12.　関係と写像

植野真臣

電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

第１回　10月 3日：第1回 命題と証明
第２回　10月10日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月17日：第3回 命題論理
第４回　10月24日：第4回 述語論理
第５回　10月 31日：第5回 述語と集合
第６回　11月 7日：第6回 直積と冪集合
第７回　11月14日：第7回 様々な証明法 (1)
第８回　11月28日：第8回 様々な証明法 (2)
第９回　12月 5日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月12日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月19日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　12月26日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、
グラフによる表現
第１３回　1月16日：第13回 同値関係
第１４回　1月23日：第14回 順序関係：半順序集合、
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　1月30日：第15回 期末試験

1．本日の目標

①　関係（二項関係）
②　関係と写像
③　グラフによる表現
④　関係行列
⑤　有向グラフと無向グラフ
⑥　隣接集合と隣接行列
⑦　木、完全グラフ、クリーク
⑧　2部グラフ

1．関係（二項関係）

再掲５章：

Def 1.

二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合Rを

UからVへの「（二項）関係」という.

また，　$R \ni (a, b)$のとき　　aRb　：aとbは関係ある

　　　　$R \not\ni (a, b)$のとき　$a\not{R}b$　：aとbは関係なし

と書く.

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \qquad ◯$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$ ×

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$ ×

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$ ×

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S),$$
$$(c, T), (d, S), (d, T)\}$$ ○

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

例題

$$U=\{a,b,c,d\}, V=\{S,T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R=\{(a,S)\}$$ ○

$$R=\{(a,S),(b,S),(b,T),(S,T)\}$$ ×

$$R=\{(a,S),(b,S),(b,T),(d,S)\}$$ ○

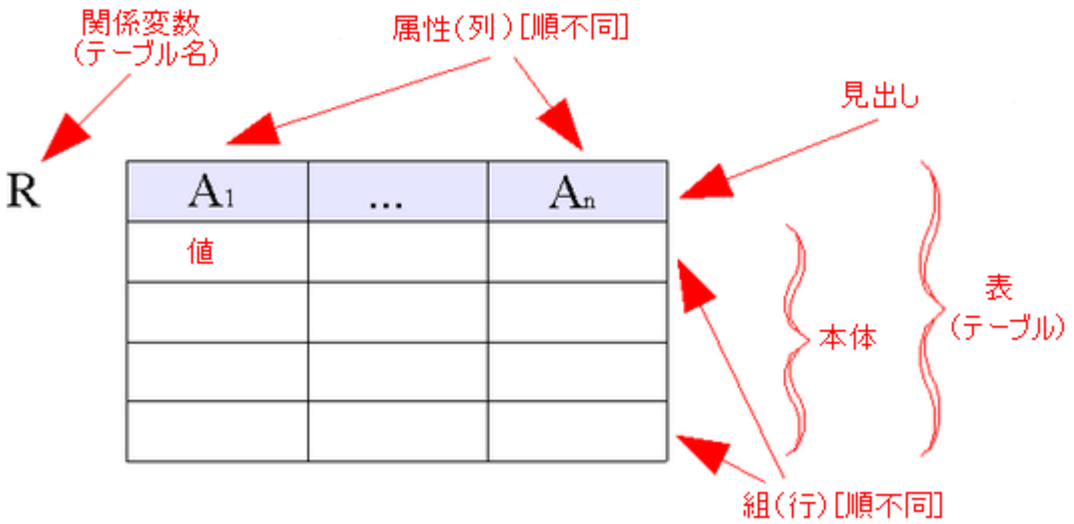
$$R=\{(a,S),(a,T),(b,S),(b,T),(c,S),(c,T),(d,S),(d,T)\}$$ ○

$$R=\{(a,S),(b,c),(b,T),(d,S)\}$$ ×

参考：データベースとn項関係

データベース理論における関係モデルでは，関係の概念を *n* 項に拡張している．

すなわち， $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$の部分集合として定義される．関係モデルの基礎的な要素は定義域、 instance　ドメインである．



2. 関係の述語による内包的記述による定義

Def2.

自由変数$(a,b) \in U\times V$についての2変数述語

$P(a,b)$: $R \ni (a,b)$ の真理集合

$$\{(a,b)|P(a,b)\}$$

または

aRbの真理集合　$\{(a,b)|aRb\}$

をUからVへの「関係」，もしくは「二項関係」という.

３. 関係による写像の定義

Def 3.

