

# 13. 同値関係

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

# 本授業の構成

- 第1回 10月3日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月10日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月17日：第3回 命題論理
- 第4回 10月24日：第4回 述語論理
- 第5回 10月31日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月7日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月14日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 11月28日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月5日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月12日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月19日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 12月26日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、  
グラフによる表現
- 第13回 1月16日：第13回 同値関係
- 第14回 1月23日：第14回 順序関係：半順序集合、  
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 1月30日：第15回 期末試験

# 1. 本日の目標

- ① 整数の合同
- ② 剰余類
- ③ 同値関係
- ④ 反射律
- ⑤ 対称律
- ⑥ 推移律
- ⑦ 同値類

# 1. 関係 (二項関係)

再掲 5 章 :

Def 1.

二つの集合  $U, V$  の直積集合  $U \times V$  の部分集合  $R$  を  $U$  から  $V$  への「(二項) 関係」という。

また,  $R \ni (a, b)$  のとき  $aRb$  :  $a$  と  $b$  は関係ある

$R \not\ni (a, b)$  のとき  ~~$aRb$~~  :  $a$  と  $b$  は関係なし

と書く。

## 2. 同値関係のイメージ

二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

# 例：カレンダーの同値

January 1 令和XX年 20XX

日	月	火	水	木	金	土
29	30	31	<b>1</b> 水曜日 祝日	<b>2</b> 木曜日	<b>3</b> 金曜日	<b>4</b> 土曜日
<b>5</b> 日曜日	<b>6</b> 月曜日	<b>7</b> 火曜日	<b>8</b> 水曜日	<b>9</b> 木曜日	<b>10</b> 金曜日	<b>11</b> 土曜日
<b>12</b> 日曜日	<b>13</b> 月曜日 成人の日	<b>14</b> 火曜日	<b>15</b> 水曜日	<b>16</b> 木曜日	<b>17</b> 金曜日	<b>18</b> 土曜日
<b>19</b> 日曜日	<b>20</b> 月曜日	<b>21</b> 火曜日	<b>22</b> 水曜日	<b>23</b> 木曜日	<b>24</b> 金曜日	<b>25</b> 土曜日
<b>26</b> 日曜日	<b>27</b> 月曜日	<b>28</b> 火曜日	<b>29</b> 水曜日	<b>30</b> 木曜日	<b>31</b> 金曜日	1
2	3	4	5	6	7	8

## 例：カレンダーの同値

曜日と同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

$a, b$ をある月の日とする。

$a$ と $b$ が同じ曜日である関係を定式化せよ。

## 例：カレンダーの同値

曜日と同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

$a, b$ をある月の日とする。

$a$ と $b$ が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^+$ について

$$aRb : \exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$$



## 例：カレンダーの同値

曜日と同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

$a, b$  をある月の日とする。

$a$  と  $b$  が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^+$  について

$$aRb : \exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$$

このような関係を「 $a$  と  $b$  が 7 を法として合同である」と呼ぶ。

### 3. 整数の合同

整数の周期的な分類において  
同じ分類に入るもの。

離散数学の応用では、最も重  
要な概念の一つ。

### 3. 整数の合同

Def 1. 合同な整数

$m, n, p \in \mathbb{Z}$  について

$$\exists q \in \mathbb{Z} [(m - n) = pq]$$

のとき, 「 $m$ と $n$ は $p$ を法として合同である」といい,

$$m \equiv_p n$$

と書く。 $\equiv_p$ が合同関係を示す演算子。

## 例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

## 例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

## 例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

## 例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

## 例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。 ○
5. 121と110は3を法として合同である。 ○



## 例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。 ○
5. 121と110は3を法として合同である。 ×

## 4. 整数の剰余類

### Def 2. 整数の剰余類

$p$ を法とする $n$ の剰余類とは,  $n \in \mathbb{Z}$ について

$[n]_p = \{m \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} [(m - n) = pq]\}$   
と定義される。

# 例題

以下の $\mathbb{Z}$ 上の剰余類を求めよ。

(1)  $[7]_1$

(2)  $[3]_2$

(3)  $[4]_3$

(4)  $[1]_{10}$

# 例題

以下の $\mathbb{Z}$ 上の剰余類を求めよ。

(1)  $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2)  $[3]_2$

(3)  $[4]_3$

(4)  $[1]_{10}$

# 例題

以下の $\mathbb{Z}$ 上の剰余類を求めよ。

(1)  $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2)  $[3]_2 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$

(3)  $[4]_3$

(4)  $[1]_{10}$

# 例題

以下の $\mathbb{Z}$ 上の剰余類を求めよ。

(1)  $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2)  $[3]_2 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$

(3)  $[4]_3 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

(4)  $[1]_{10}$

# 例題

以下の $\mathbb{Z}$ 上の剰余類を求めよ。

(1)  $[7]_1 = \mathbb{Z}$

(2)  $[3]_2 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \dots\}$

(3)  $[4]_3 = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$

(4)  $[1]_{10} = \{\dots, -9, 1, 11, 21, \dots\}$

# ここまでのまとめ

- ▶ 整数の合同とは、ある周期で同じ分類ができること
- ▶ 同値関係は、その一般化。
- ▶ 二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係



次に数学的に同値関係を定義する。



## 5. 同値関係

Def 3.

$U$ 上の関係 $R$ が以下の条件を満たすとき、 $R$ を同値関係と呼ぶ。

(1) 反射律  $\forall x \in U, xRx$

(2) 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

(3) 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

このとき、 $(U, R)$ を同値集合と呼ぶ。

# 問1 反射性を満たすものは

Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分は自分と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問1 反射性を満たすものは

Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分は自分と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問1 反射性を満たすものは

Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分自分と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問1 反射性を満たすものは

Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分は自分と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問1 反射性を満たすものは

Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分自身と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問1 反射性を満たすものは

Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分自分と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ○
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問1 反射性を満たすものは

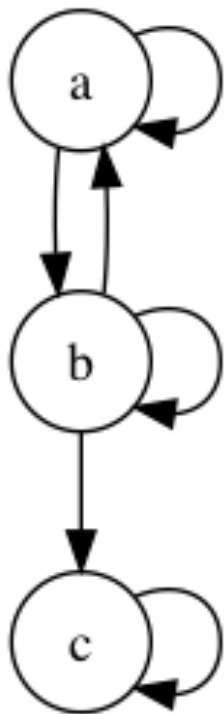
Def  $\forall x \in U, xRx$  : 自分は自分と関係ある

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ○
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$  ○

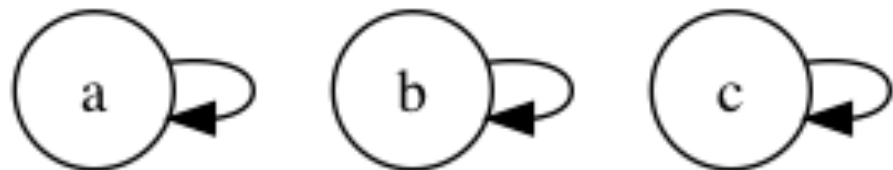


## 問2 反射性を満たすものは

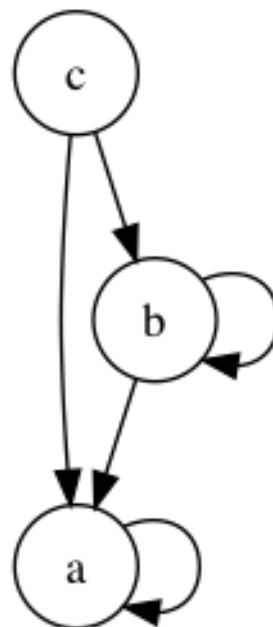
(1)



(2)

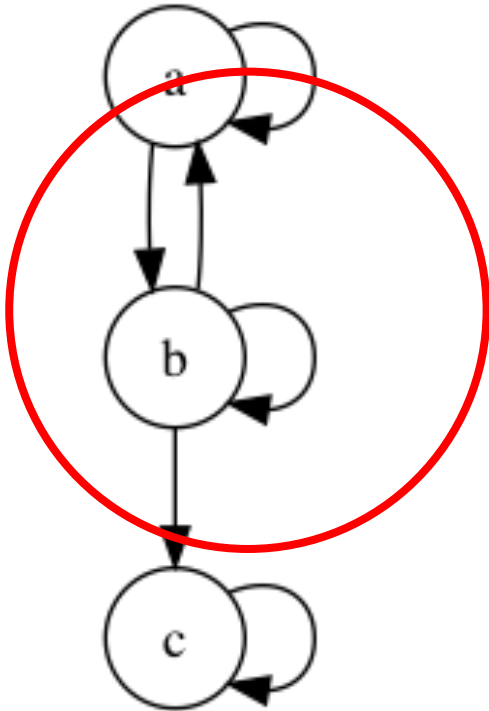


(3)

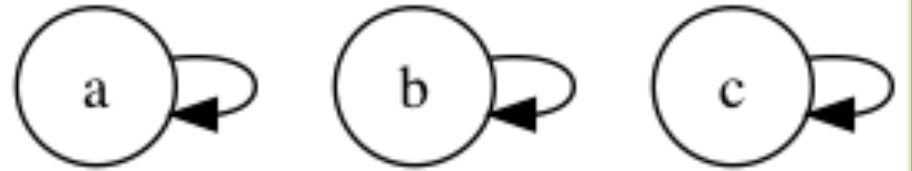


## 問2 反射性を満たすものは

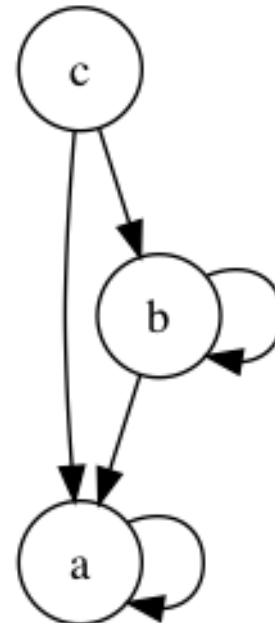
(1)



