $k \in \mathbb{N}^+$ について

$P(k) = (a_{k+1})^2 - a_{k+2}a_k = (-1)^k$ が成り立つと仮定する。

(2) $k \in \mathbb{N}^+$ について

$P(k) = (a_{k+1})^2 - a_{k+2}a_k = (-1)^k$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} \text{このとき } P(k+1) &= (a_{k+2})^2 - a_{k+3}a_{k+1} \\ &= (a_{k+2})^2 - (a_{k+2} + a_{k+1})a_{k+1} \\ &= (a_{k+2})^2 - a_{k+2}a_{k+1} - (a_{k+1})^2 \quad \text{①} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{k+1})^2 - a_{k+2}a_k &= (-1)^k \text{ より,} \\ (a_{k+1})^2 &= a_{k+2}a_k + (-1)^k \end{aligned}$$

を①に代入

$$\text{①} = (a_{k+2})^2 - a_{k+2}a_{k+1} - a_{k+2}a_k - (-1)^k$$

フィボナッチ数列の定義から $(a_{k+2} - a_{k+1} - a_k) = 0$ より

$$\text{①} = a_{k+2}(a_{k+2} - a_{k+1} - a_k) + (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}$$

$P(k+1)$ が成り立つ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ ((a_{n+1})^2 - a_{n+2}a_n = (-1)^n) \quad \blacksquare$$

6. 再帰的計算（再帰的手続き）

「自分自身と同じ構造」を次々にたどっていく計算。

再掲

$n!$ の再帰的計算

(1) $0! = 1,$

(2) 1以上の整数 n について, $n! = n \cdot (n - 1)!$

$n!$ のプログラミング の再帰呼び出し)

(関数

```
int fact(int n)
{
```

```
    int m;
```

```
    if (n == 0)
```

```
        return 1;    // 0! = 1
```

```
    /* 以下、nが0でないとき */
```

```
    m = fact(n - 1);    // (n-1)! を求めて
```

それを m とおく。このfact(n-1)が再帰呼
出し。

```
    return n * m;    // n! = n * m
```

```
}
```

ユークリッドの互除法

$m, n \in \mathbb{N}^+, m \geq n$ とする。このとき、最大公約数 $\text{ged}(m, n)$ について

「 $\exists k \in \mathbb{N}^+, m = kn + r \rightarrow \text{ged}(m, n) = \text{ged}(n, r)$ 」 \rightarrow

「 m を n で割った余りを r とすると $\text{ged}(m, n) = \text{ged}(n, r)$ 」

例 $\text{ged}(36, 21)$

$$36 = 1 \times 21 + 15 \rightarrow \text{ged}(36, 21) = \text{ged}(21, 15),$$

$$21 = 1 \times 15 + 6 \rightarrow \text{ged}(21, 15) = \text{ged}(15, 6),$$

ユークリッドの互除法の再帰的計算

$m, n \in \mathbb{N}^+, m \geq n$ とする。このとき、最大公約数 $\text{ged}(m, n)$ について

$n \neq 0$ のとき、 $\text{ged}(m, n) = \text{ged}(n, m \bmod n)$

$n = 0$ のとき、 $\text{ged}(m, n) = m$

例 $\text{ged}(36, 21)$

$36 = 1 \times 21 + 15 \rightarrow \text{ged}(36, 21) = \text{ged}(21, 15),$

$21 = 1 \times 15 + 6 \rightarrow \text{ged}(21, 15) = \text{ged}(15, 6),$

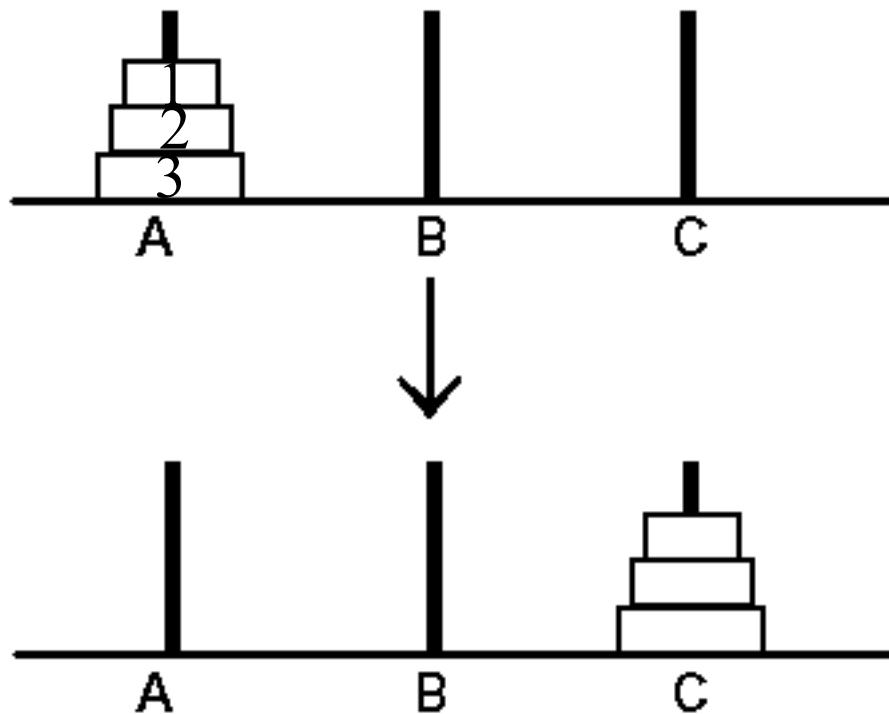
$15 = 2 \times 6 + 3 \rightarrow \text{ged}(15, 6) = \text{ged}(6, 3),$

