

11.写像 (関数) (2)

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

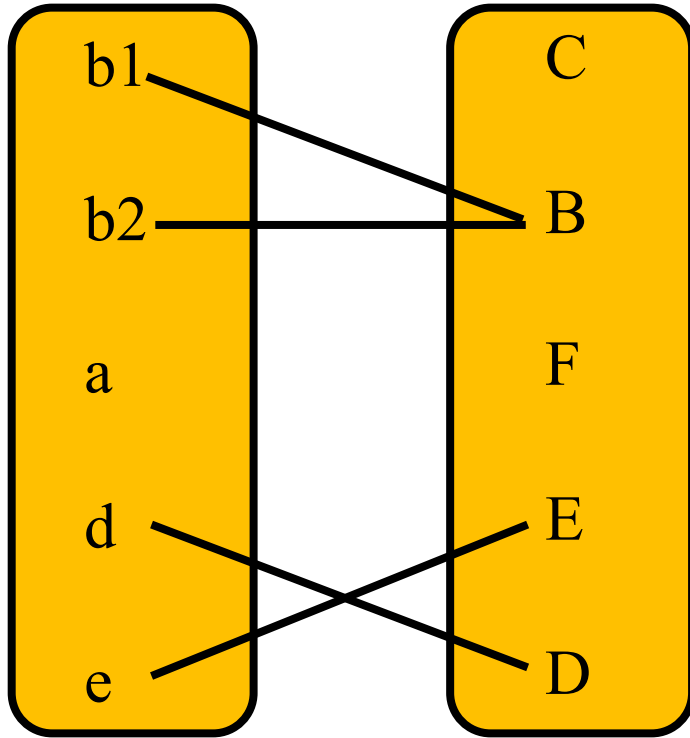
本授業の構成

- 第1回 10月2日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月9日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月16日：第3回 命題論理
- 第4回 10月23日：第4回 述語論理
- 第5回 10月30日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月6日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月13日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 11月20日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月4日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月11日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月18日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 12月25日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
- 第13回 1月15日：第13回 同値関係
- 第14回 1月22日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 1月29日：第15回 期末試験