自由変数$(a, b) \in U \times V$についての述語 aRbが各aに対して一つのbが対応するとき,

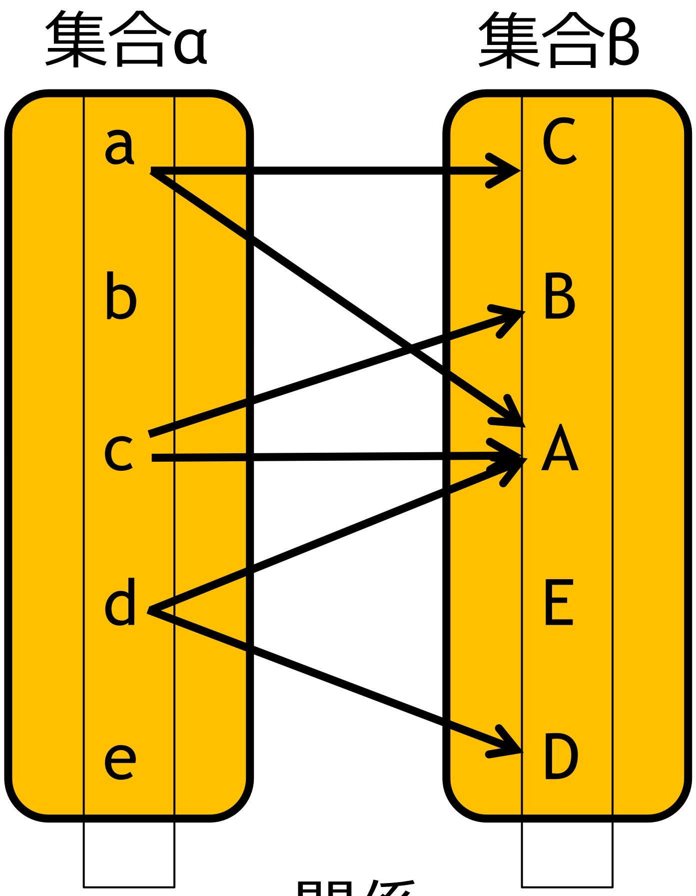
$$\{(a, b) | aRb\}$$

をUからVへの「写像」と呼ぶ.

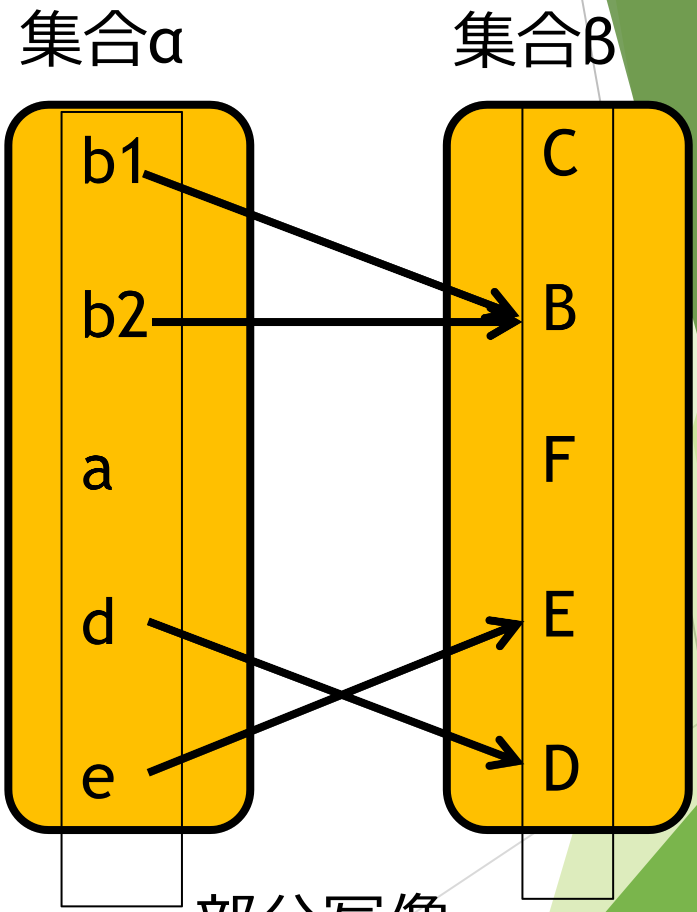
写像の中で対応するbがないaを許す場合，UからVへの「部分写像」と呼ぶ.

写像は、関係の特殊なケース.

「関係」の図示表現（関係を→で示す）



関係



部分写像

例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

関係　写像

(1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$

(2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$

(3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$

(4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$

(5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$		
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2,\ x$は$y$の約数		

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x,y)\in\mathbb{R}^2, y=x$	○	○
(2)	$(x,y)\in\mathbb{N}^2, y=\sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2=1$	○	×
(4)	$(x,y)\in\mathbb{N}^2, y>x$		
(5)	$(x,y)\in\mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

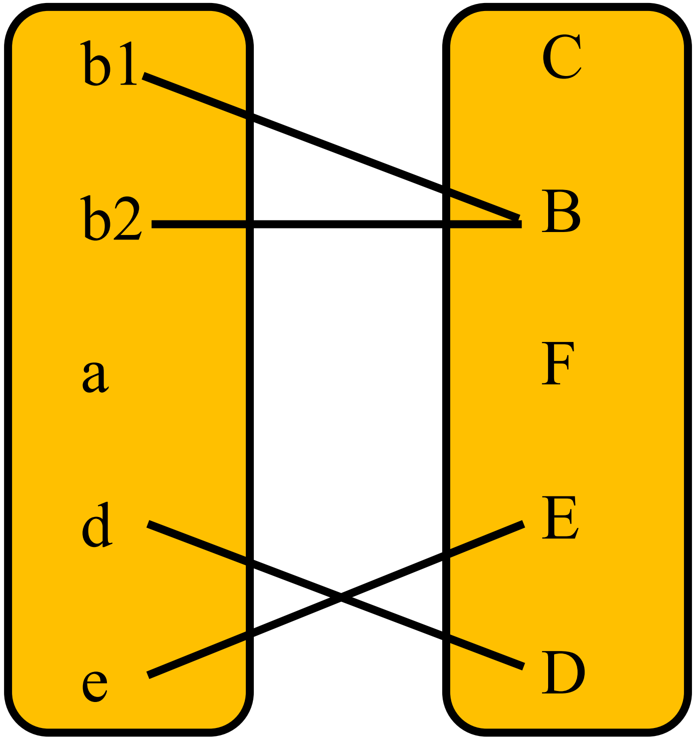
		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