(2)

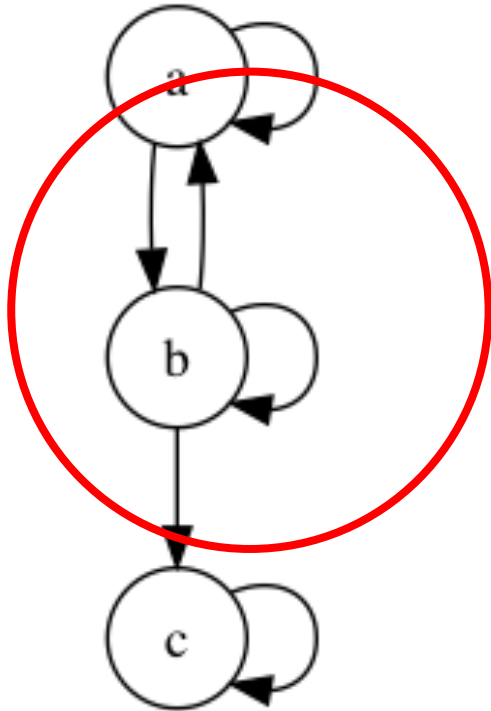


(3)

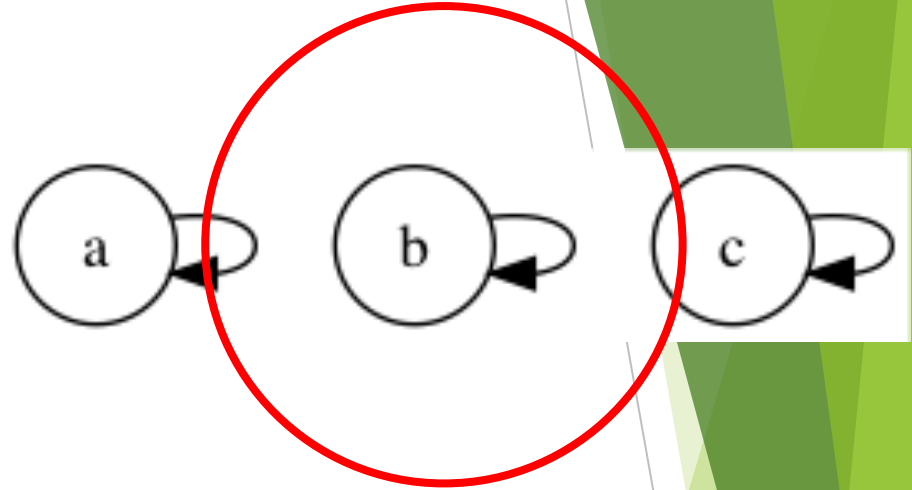


## 問2 反射性を満たすものは

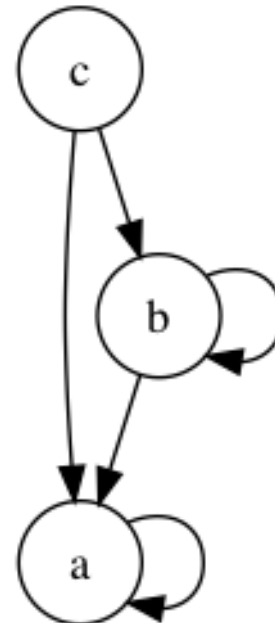
(1)



(2)

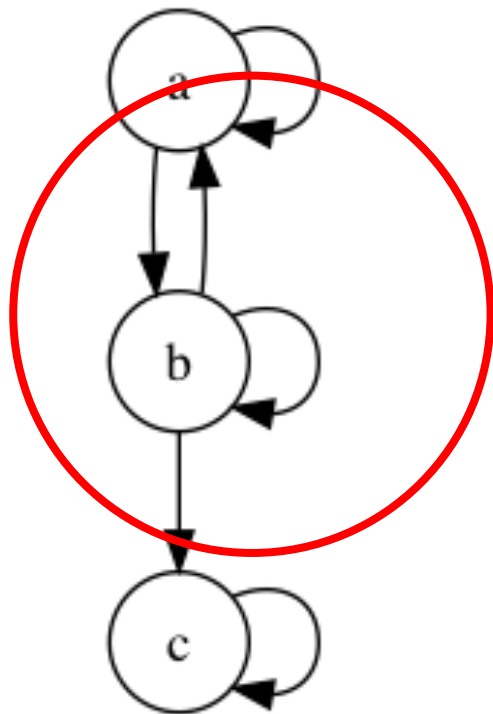


(3)

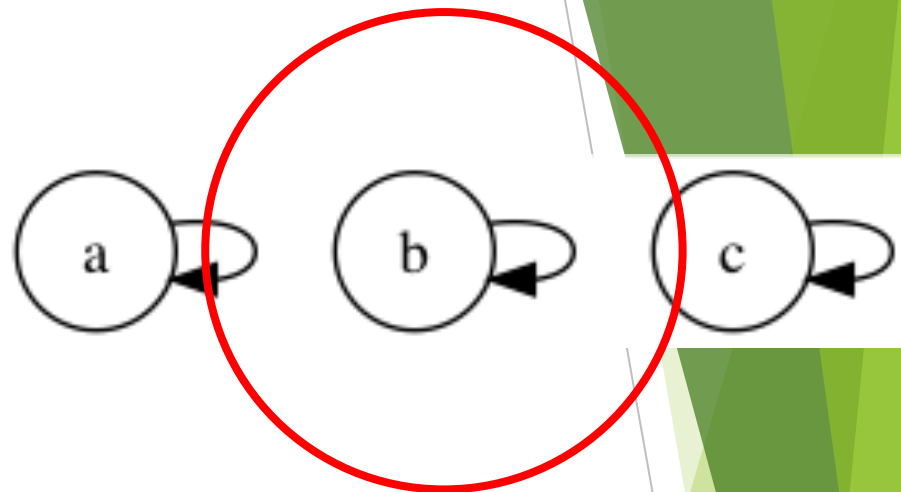


## 問2 反射性を満たすものは

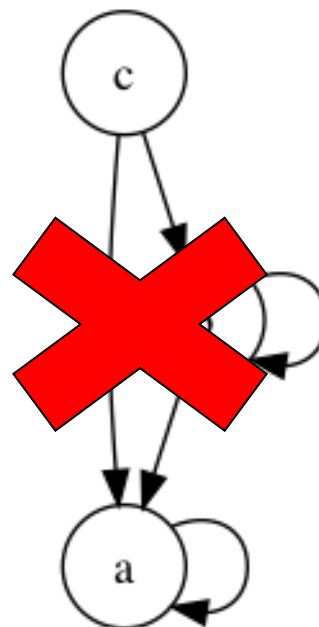
(1)



(2)



(3)



問3 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問3 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問3 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問3 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



問3 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ○
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ○
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ○
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ○
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ○
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ×
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問4 対称性を持つものは？

Def 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

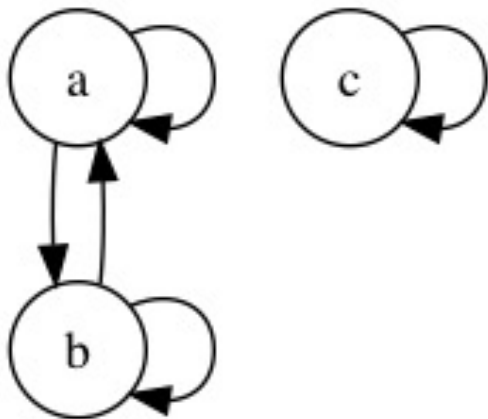
自分の関係者にとって自分は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ○
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ○
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ×
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$  ○

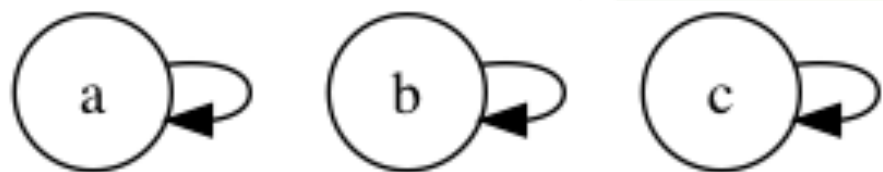


# 問5 対称性を持つものは？

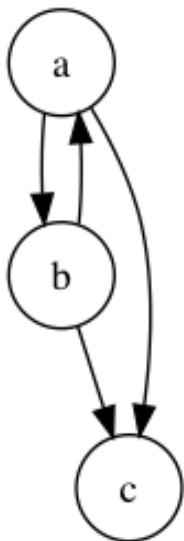
(1)



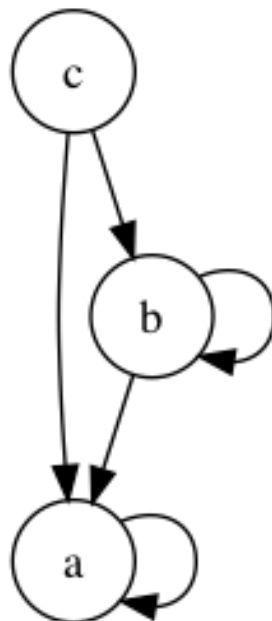
(2)