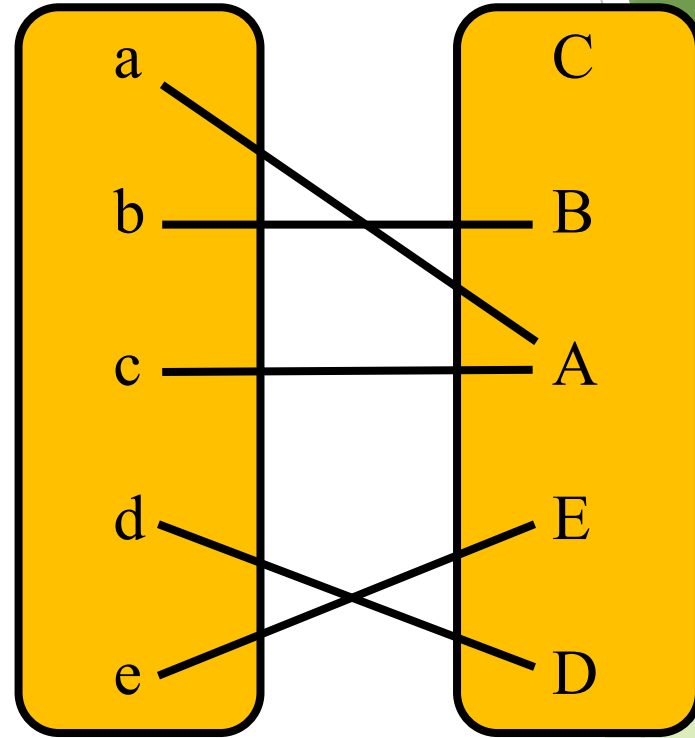
1. 本日の目標

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

復習 以下はどのような写像か？

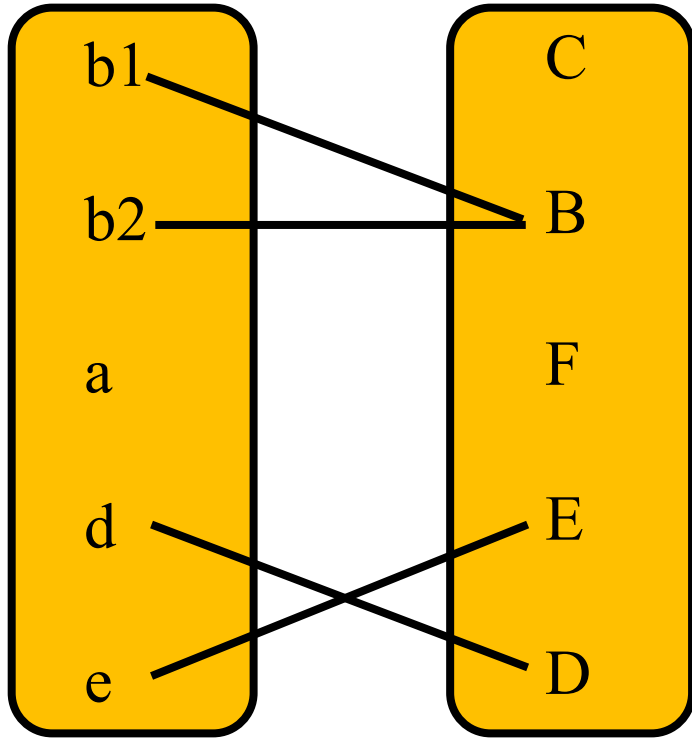


?????

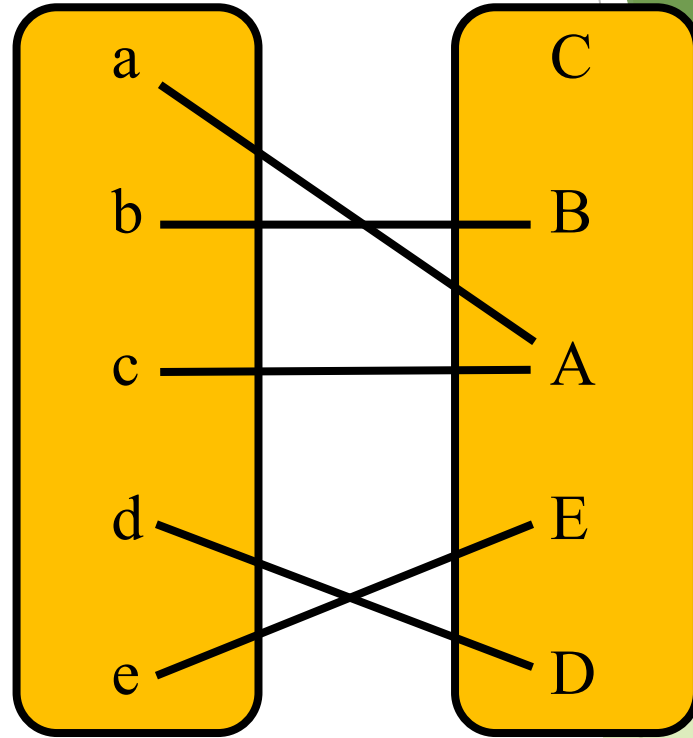


?????