例題

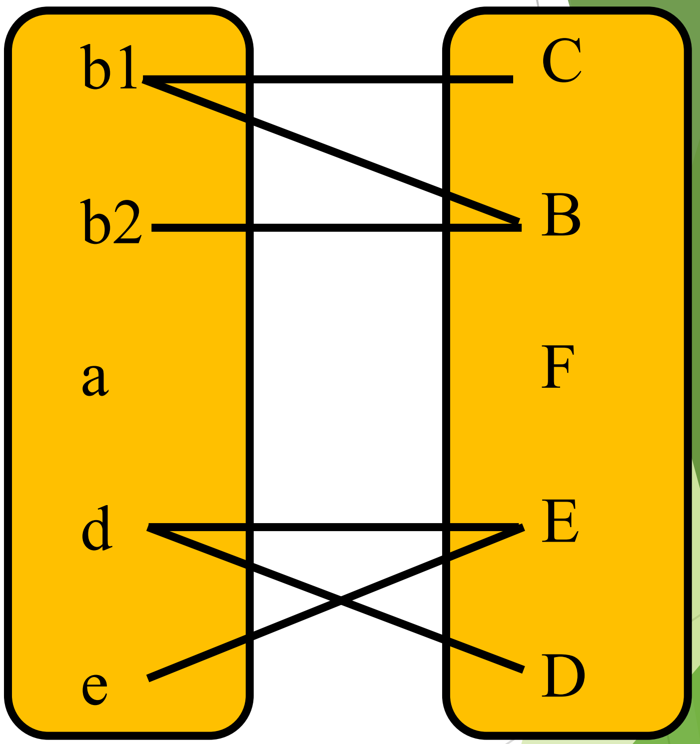
以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5)	$(x, y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数	○	×

関係は部分写像の一般化



部分写像



関係

4. 関係行列

Def 4

二つの集合を $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$として，$A$から$B$への関係行列は　$R=\{r_{ij}\},(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$

$$r_{ij}=\begin{cases}1: a_iRb_j\text{のとき}\\0: a_i\not{R}b_j\text{のとき}\end{cases}$$

として定義される.

例題 1

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

例題 1

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例題２

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

例題２

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例題３

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), \\ (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

例題３

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. 上への関係

Def 5

集合AからAの関係を，「A上の関係」（または「中の関係」）と呼ぶ.

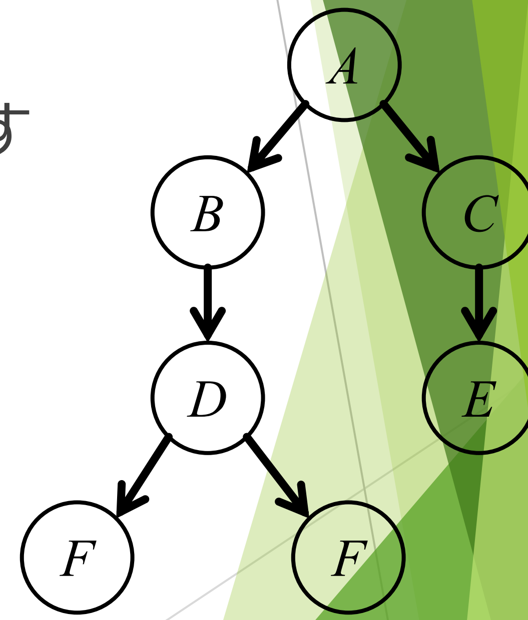
グラフによる関係の表現

Def 6

グラフ $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は二つの集合 **V** と **E** によって定義され， **V** は 頂点（Vertex）（または，節点・ノード）の有限集合 $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$で, **E** は辺(edge)（または枝、アーク）集合である．さらに，グラフは個々の頂点における二つの組をで結合したすべての可能性のある集合の部分集合である．

Def 7

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$をグラフとする．$E_{ij} \in \mathbf{E}$ かつ $E_{ji} \notin \mathbf{E}$のとき，枝E_{ij} を**有向辺**（directed edge）と呼ぶ． V_i と V_jの有向辺は$V_i \to V_j$と書く．



有向グラフと無向グラフ

Def 8

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ をグラフとする． $E_{ij} \in \mathbf{E}$ かつ$E_{ji} \in \mathbf{E}$のとき，辺 E_{ij} を**無向辺**（undirected edge）と呼ぶ．V_i と V_jの無向辺は $V_i - V_j$ または$V_j - V_i$と書く．

Def 9

すべての辺が有向辺のグラフを**有向グラフ**（directed graph）と呼び，すべての辺が無向辺のグラフを**無向グラフ**（undirected graph）と呼ぶ．