(3)

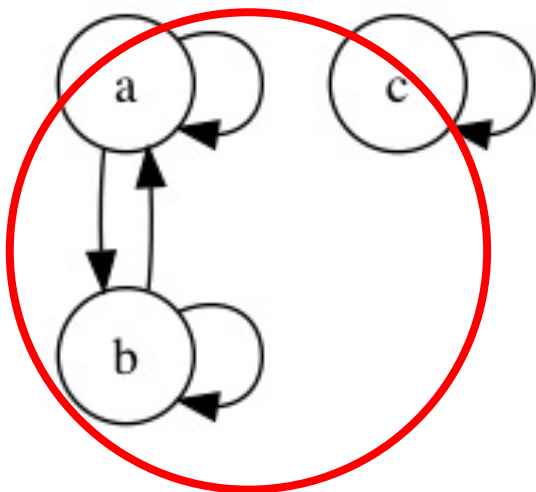


(4)

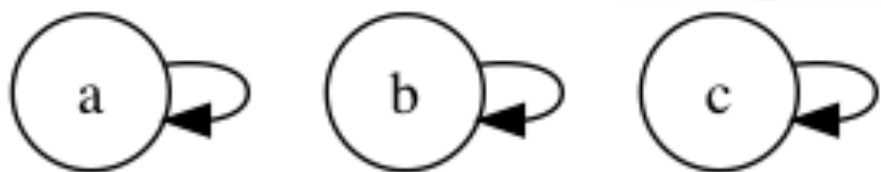


# 問5 対称性を持つものは？

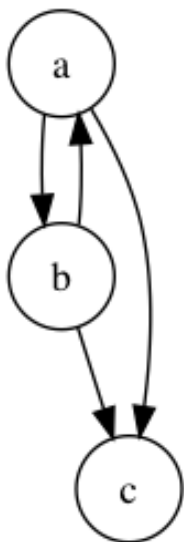
(1)



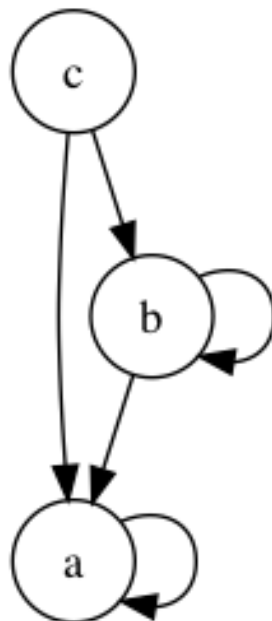
(2)



(3)

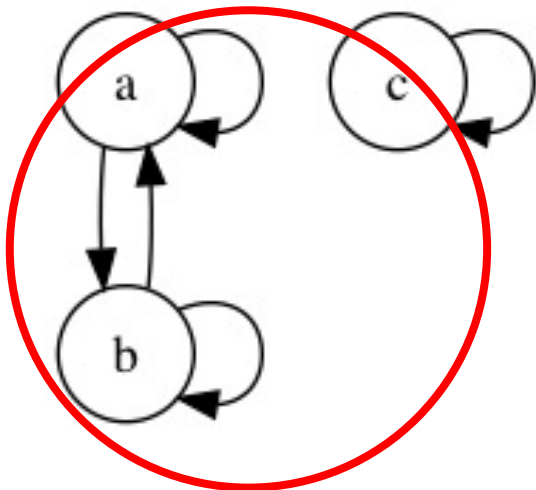


(4)

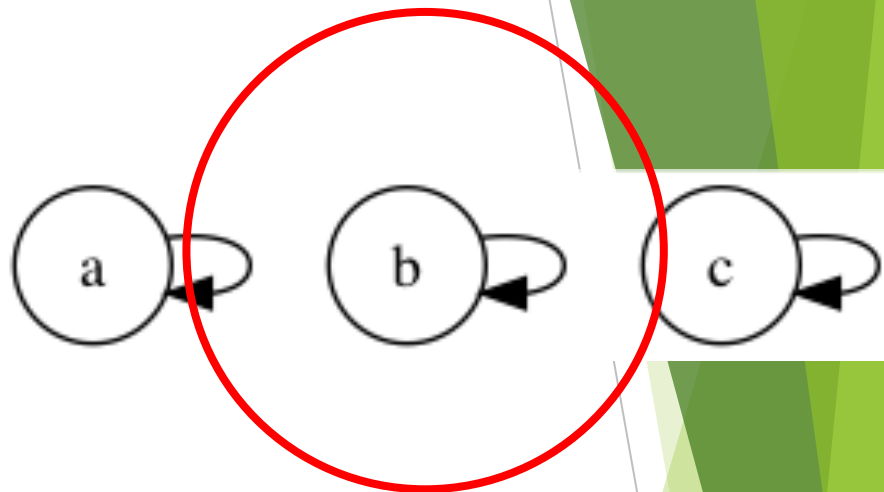


# 問5 対称性を持つものは？

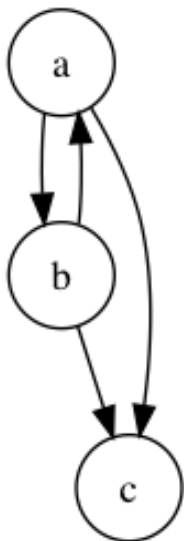
(1)



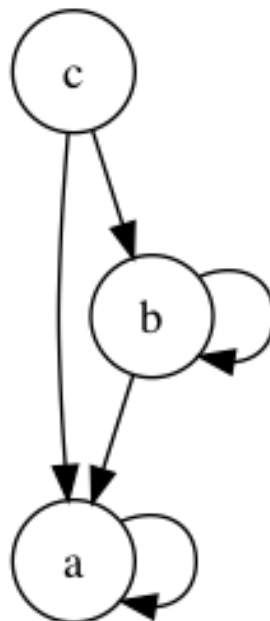
(2)



(3)

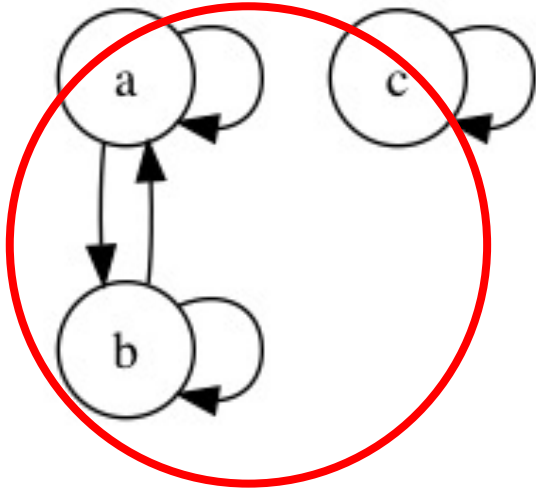


(4)

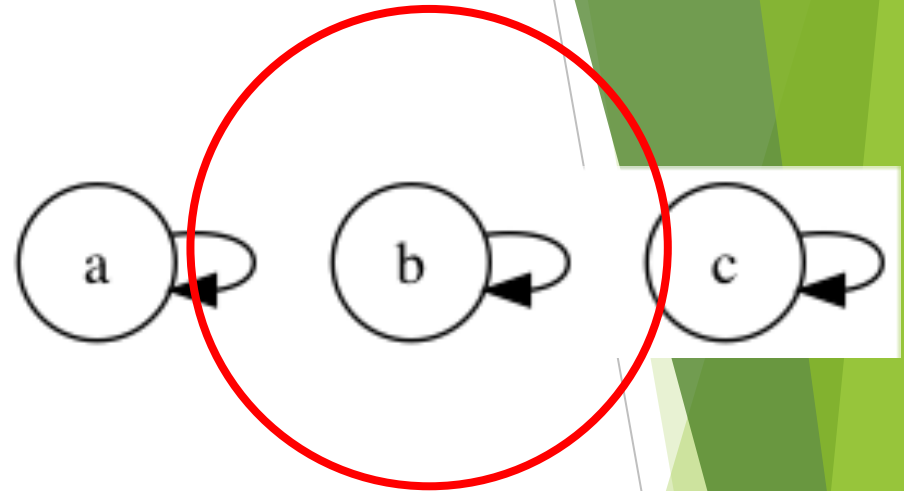


# 問5 対称性を持つものは？

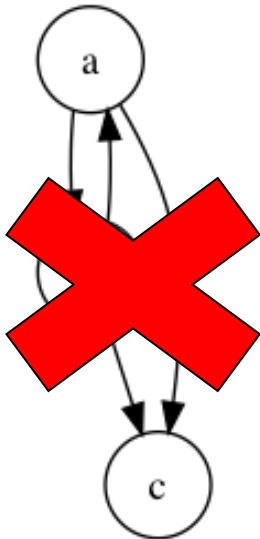
(1)



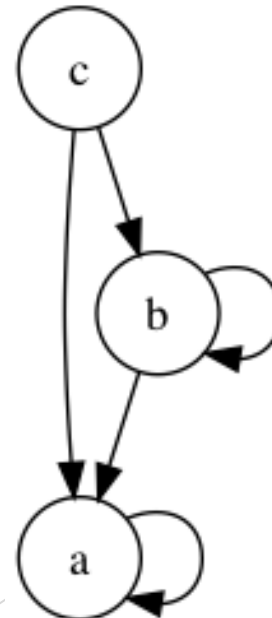
(2)