復習 以下はどのような写像か？

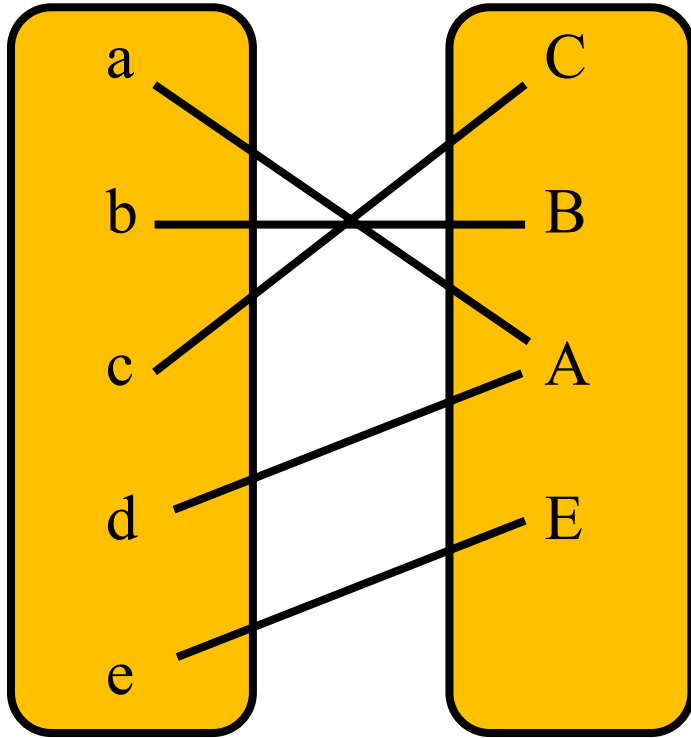


部分写像

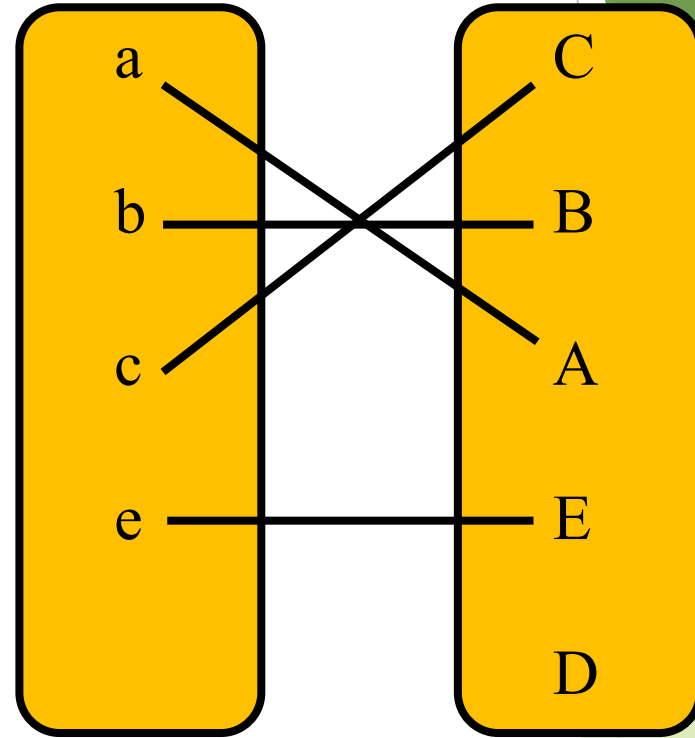


写像(関数)
 \subseteq 部分写像

復習 以下はどのような写像か？

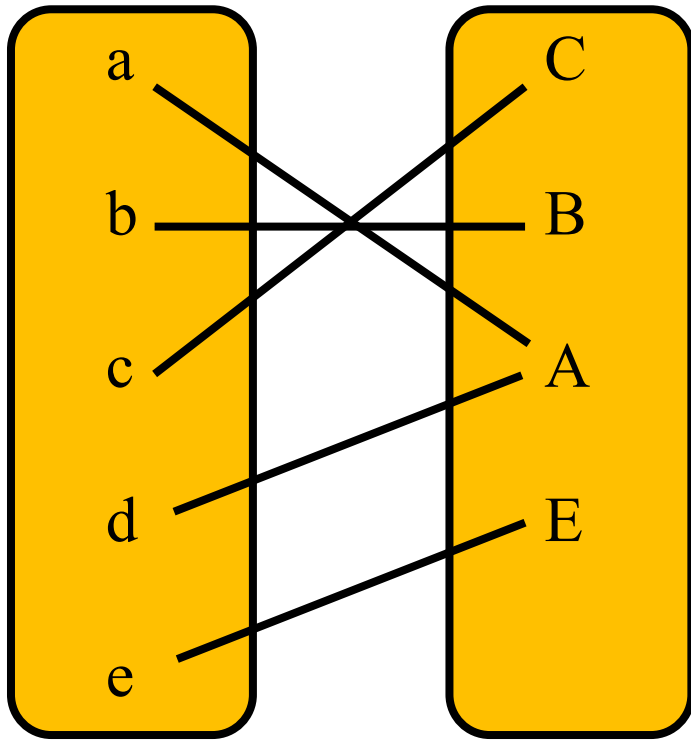


?????

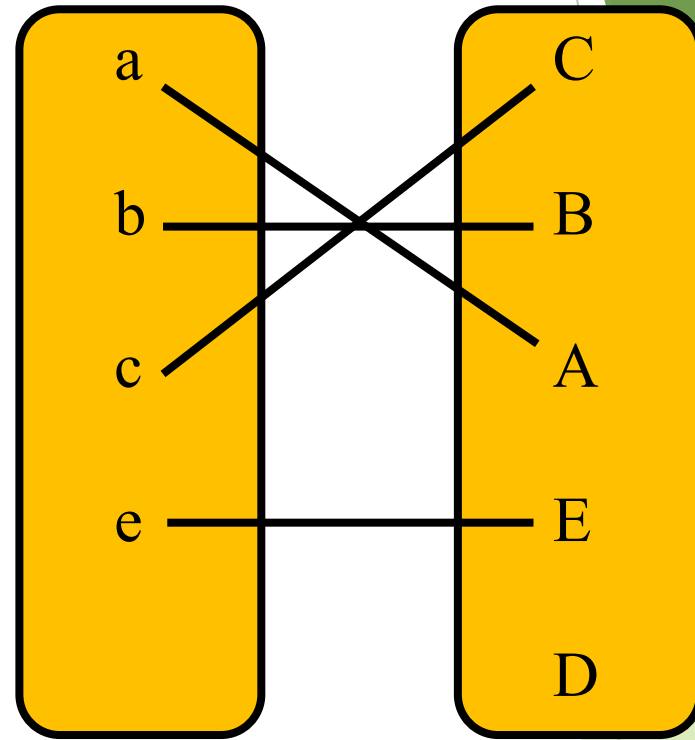


?????