例

有向グラフと無向グラフの例を図(a), (b) にそれぞれ示している．

有向グラフ(a) では，グラフは以下で与えられ，

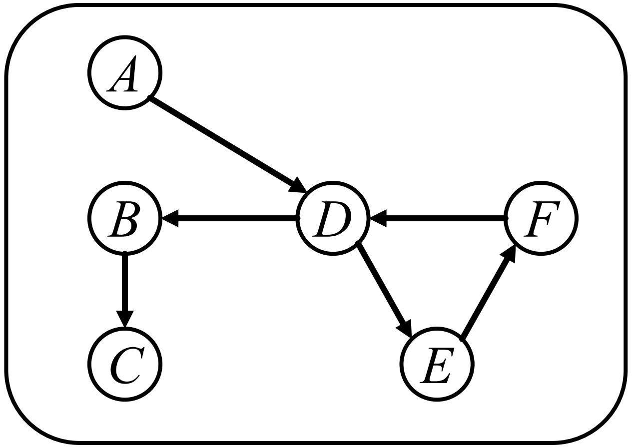
$$\mathbf{V} = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$\mathbf{E} = \{A \rightarrow D, B \rightarrow C, D \rightarrow B, F \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow F\}$$

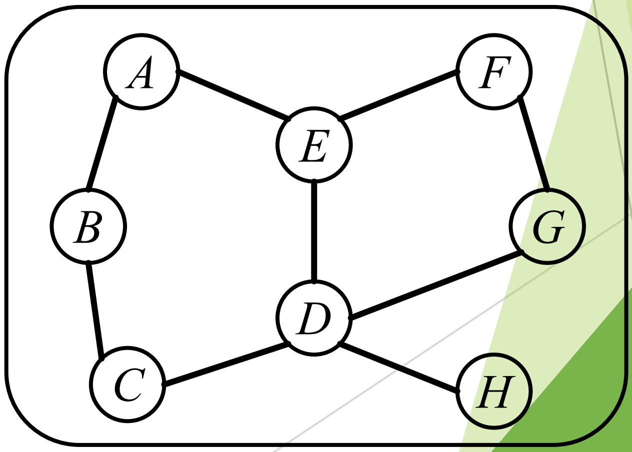
無向グラフ(b) では，グラフは以下で与えられる．

$$\mathbf{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$\mathbf{E} = \{A - B, B - C, C - D, D - E, E - A, E - F, F - G, G - D, D - H\}$$



(a)



(b)

二項関係とグラフは同値

有向グラフ　$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$において,

$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^2$であり, $\mathbf{E}$は$\mathbf{V}$上の二項関係

$\Leftrightarrow$

有限集合上の二項関係が定義されていると,二項関係を普遍集合の部分集合とみなせるので、有向グラフで表現できる

$\Leftrightarrow$「有限集合上の二項関係」

$\Leftrightarrow$「有向グラフ」

A上の関係Rのグラフ表現

A上の関係Rのグラフ表現を

頂点集合をAとして，

aRbであるときのみ，　$a \to b$という有向辺による有向グラフで表現する。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

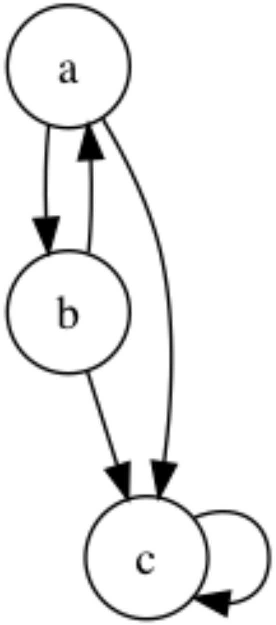
集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

[解答]



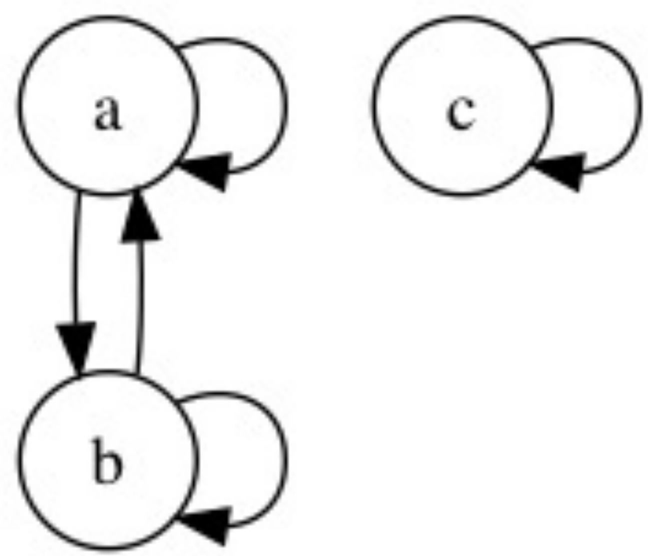
例題2

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$を有向グラフで示せ。

例題2

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

[解答]



6. A上の関係の関係行列

Def　10

集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$上の関係の関係行列は　$R=\{r_{ij}\},(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,m)$

$$r_{ij}=\begin{cases}1: a_iRa_j\text{のとき}\\0: a_i\not{R}a_j\text{のとき}\end{cases}$$

として定義される.