$6 = 2 \times 3 + 0 \rightarrow \text{ged}(6, 3) = \text{ged}(3, 0) = 3$

ユークリッドの互除法の再帰プログラミング

```
int ged( int a, int b )  
{  
    if( a % b == 0 ) return b;  
    return ged( b, a % b );  
}
```

ハノイの塔



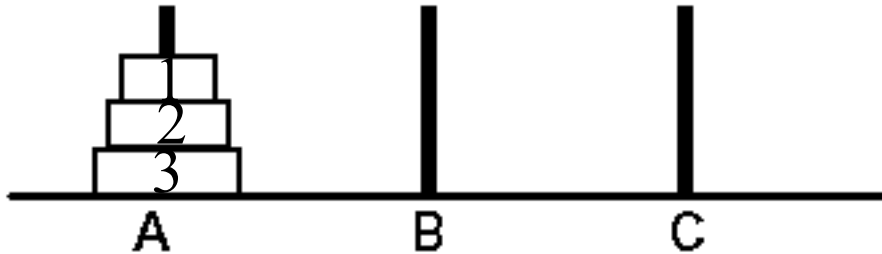
Hanoi(3,A,C):Aの3枚をAからCへ移す関数

Hanoi(#3,A,C): 円盤3をAからCへ移す関数

Hanoi(3,A,C)=[Hanoi(2,A,B),
Hanoi(#3,A,C),Hanoi(2,B,C)]

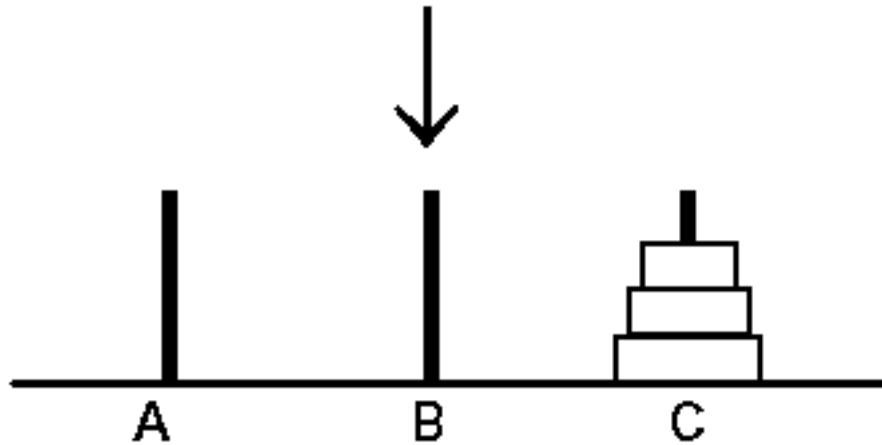
ハノイの塔 (再帰的手順)

Hanoi(3,A,C):Aの3枚をAからCへ移す関数



Hanoi(#3,A,C): 円盤3をAからCへ移す関数

Hanoi(3,A,C)=[Hanoi(2,A,B),
Hanoi(#3,A,C),Hanoi(2,B,C)]



円盤の数nについて再帰的手順

(1) Hanoi(#1,A,C)

(2) $n \geq 2$

Hanoi(n, A,C)=[Hanoi(n-1,A,B),
Hanoi(#n,A,C),Hanoi(n-1,B,C)]

8. 良い証明のためのTips

1. 最初に証明の仕方を宣言する。Ex. ①...を証明するために背理法を用いる。②...を証明するために以下の場合に分ける。③...を証明するために数学的帰納法を用いる。
2. 独立の数式や理由をバラバラにつなぎ合わせているような証明はよくない。順序だてて、次の式や文をステップごとに導いているように構成しなければならない。
3. 多くの初心者が説明を少なくし、計算結果を長く書く。証明とは文章である。読者の立場に立ち、計算は結果のみでよく、その理由やあらすじを文章で書け。
4. よく推敲（読み直し）、なるべくシンプルに書け。
5. 長い証明は 構造化せよ。定理 (Theorem) 、補題(Lemma) 、系 (corollary)に分解するのもよい。
6. 「～は明らか」はよく用いられる。しかし、読者にとって本当に「～は明らか」なのかを考えよ。
7. わからないのは読者のせいではない。どのようにすればわかりやすい証明になるか、読者が「確かに！」と納得してくれるかを考えよ。
8. 読者は上のような作法になれている読者であると考えて書け。

まとめ

- ① 自然数とペアノの公理
- ② 数学的帰納法
- ③ 再帰的定義
- ④ 再帰的計算

演習問題

問題1

次の命題を証明せよ。

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

問題2

命題 $P(n)$ について,

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ [\forall i \in \mathbb{N}^+ (i < n \rightarrow P(i)) \rightarrow P(n)] \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ [P(n)]$$

を証明せよ。

問題3.

問題2の定理を用いて「 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ は素数の積で表せる」を証明せよ。

ただし、1を素数として扱う。

問題4. 集合 A_1, \dots, A_n について,
以下を証明せよ.

$$(1) \quad \overline{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$(2) \quad \overline{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$