復習 以下はどのような写像か？

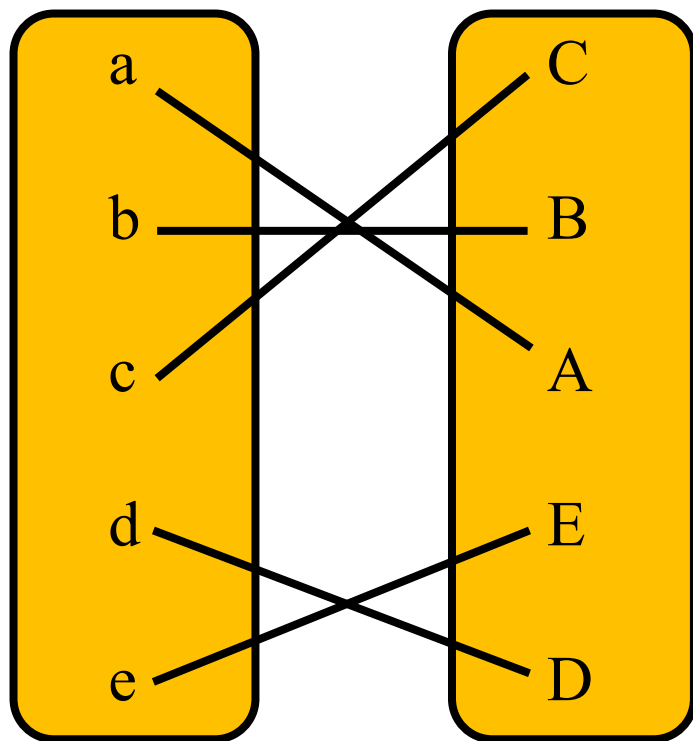


全射 \subseteq
写像 \subseteq 部分
写像



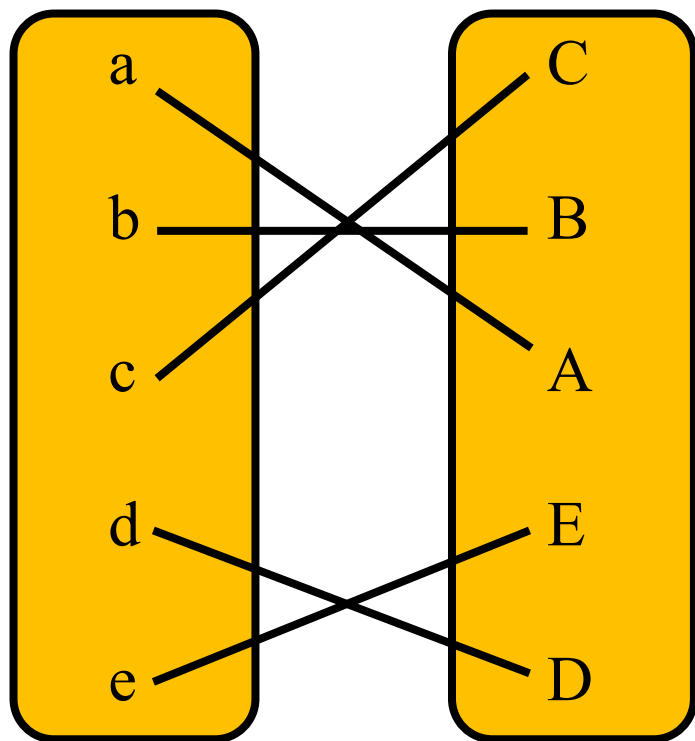
単射 \subseteq
写像 \subseteq 部分
写像

復習 以下はどのような写像か？



??????