(3)

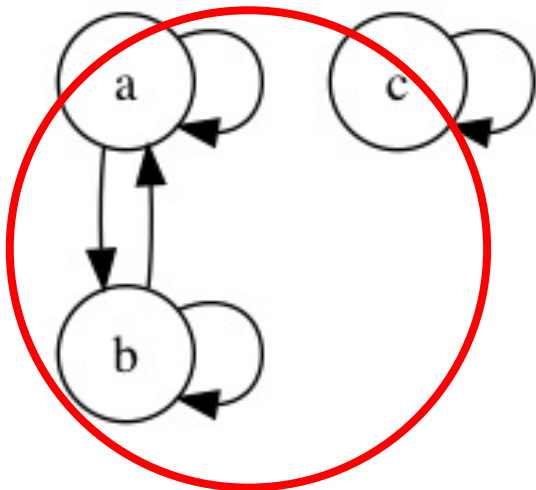


(4)

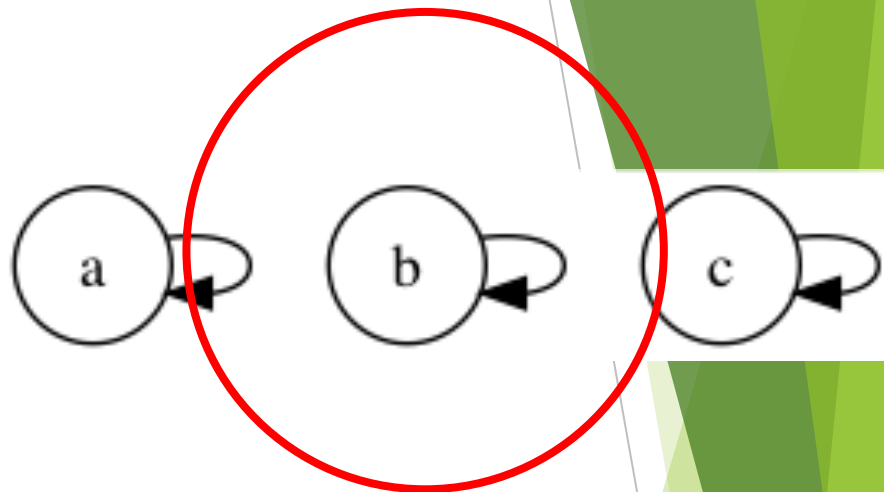


# 問5 対称性を持つものは？

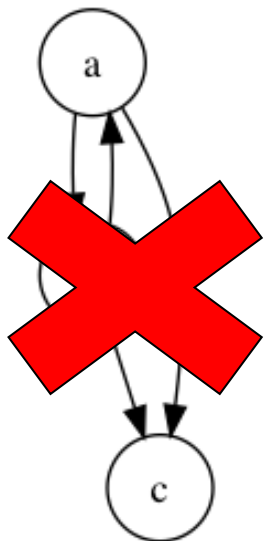
(1)



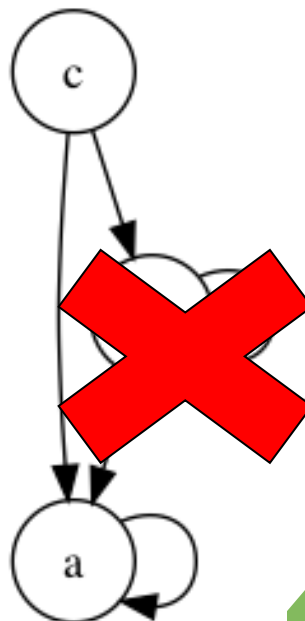
(2)



(3)



(4)



## 問6 対称性を持つ関係行列は どれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 問6 対称性を持つ関係行列は どれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 問6 対称性を持つ関係行列は どれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# 問6 対称性を持つ関係行列は どれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \times & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \times & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# 問6 対称性を持つ関係行列は どれか？

$$(1) R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \times & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \times & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 問7 推移性を満たすものは?

Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問7 推移性を満たすものは?

Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問7 推移性を満たすものは?

Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問7 推移性を満たすものは?

Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ○
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問7 推移性を満たすものは?

Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ○
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問7 推移性を満たすものは?

Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1.  $R$  : 同じ学年である ○
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる ×
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ○
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ○
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$  ○



## 問7 推移性を満たすものは?

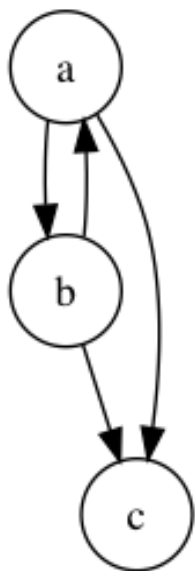
Def 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

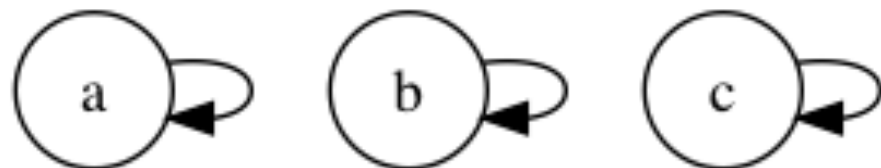
1.  $R$  : 同じ学年である
2.  $R$  : 違う住所に住んでいる
3.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R$  :  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

# 問8 推移性を満たすものは

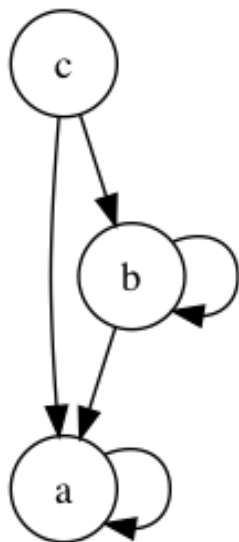
(1)



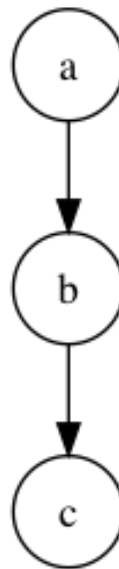
(2)



(3)

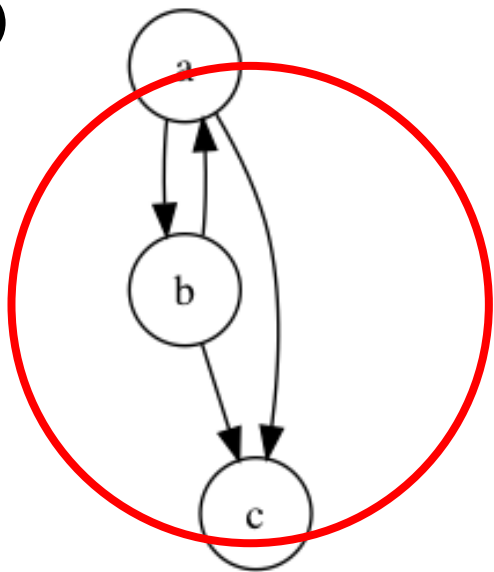


(4)

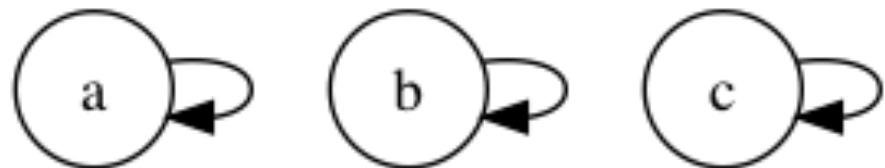


# 問8 推移性を満たすものは

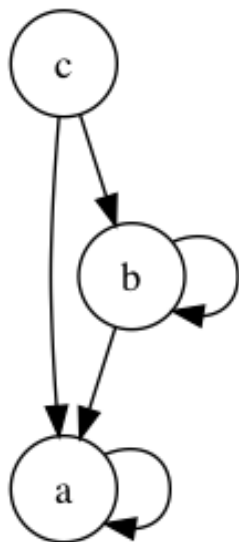
(1)



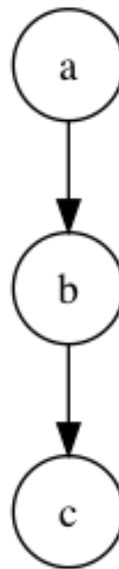
(2)



(3)

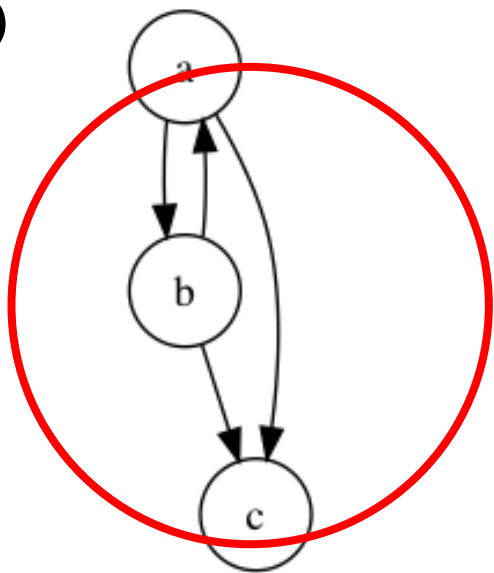


(4)