例題1

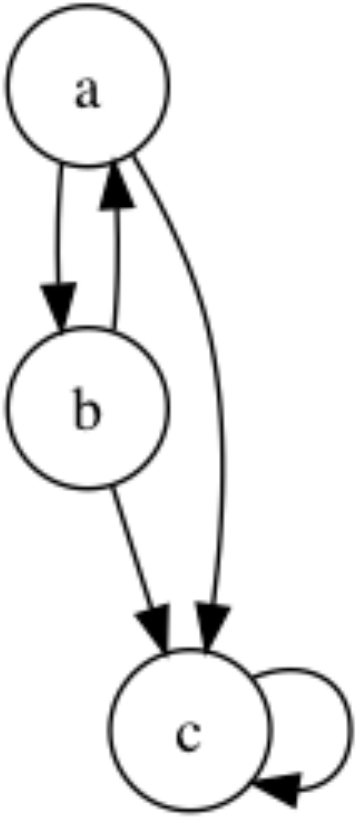
集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

例題1

集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$



例題2

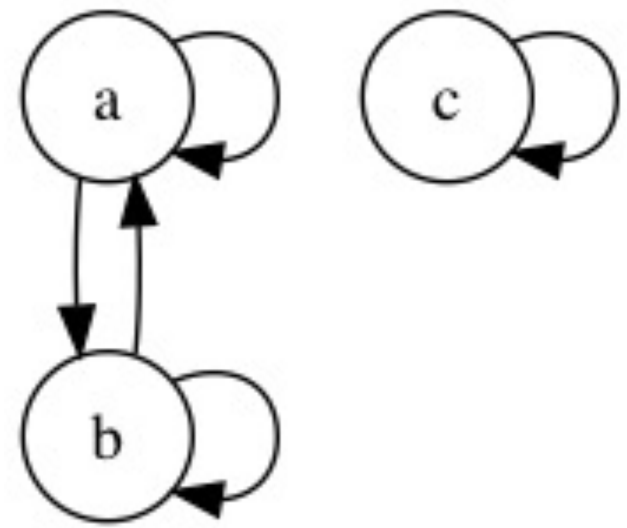
集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

例題2

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 =$
$\{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c)\}$
の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題3

$A=\{a,b,c,d\}$上の関係Rについて，次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(d,a),(d,d)\}$$

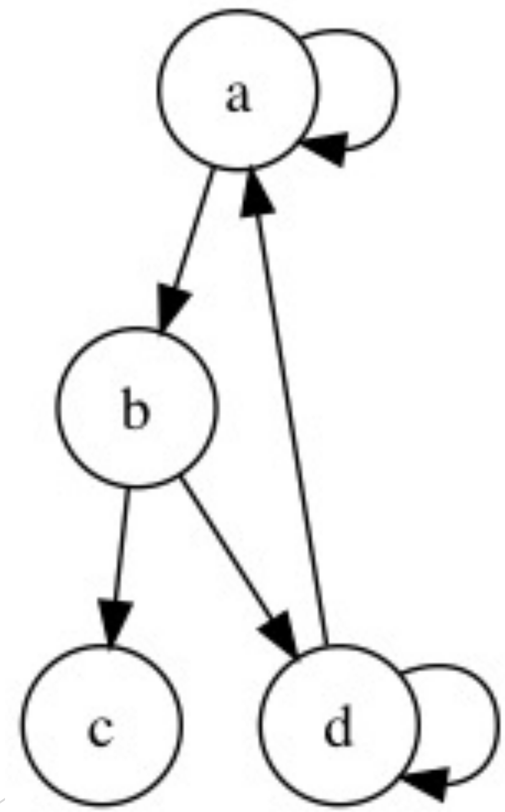
例題3

$A = \{a, b, c, d\}$上の関係Rについて，次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (d,a), (d,d)\}$$

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



7. 具体的な関係

例題 1

$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R \ni (a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

7. 具体的な関係

例題１

$A = \{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R \ni (a, b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

[ヒント]　　Def

$(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$に対して，

$$\exists m \in \mathbb{N}^+, s.t.\, a = bm$$

のとき，aはbの約数であるという。

7. 具体的な関係

例題１

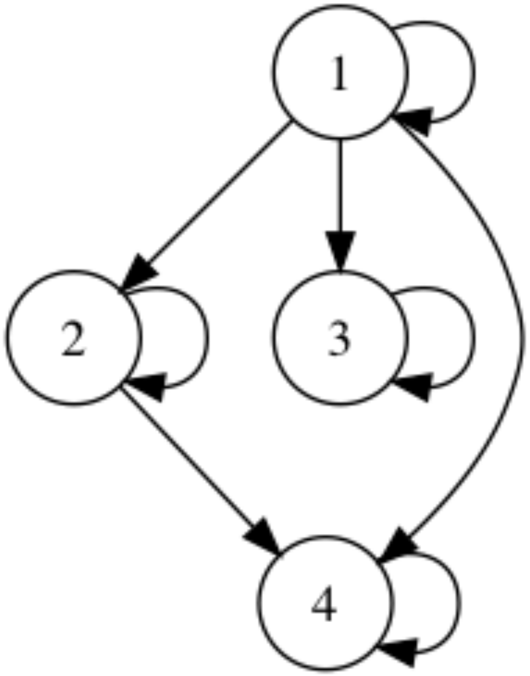
$A = \{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R \ni (a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