復習 以下はどのような写像か？



全単射(\subseteq 全射または \subseteq 単射) \subseteq
写像 \subseteq 部分写像

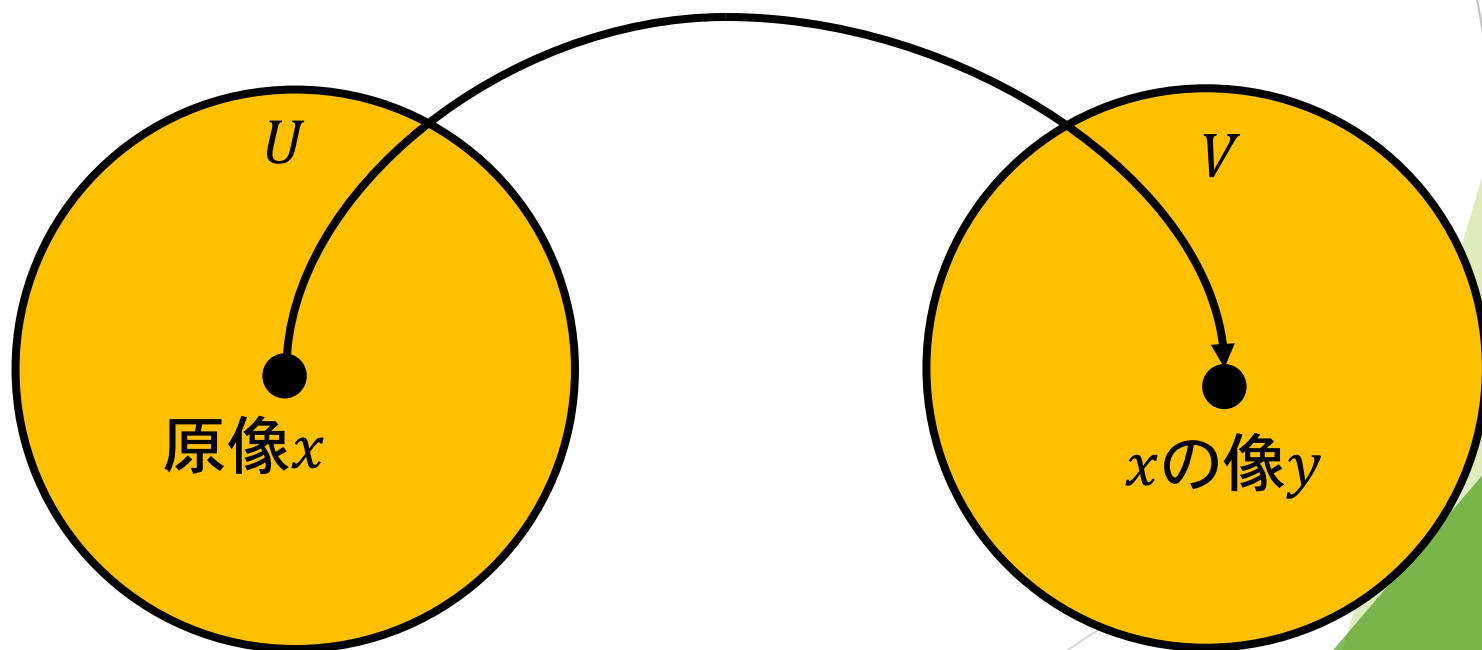
1. 像と原像

Def 1.

$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$y = f(x) \in V$ を $x \in U$ の像,