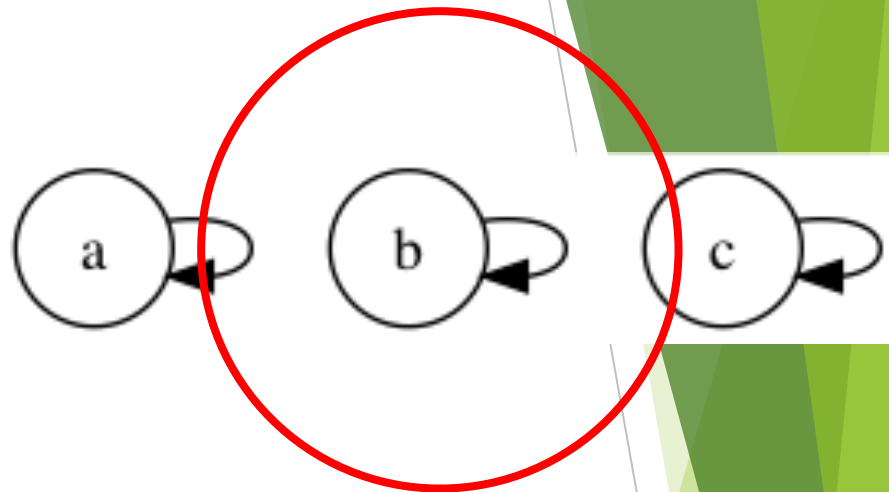


# 問8 推移性を満たすものは

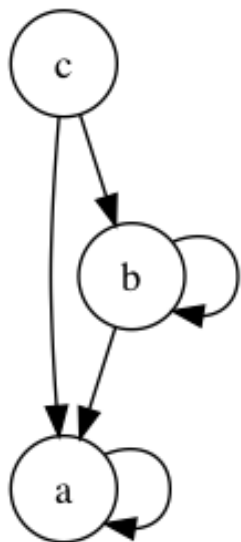
(1)



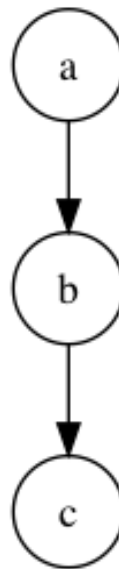
(2)



(3)

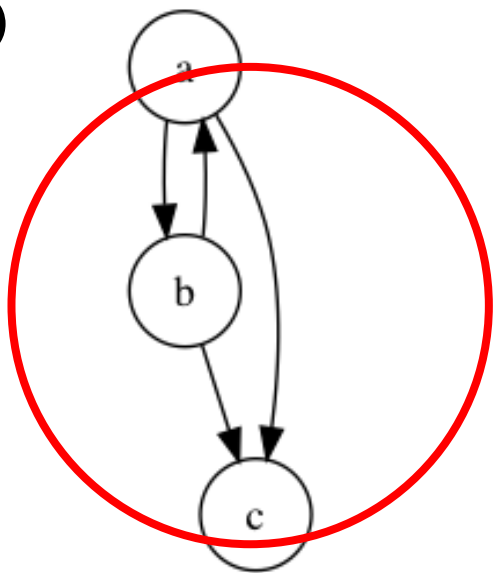


(4)

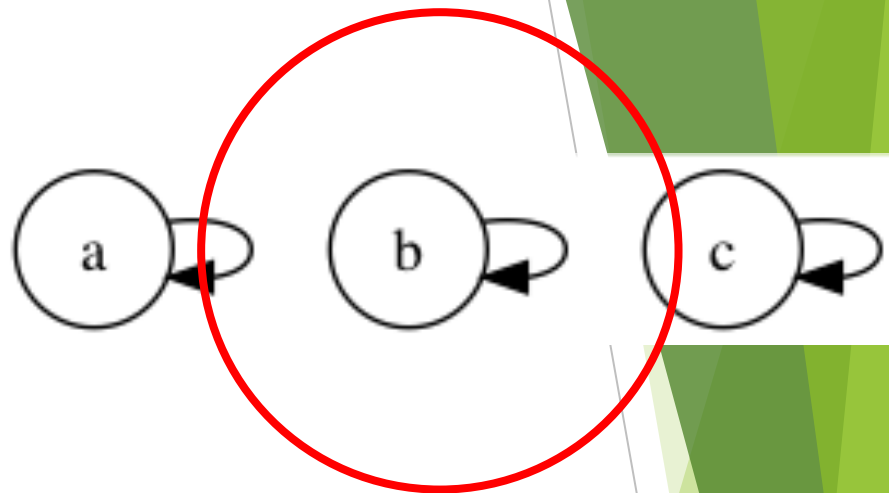


# 問8 推移性を満たすものは

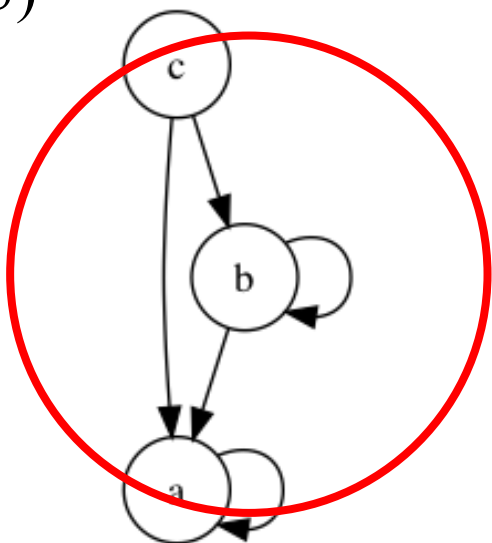
(1)



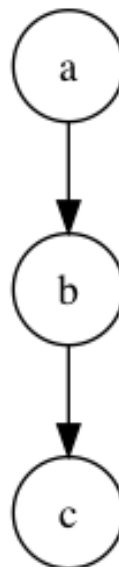
(2)



(3)

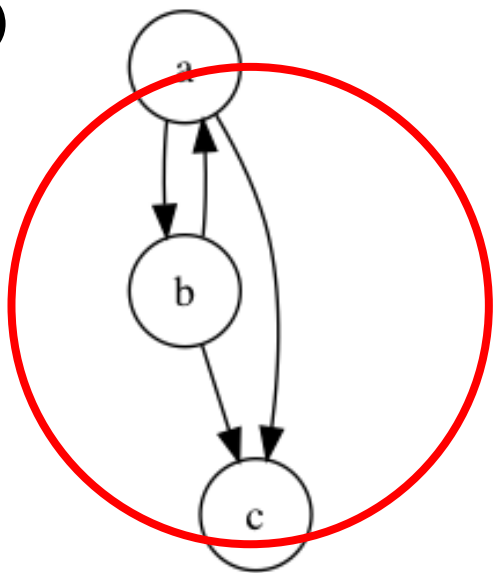


(4)

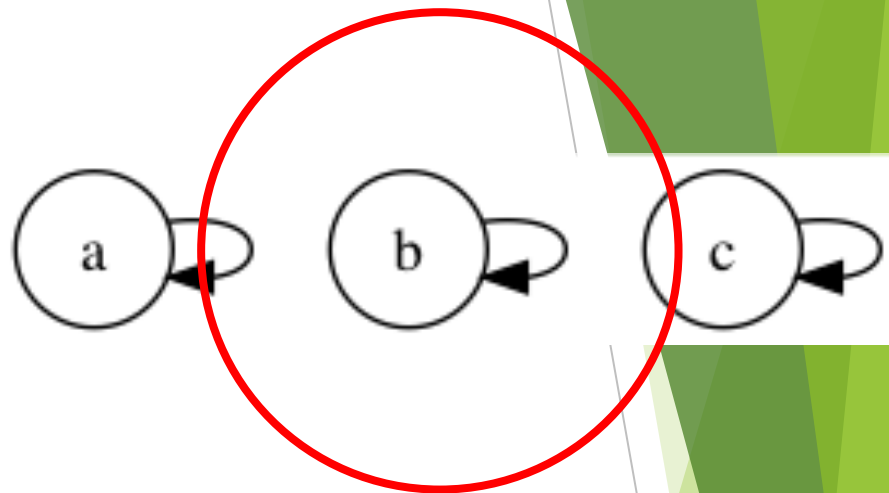


# 問8 推移性を満たすものは

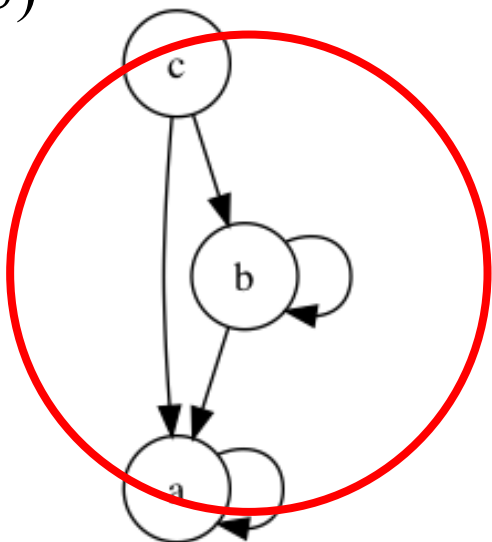
(1)



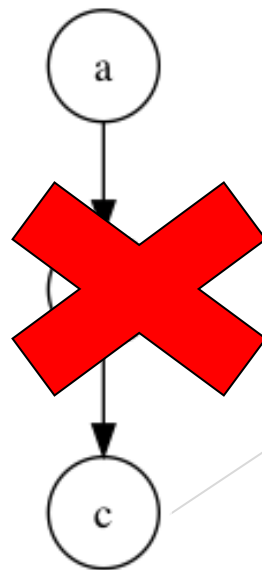
(2)



(3)



(4)



## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である
2.  $R$ :違う住所に住んでいる
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○
2.  $R$ :違う住所に住んでいる
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$



## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ×
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ×
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$  ○

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

1.  $R$ :同じ学年である ○ 同級生という共通グループ
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$  ×
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$  ×
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$  ○ 同一符号という共通グループ

## 問9 同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律 を満たす

同値関係とは共通の性質を持つ関係

1.  $R$ :同じ学年である      ○ 同級生という共通グループ
2.  $R$ :違う住所に住んでいる ×
3.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a > b\}$       ×
4.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b < 0\}$  ×
5.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$       ×
6.  $R:\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \times b \geq 0\}$  ○ 同一符号という共通グループ

## Def 4 分割

集合 $U$ の分割とは,

1.  $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2.  $\forall X, Y \in C, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$
3.  $\forall x \in U, \exists X \in C, s.t., x \in X$

を満たす $C$ をいう。

例.  $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ のとき,

$C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$ は集合 $U$ の分割。



# 例題 1

$U$ 上の関係 $R$ を,  $\forall x, y \in U$ とその分割 $C$ に対して,  
 $xRy: \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X$ と定義する.