例題 2

$A = \{a, b\}$の冪集合2^A上の関係Rについて

$X, Y \in 2^A$のとき　$XRY\ : X \subseteq Y$ とすると,

関係行列と有向グラフを書け。

例題２

$A=\{a,b\}$の冪集合2^A上の関係Rについて

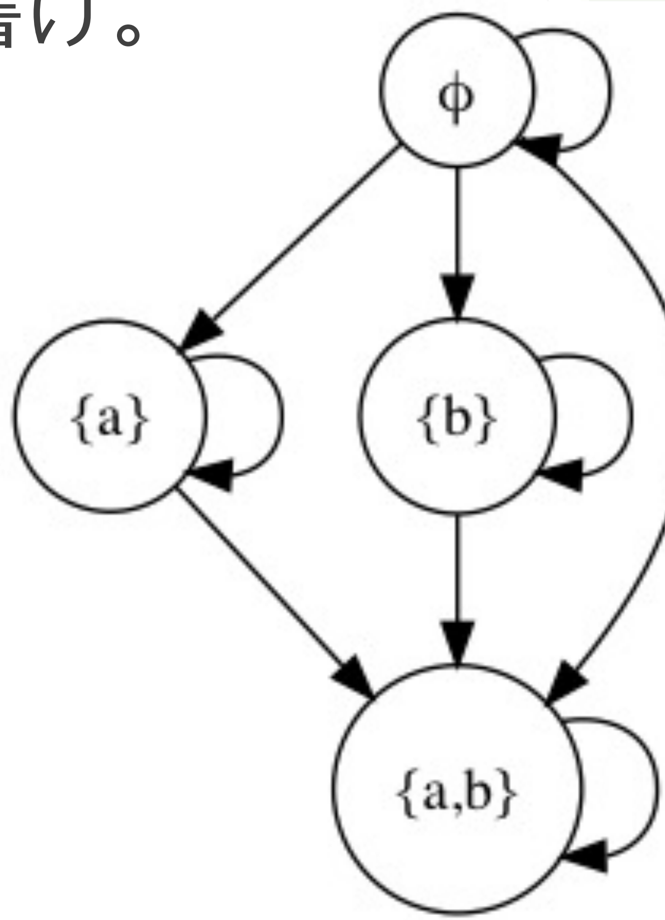
$X,Y\in 2^A$のとき　$XRY\ :X\subseteq Y$ とすると，

関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$2^A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



例題3

$A = \{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$x, y \in A$のとき　$xRy\ : x < y$ とすると,
関係行列と有向グラフを書け。

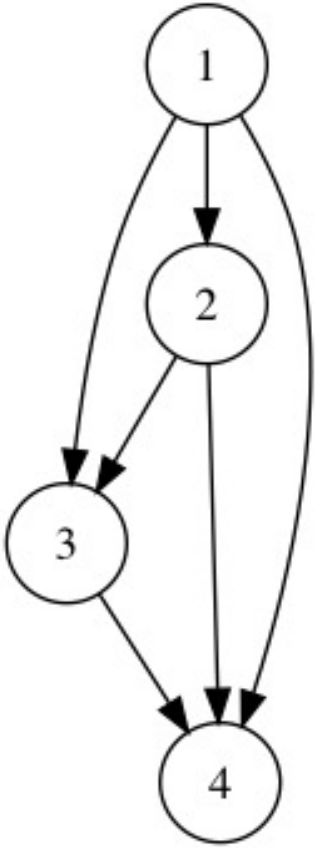
例題3

$A = \{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$x, y \in A$のとき　xRy ：$x < y$ とすると，
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



ここから
グラフ理論の基礎を学びます

9. 隣接頂点集合

Def 11

$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ について，V_iの隣接頂点集合（adjacency vertexes set）は，V_iから直接辺が引かれた頂点集合

$Adj(Vi)=\{V_j\in\mathbf{V}|E_{ij}\in\mathbf{E}\}$を示す.

Def 12

グラフGでV_iに接続する辺の数をV_iの次数といい， $\mathrm{d}(V_i)$と書く.

Th. 1

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について,

$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \cdots V_i\ , \cdots\ V_N\}$で辺の数が$q$のとき,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$$

Th. 1

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，　$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \cdots V_i, \cdots V_N\}$ で辺の数がqのとき，

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$$

[証明] 一つの辺は次数としてはかならず両端を含めて2と数えられるので，$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$

■

隣接行列

Def 12

辺の重みと多重辺を持たないグラフ$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$について，$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \cdots V_i, \cdots V_N\}$