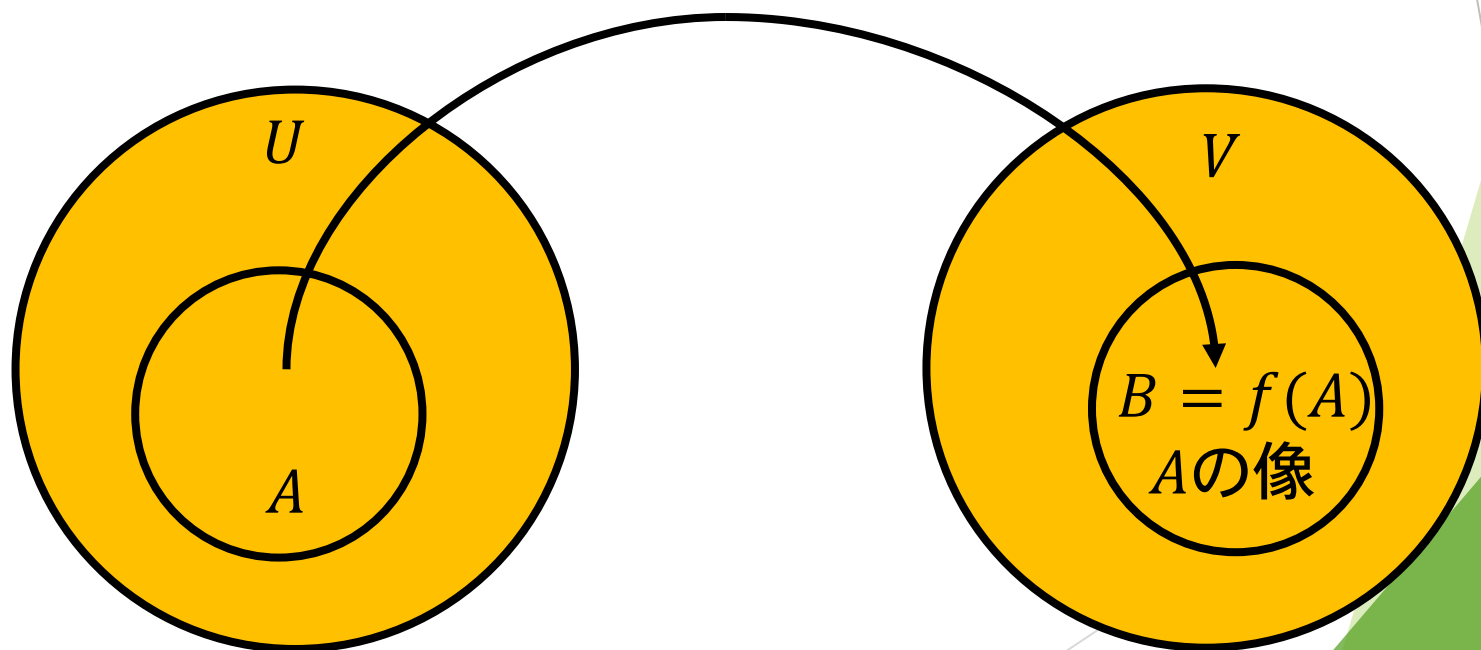
$x \in U$ を $y \in V$ の原像という。



1. 像と原像

像の概念を部分集合に拡張：

$f: U \mapsto V; f(x)$ について 部分集合 $A \subseteq U, B \subseteq V$ を考える。 V の要素のうち、 A の要素の f による値になっているものを集めて、写像 f による集合 A の像という。 $B = f(A)$ と書く。



1. 像と原像

数学的に定義しよう。

内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{y | \text{????????????}\}$$

を A の像という。

1. 像と原像

数学的に定義しよう。
内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$B = f(A) = \{y | \exists x \in A [f(x) = y]\}$
を A の像という。

1. 像と原像

数学的に定義しよう。

もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{ \text{? ? ? ? ?} \}$$

を A の像という。

1. 像と原像

数学的に定義しよう。

もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$, $A \subseteq U, B \subseteq V$ について

$$B = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

を A の像という。

例題 1 .

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ の f の値域を像を用いて示せ。

例題 1 .

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ の f の値域を像を用いて示せ。

正答

$$\text{ran}(f) = f(U)$$

例題 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について f は U から V への全射であるときの必要十分条件は

$$f(U) = \text{????}$$

例題 2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について f は U から V への全射であるときの必要十分条件は

正答

$$f(U) = V$$

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$

$f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき,

(1) f の値域を求めよ。

(2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。

(3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$

$f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき,

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f(1,2,3)$ を求めよ。
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f(1,3,5)$ を求めよ。

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$

$f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

このとき,

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
 $\{2,5\}$
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。