このとき,  $R$ は $U$ 上の同値関係であることを  
証明せよ.

# 例題 1

$U$ 上の関係 $R$ を,  $\forall x, y \in U$ とその分割 $C$ に対して,  
 $xRy: \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X$ と定義する.

このとき,  $R$ は $U$ 上の同値関係であることを  
証明せよ.

[証明] (1) 反射律  $\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X$ より,  $\forall x \in U, xRx$ .

# 例題 1

$U$ 上の関係 $R$ を,  $\forall x, y \in U$ とその分割 $C$ に対して,  
 $xRy: \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X$ と定義する.

このとき,  $R$ は $U$ 上の同値関係であることを  
証明せよ.

[証明] (1) 反射律  $\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X$ より,  $\forall x \in U, xRx$ .

(2) 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

$xRy$ より,  $\exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X$ .従って,  $yRx$ .

# 例題 1

$U$ 上の関係 $R$ を,  $\forall x, y \in U$ とその分割 $C$ に対して,  
 $xRy: \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X$ と定義する.

このとき,  $R$ は $U$ 上の同値関係であることを  
証明せよ.

[証明] (1) 反射律  $\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X$ より,  $\forall x \in U, xRx$ .

(2) 対称律  $xRy \rightarrow yRx$

$xRy$ より,  $\exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X$ .従って,  $yRx$ .

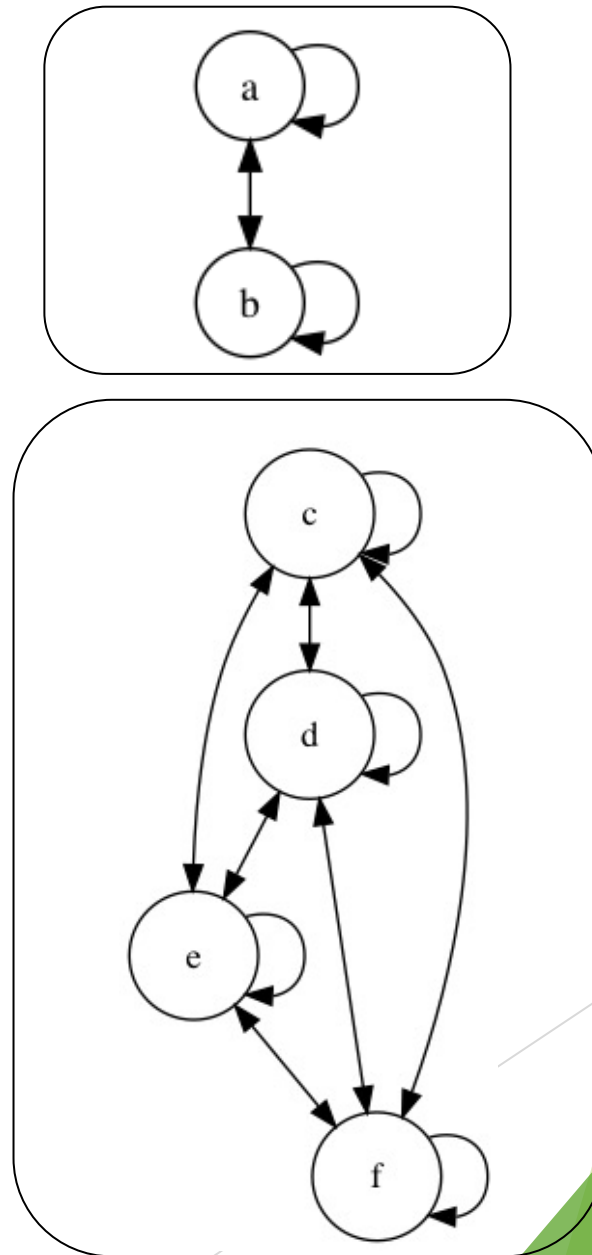
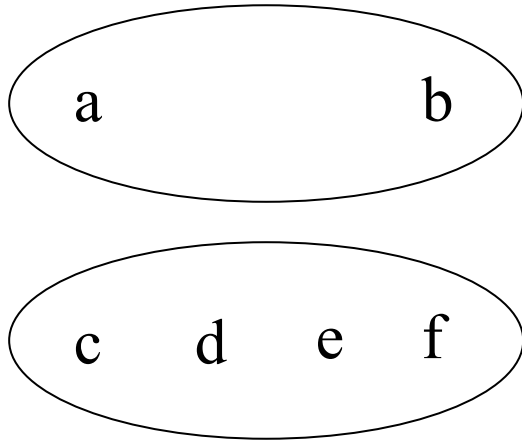
(3) 推移律  $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

$xRy \wedge yRz$ より,  $\exists X \in C, \text{ s.t.}, x \in X, y \in X, z \in X$ .

従って, (1)-(3)より,  $xRz$ は同値関係



# 分割された同グループ要素⇒ 同値関係



## 例題2

$a, b, n \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} [(a - b) = nm]$$

のとき,  $\sim$  は同値関係であることを証明せよ。

## 例題2

$a, b, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}[(a - b) = nm]$$

のとき,  $\sim$ は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律:  $a - a = 0$ (は $0 = nm$ より),  $a \sim a$

対称律:  $a - b = nm$ より,  $b - a = (-1)nm$

従って、 $a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律:  $a - b = nm, b - c = nm', m' \in \mathbb{Z}$ のとき,  $a - c = nm + nm' = n(m + m'), m + m' \in \mathbb{Z}$

これらより,  $\sim$ は同値関係 ■

## 例題3

$A$  を三角形全体の集合とする。 $a, b \in A$  に対して、 $a \sim b \Leftrightarrow a, b$  は合同とするとき、 $\sim$  は同値関係であることを証明せよ。



## 例題3

$A$  を三角形全体の集合とする。 $a, b \in A$  に対して、 $a \sim b \Leftrightarrow a, b$  は合同とするとき、 $\sim$  は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律： $a$  と  $a$  は合同なので、 $a \sim a$

対称律： $a$  と  $b$  が合同のとき、 $b$  と  $a$  も合同。

従って、 $a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： $a$  と  $b$ 、 $b$  と  $c$  がそれぞれ合同のとき、 $a$  と  $c$  も合同。これらより、 $\sim$  は同値関係 ■

## 例題4

$V$ を有向グラフ $G$ の頂点集合とする。 $a, b \in G$ に対して、 $a \sim b \Leftrightarrow a$ から $b$ に経路があり、 $b$ から $a$ にも経路があるとき、 $\sim$ は同値関係であることを証明せよ。ただし、すべての頂点は自分に有向辺を持っている。

## 例題4

$V$ を有向グラフ $G$ の頂点集合とする。 $a, b \in G$ に対して、 $a \sim b \Leftrightarrow a$ から $b$ に経路があり、 $b$ から $a$ にも経路があるとき、 $\sim$ は同値関係であることを証明せよ。ただし、すべての頂点は自分に有向辺を持っている。

[証明]