のとき，以下の行列

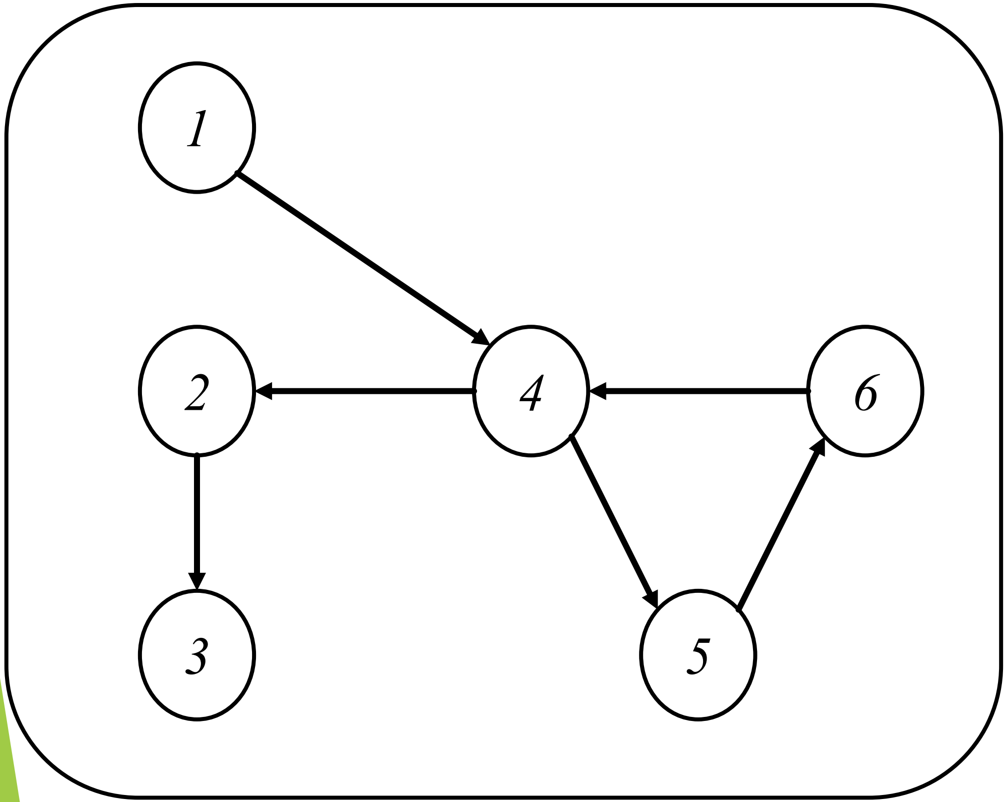
$$R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \cdots, N, j = 1, \cdots, N)$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1: V_i\text{と}V_j\text{に辺があるとき} \\ 0: V_i\text{と}V_j\text{に辺がないとき} \end{cases}$$

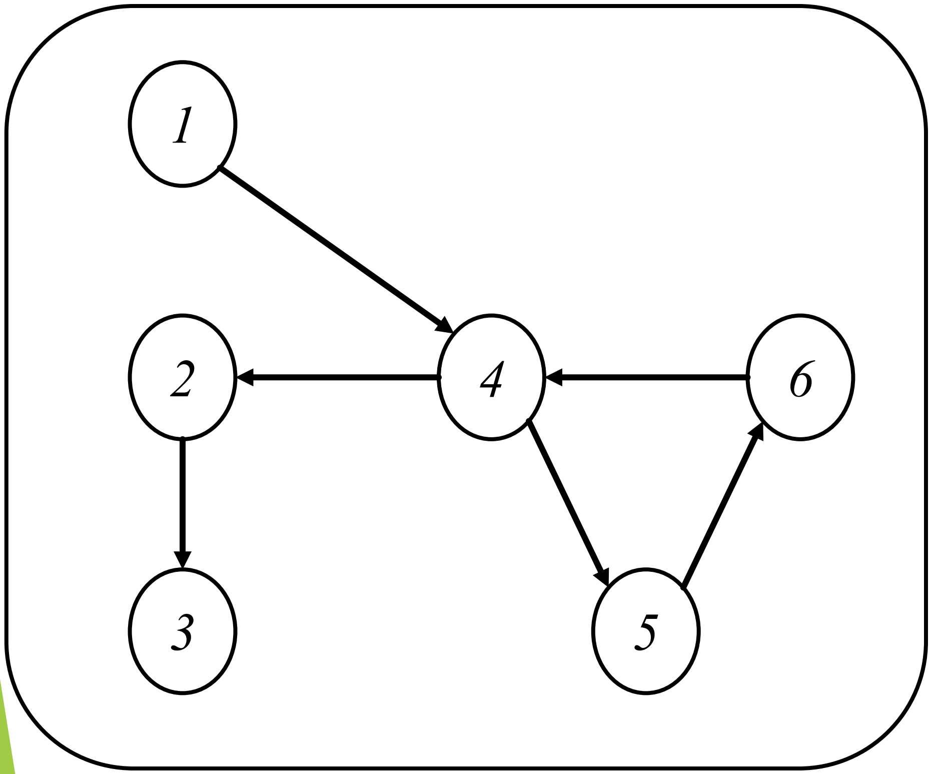
をGの隣接行列と呼ぶ。

ただし、辺の重みや多重辺を持つグラフではr_{ij}は0,1以外の値も取りえる。

例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Th. 2

関係行列は隣接行列と同値である。

10.経路

Def. 13 V_i からV_j への**経路**は，$V_{i_1} = V_i$で始まり，$V_{i_r} = V_j$ で終わるような以下を満たす順序化された頂点集合$(V_{i_1}, \ldots, V_{i_r})$ を示す.

$$V_{i_{k+1}} \in Adj(V_{i_k}). \quad (k = 1, \ldots, r-1)$$

10.道と路、閉路

Def.14すべての頂点が異なる経路を**道(path)**と呼ぶ.

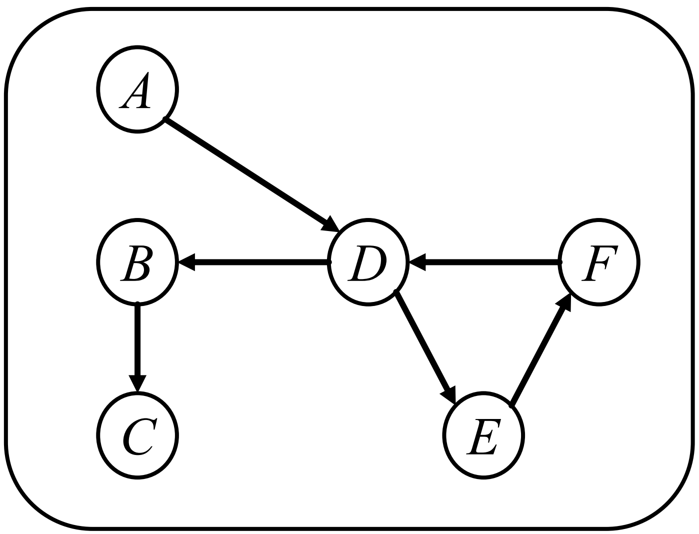
すべての辺が異なる経路を**路(trail)**と呼ぶ.