例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$

$f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。

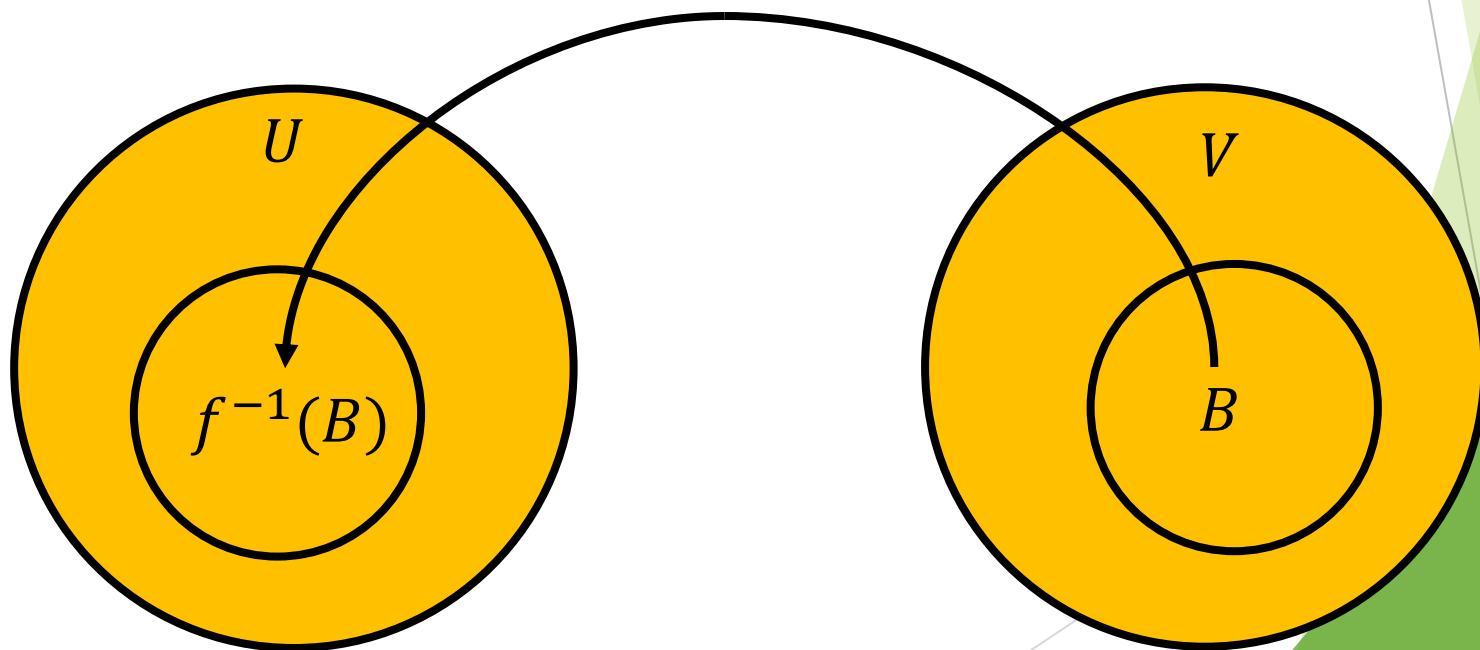
このとき,

- (1) f の値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$
- (2) $\{1,2,3\}$ の像 $f[(1,2,3)]$ を求めよ。
 $\{2,5\}$
- (3) $\{1,3,5\}$ の像 $f[(1,3,5)]$ を求めよ。
 $\{1,2,5\}$

2. 逆像

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

U の要素のうち f による値が B に属する要素を集めてできる集合を, 写像 f による B の逆像といい、 $f^{-1}(B)$ と書く。



2. 逆像

Def 3

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について,
以下の集合 $f^{-1}(B)$ を写像 f による
 B の逆像とよぶ。

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \quad .$$

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$

とする。

このとき,

- (1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。
- (2) $\{2,5\}$ の逆像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$

とする。

このとき,

- (1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。 $\{5\}$
- (2) $\{2,5\}$ の逆像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}$, $f: U \mapsto U$; $f(x)$ について
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。

このとき,

- (1) $\{1\}$ の逆像 $f^{-1}[\{1\}]$ を求めよ。 $\{5\}$
- (2) $\{2,5\}$ の逆像 $f^{-1}[\{2,5\}]$ を求めよ。 $\{1,2,3,4\}$

例題2.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $A \subseteq U$ を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

例題2.

写像 $f: U \mapsto V$; $f(x)$ について, $A \subseteq U$ を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

[証明] **定義に戻れ**: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では \forall をとって束縛変数 (ある値) $x \in A$ と仮定して右辺を導く。

$x \in A$ と仮定すると, $f(x) \in f(A)$. このとき逆像の定義より $f^{-1}[f(A)] = \{x \mid f(x) \in f(A)\}$

より $x \in f^{-1}[f(A)]$. 従って $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$



例題3.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $B \subseteq V$ を考える。

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ を証明せよ。

例題3.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について, $B \subseteq V$ を考える。

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ を証明せよ。

[証明] **定義に戻れ** : $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では \forall をとり束縛変数 (ある値) $x \in A$ と仮定して右辺を導く。

$y \in f[f^{-1}(B)]$ と仮定すると, $x \in f^{-1}(B)$ かつ $f(x) = y$ を満たす x が存在する。このとき, $x \in f^{-1}(B)$ なので $f(x) \in B$. 従って, $y \in B$.

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$ ■

3. 写像の合成

Def 4.