反射律：すべての頂点は自分に有向辺を持っているので  $a \sim a$

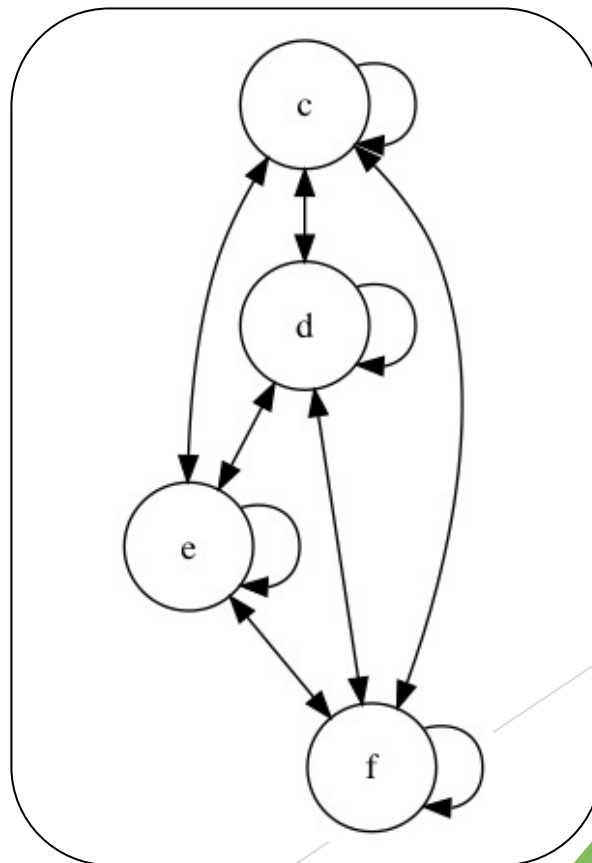
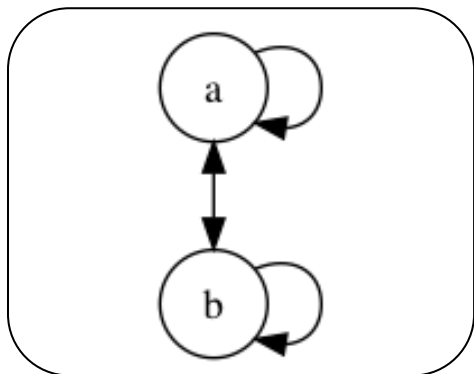
対称律： $a$ から $b$ に経路があり、 $b$ から $a$ にも経路があるので  $a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： $a \sim b$ かつ $b \sim c$ のとき、 $a$ から $c$ にも経路があるので  $a \sim c$

これらより、 $\sim$ は同値関係

# 補足

この同値関係による頂点のグループ分け（お互いに行き来可能な頂点集合）をグラフの強連結成分分解という。



## 例題5

写像  $f: U \mapsto U; f(x)$ ,  $x_1, x_2 \in U$  について

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

は  $U$  上の同値関係になることを証明せよ。

## 例題5

写像  $f: U \mapsto U; f(x)$ ,  $x_1, x_2 \in U$  について

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

は  $U$  上の同値関係になることを証明せよ。

[証明]

反射律 :  $f(x) = f(x)$  なので  $x \sim x$

対称律 :  $f(x_1) = f(x_2)$  ならば  $f(x_2) = f(x_1)$

$$x_1 \sim x_2 \rightarrow x_2 \sim x_1$$

推移律 :  $x_1 \sim x_2$  かつ  $x_2 \sim x_3$  のとき,  $f(x_1) = f(x_2)$  かつ  $f(x_2) = f(x_3)$ 。このとき,  $f(x_1) = f(x_3)$  より  $x_1 \sim x_3$

これらより,  $\sim$  は同値関係 ■

## 6. 同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$ が

(1)  $x, y \in P \rightarrow xRy,$

(2)  $\lceil x \in P \wedge xRz \rceil \rightarrow z \in P$

を満たすとき,  $P$ を $\sim$ に関する同値類という。

## 6. 同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$ が

(1)  $x, y \in P \rightarrow xRy,$

(2) 「 $x \in P \wedge xRz$ 」  $\rightarrow z \in P$

を満たすとき、 $P$ を $\sim$ に関する同値類という。

各同値類に属する各要素をその同値類の代表元と呼ぶ。 $\sim$ で関係づけられた代表元 $a$ の同値関係の要素をすべて集めた集合を $a$ の同値類と呼び、 $[a]_R$ と書く。同値類の集合は $\{[a]_R \mid a \in U\}$ であり、商集合と呼ばれ、

$U / R$ と書く。

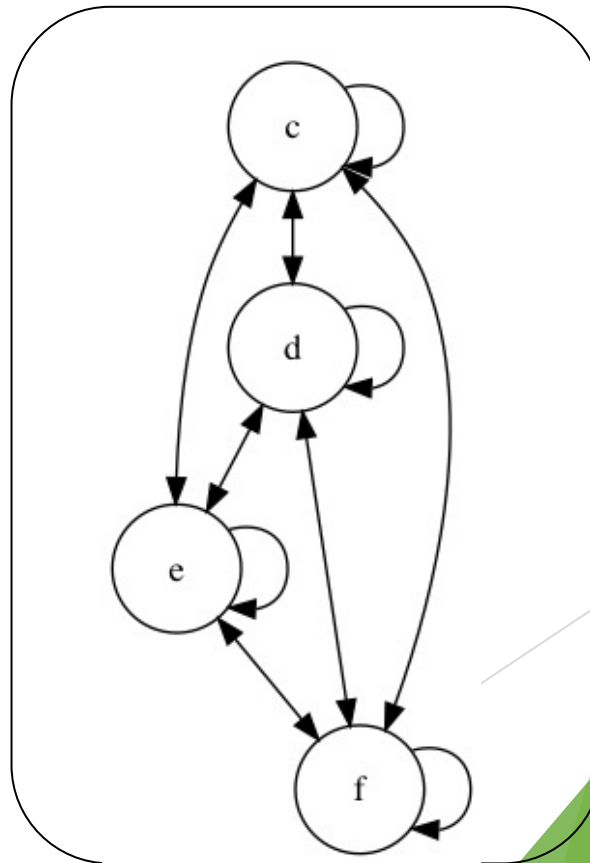
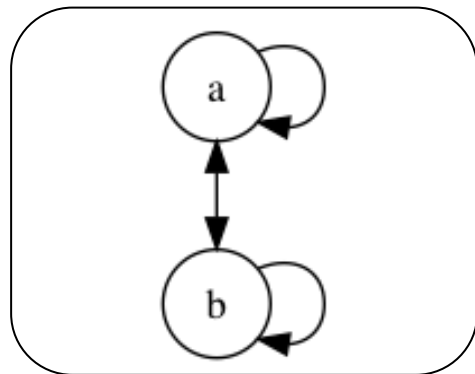


# 例 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ の同値類 と商集合

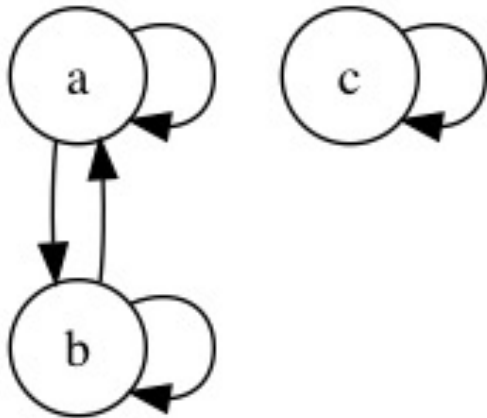
同値類  $[a]_R = \{a, b\}$ ,  $[b]_R = \{a, b\}$ ,  $[c]_R = \{c, d, e, f\}$ ,

$[d]_R = \{c, d, e, f\}$ ,  $[e]_R = \{c, d, e, f\}$ ,  $[f]_R = \{c, d, e, f\}$

商集合  $U / R = \{[a]_R \mid a \in U\} = \{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}\}$

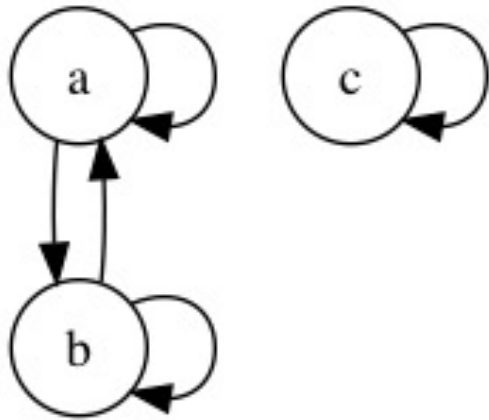


# 例題1



$V$ を有向グラフ $G$ の頂点集合とする。 $a, b \in G$ に対して、同値関係 $a \sim b \Leftrightarrow a$ から $b$ に経路があり、 $b$ から $a$ にも経路があるとき、と定義する。  
左のグラフの頂点集合の商集合 $V / \sim$ を求めよ。

# 例題1



$V$ を有向グラフ $G$ の頂点集合とする。 $a, b \in G$ に対して,同値関係 $a \sim b \Leftrightarrow a$ から $b$ に経路があり, $b$ から $a$ にも経路があるとき、と定義する。

左のグラフの頂点集合の商集合 $V / \sim$ を求めよ。

[解答]

商集合 $V / \sim = \{\{a, b\}, \{c\}\}$

注意 要素が一つでも同値類になる

## 例題2

写像  $f: U \mapsto U; f(x), x_1, x_2 \in U$  について

$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$$

とする。  $U = \{a, b, c, d\}$  の  $U$  上の同値関係

$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$  のとき,  $\sim$  の商集合  $U / \sim$  を求めよ。

## 例題2

写像  $f: U \mapsto U; f(x), x_1, x_2 \in U$  について

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

とする。  $U = \{a, b, c, d\}$  の  $U$  上の同値関係

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$$

のとき,  $\sim$  の商集合  $U / \sim$  を求めよ。

[解答]

$$U / \sim = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$$

## 例題3

商集合  $U / R$  は  $U$  の分割であることを証明せよ.

## 例題3

商集合  $U / R$  は  $U$  の分割であることを証明せよ.

[証明]

定義に帰れ！！

商集合  $U / R$  が分割の定義

「集合  $U$  の分割とは,

1.  $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2.  $\forall X, Y \in C, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$
3.  $\forall x \in U, \exists X \in C, s.t., x \in X$

を満たす  $C$  をいう。」

を満たしていることを順に証明していく

## 例題3

商集合  $U / R$  は  $U$  の分割であることを証明せよ.

[証明]

(1)  $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$  を証明する.

商集合の定義より,  $X \in U/R, s.t., \exists a \in U,$

$X = [a]_R$ . 同値類の定義より,  $[a]_R \subseteq U$ .

よって  $X \subseteq U$ .

同値関係の反射性より,  $aRa$ . 従って  $[a]_R \neq \emptyset$ .

したがって,  $X \neq \emptyset$ .

よって  $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$



## 例題3

商集合  $U / R$  は  $U$  の分割であることを証明せよ.

[証明]

(2)  $\forall X, Y \in U / R, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$  を証明する.

$X, Y \in U / R$  と仮定する.

$X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$  の対偶  $X \cap Y \neq \emptyset \rightarrow X = Y$  を証明する.

$X \cap Y \neq \emptyset$  を仮定する. 商集合の定義より,  $X \in U / R, s. t,$

$\exists a \in U, X = [a]_R, Y \in U / R, s. t, \exists a' \in U, Y = [a']_R.$

$X \cap Y \neq \emptyset$  より,  $\exists a'' \in U, s. t. a'' \in X \wedge a'' \in Y.$

すなわち,  $a'' \in [a]_R$  かつ  $a'' \in [a']_R$ . 同値類の定義より,

$a'' R a$  かつ  $a'' R a'$ . 同値関係の対称性より,  $a R a''.$

$a R a''$  と  $a'' R a'$  と同値関係の推移性から  $a R a'$ . これより

$[a]_R = [a']_R.$

従って,  $X = Y$ . 以上より  $X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$

## 例題3

商集合  $U / R$  は  $U$  の分割であることを証明せよ.

[証明]

(3)  $\forall x \in U, \exists X \in U / R, s.t., x \in X$  を証明する.

$x \in U$  を仮定する.

反射性から,  $xRx$ .

同値類の定義より,  $x \in [x]_R$ .

従って,  $\exists X \in U / R, s.t., x \in X$ .

## 例題3

商集合  $U / R$  は  $U$  の分割であることを証明せよ.

[証明]

$$(1) \forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$$

$$(2) \forall X, Y \in U / R, X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$$

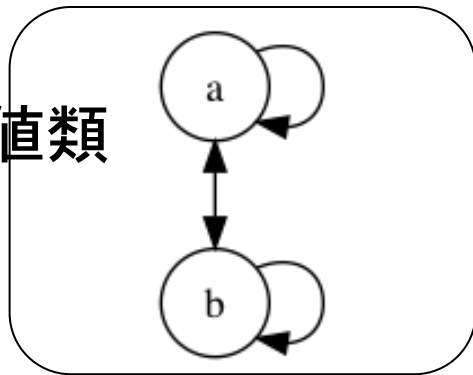
$$(3) \forall x \in U, \exists X \in U / R, \text{ s.t. }, x \in X$$

より,

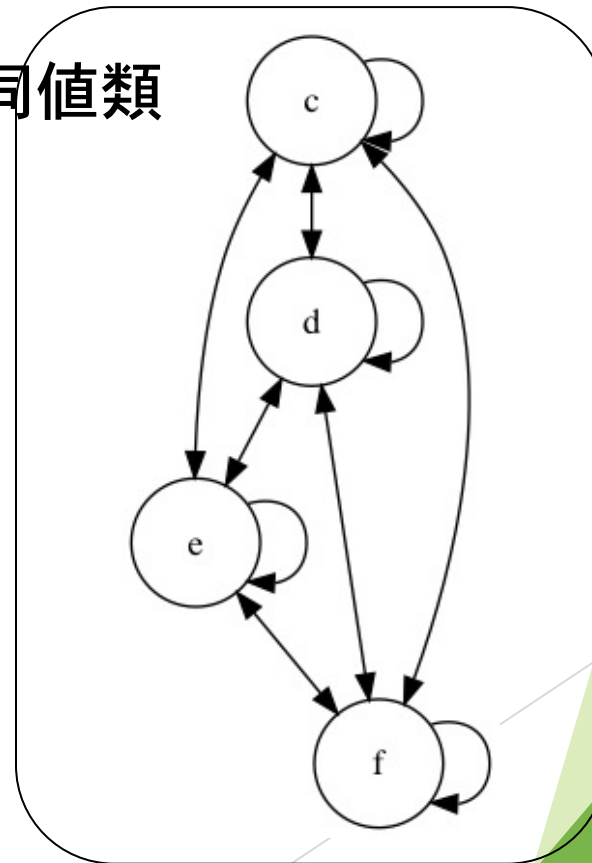
商集合  $U / R$  は  $U$  の分割である. ■

# 商集合のことを同値分割ともいう

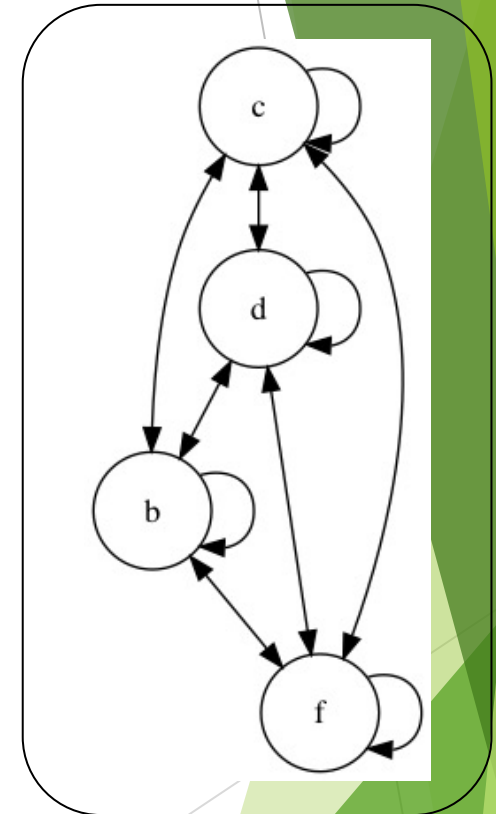
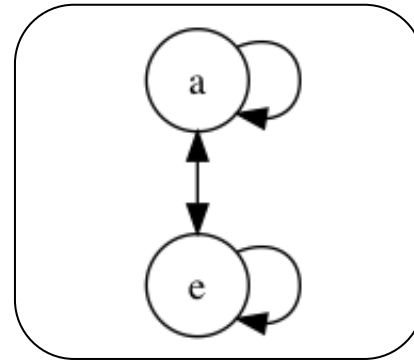
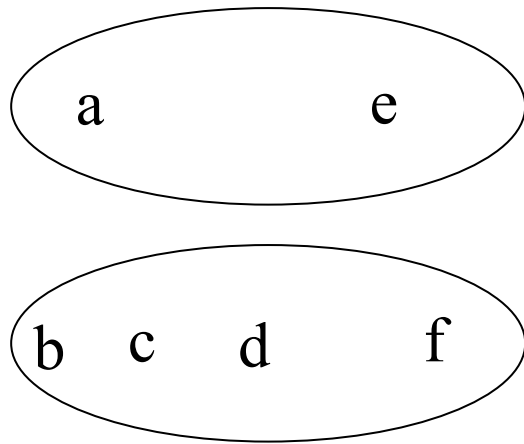
同値類



同値類



つまり同値関係 $\Leftrightarrow$ あるルール（関係、  
もしくは2変数述語 = 2変数条件）に  
よって分割された同グループ要素



$xRy$ :  $x$ が母音のとき  
 $y$ も母音 または  $x$ が  
子音のとき $y$ も子音.

# 同値類

- ▶ 同値類 $\Leftrightarrow$ あるルール（関係、もしくは2変数述語 = 2変数条件）によって余すところなく、背反に分割されたグループ
- ▶ 同値関係とは、すべての要素を背反にグループ化するための2変数述語（= 2変数条件）。

# 再掲：カレンダーとは7を法とした同値類（同値分割）

January 1 令和XX年 20XX

日	月	火	水	木	金	土
29	30	31	<b>1</b> 赤口 元日	<b>2</b> 元勝	<b>3</b> 元盛	<b>4</b> 元隆
<b>5</b> 元成	<b>6</b> 元富	<b>7</b> 元吉	<b>8</b> 元孫	<b>9</b> 元正	<b>10</b> 元祖	<b>11</b> 元朝
<b>12</b> 大成	<b>13</b> 赤口 成人の日	<b>14</b> 元勝	<b>15</b> 元盛	<b>16</b> 元隆	<b>17</b> 元成	<b>18</b> 大富
<b>19</b> 赤口	<b>20</b> 元勝	<b>21</b> 元盛	<b>22</b> 元隆	<b>23</b> 元成	<b>24</b> 大富	<b>25</b> 元勝
<b>26</b> 元成	<b>27</b> 元富	<b>28</b> 元吉	<b>29</b> 元孫	<b>30</b> 元正	<b>31</b> 元祖	1
2	3	4	5	6	7	8

## 6. まとめ

- ① 整数の合同
- ② 剰余類
- ③ 同値関係
- ④ 反射律
- ⑤ 対称律
- ⑥ 推移律
- ⑦ 同値類



# 演習問題

# 問題1

$n \in \mathbb{N}^+$  とする.  $\mathbb{Z}$  上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (a + b) = nk$$

は同値関係であることを証明せよ。

## 問題2

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^2,$$

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = y_1 - y_2)$$

のとき,

$\sim$  が同値関係となることを証明せよ.

## 問題3

$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ とする.

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ ,

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$$

のとき,

$\sim$  が同値関係となることを証明せよ.