$f: U \mapsto V; f(x)$ と $g: V \mapsto W; g(x)$ に対し,
$$h: U \mapsto W; h(x) = g(f(x))$$

を合成写像 $h = g \circ f$ と表す。

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$ とする。

このとき,

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(0) = p$$

例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $g \circ f$ を求めよ。

正答

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 1) \\ &= 2(x + 1) - 3 = 2x - 1\end{aligned}$$

従って

$$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1 .$$

例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

正答

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x - 3) \\ &= (2x - 3) + 1 = 2x - 2\end{aligned}$$

従って

$$f \circ g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 2 .$$

$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1$ とは異なる

例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき, 合成写像 $f \circ g$ を求めよ。

正答

g は写像ではないので解なし

$x = 0$ のとき, $g(x) = -2$ で \mathbb{N} でない。

例題4

$$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$$

のとき, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を証明せよ。

例題4

$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$
のとき, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ を証明せよ。

[証明]

全称記号 $\forall x \in U$ が隠れている全称記号についての証明。 \forall をとって束縛変数として扱う。

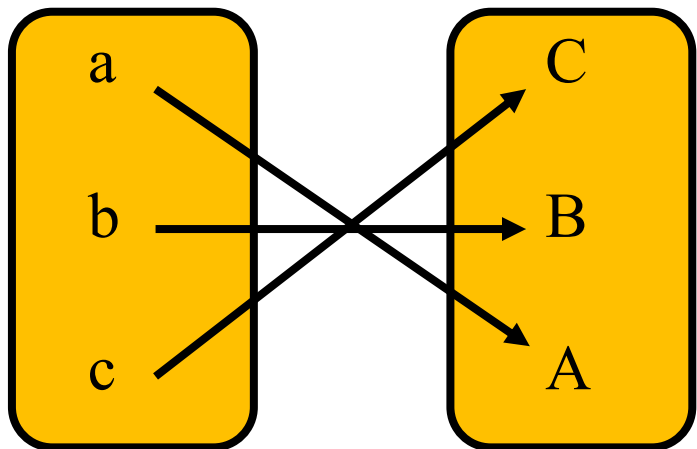
$x \in U$ とする。

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = \\ h((g \circ f)(x)) &= (h \circ (g \circ f))(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

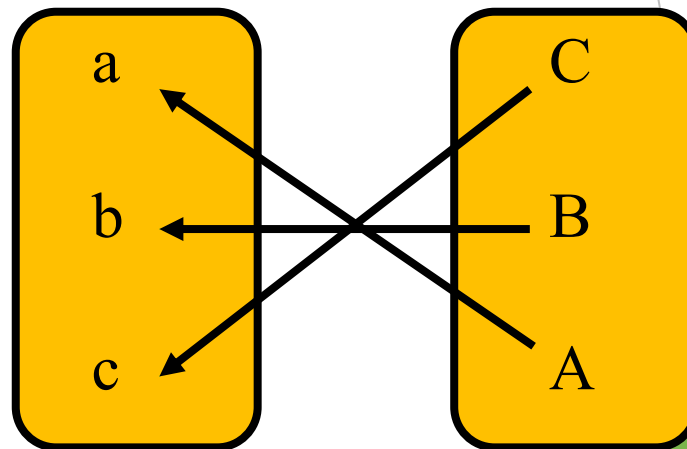
4. 逆写像

Def 5

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1}: V \mapsto U$ を f の逆写像と呼ぶ。



$f: U \mapsto V$



$f^{-1}: V \mapsto U$

例題 1

$$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$$

$f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ のとき、逆写像を求めよ。

例題 1

$$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$$

$f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$ のとき、逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: V \mapsto U; 0 \mapsto b, 1 \mapsto c, 2 \mapsto a$$

例題 2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x) = y$
の逆写像を求めよ。

例題 2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x) = y$
の逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; f^{-1}(x) = \ln(y)$$

例題3

恒等写像 $\text{id}_U: U \mapsto U$; $\text{id}_U(x) = x$ の逆写像 id_U^{-1} を求めよ。

例題3

恒等写像 $\text{id}_U: U \mapsto U$; $\text{id}_U(x) = x$ の逆写像 id_U^{-1} を求めよ。

[回答]

$$\text{id}_U^{-1}(x) = \text{id}_U(x) = x$$

例題4

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1} \circ f$ はどのような写像か？

例題4

$f: U \mapsto V$ が全単射のとき,
 $f^{-1} \circ f$ はどのような写像か？

[回答]

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_U(x)$$

まとめ

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

演習問題

問題1

$f: U \mapsto V$, $A_1, A_2 \subseteq U$ のとき,
以下を証明せよ.

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2).$$

問題2

$f: U \mapsto V$, $B_1, B_2 \subseteq V$ のとき,
以下を証明せよ.

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2).$$

問題3

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto W$ とする.

以下を証明せよ.

- (1) f と g が単射ならば $g \circ f$ も単射である.
- (2) f と g が全射ならば $g \circ f$ も全射である.

問題4

$$U = \{a\}, V = \{a, b\}$$

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto U$ を $f(a) = a, g(a) = a, g(b) = a$ とする。

このとき、 $g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ恒等写像となるか？