Def.15始点と終点が同じ頂点となる場合（すなわち，$V_{i_1} = V_{i_r}$ ），路 $(V_{i_1}, \ldots, V_{i_r})$ は**閉路**（closed path）と呼ばれる.

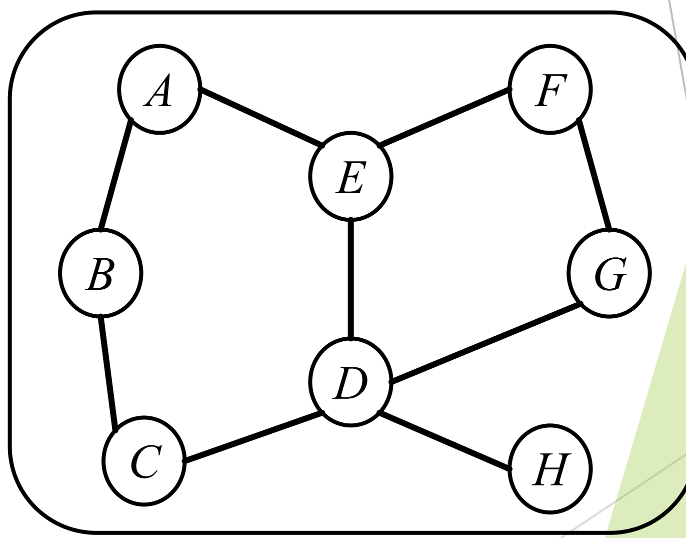
例

有向グラフ(a)の経路$D \to E \to F \to D$ は**閉路**である.

無向グラフ(b)の経路$A - B - C - D - E - A$ は**閉路**である.



(a)



(b)

Th. 3

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，

$\forall V_i \in \mathbf{V}, \mathrm{d}(V_i) \geq 2$ のとき，必ず G は閉路を含む.

Th. 4

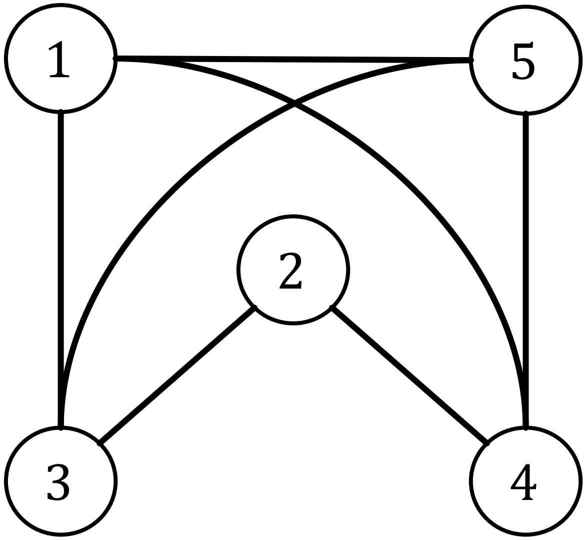
$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ について， 隣接行列をRとする.

R^nの(i,j)成分は長さnの$V_i - V_j$ の経路の数に等しい.

例題

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，以下の隣接行列Rを持つ.長さ3の$V_1 - V_4$ の経路の数を求めよ.

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



例題

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，以下の隣接行列Rを持つ.

長さ3の$V_1 - V_4$ の経路の数を求めよ.

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R^3(1,4) = 3\times1 + 2\times1 + 1\times0 + 1\times0 + 2\times1 = 7$．7個

Def 16 同型

二つのグラフ$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ と$G' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$について,

$\mathbf{V} = \mathbf{V}'$　$\land$　$\mathbf{E} = \mathbf{E}'$

のとき,二つのグラフは同型であるいう。

$G \cong G'$

と書く.

11．完全グラフと完全集合

Def 17

すべての頂点間に辺が張られた無向グラフを**完全グラフ**（complete graph）と呼ぶ．N 頂点の完全グラフを K_N と示す．

Def 18

グラフGの部分頂点集合S が，すべての頂点間に辺が張られている場合，S を**完全集合**（complete set）と呼ぶ．

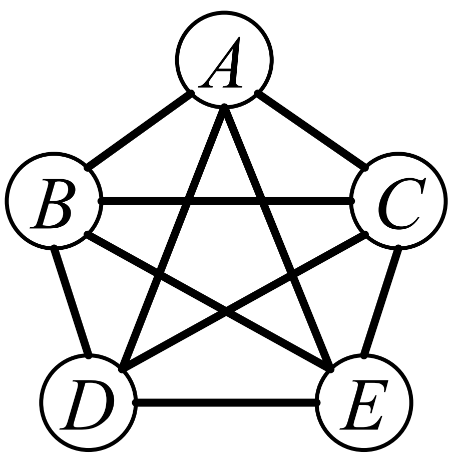


図　完全グラフK_5

12. クリーク

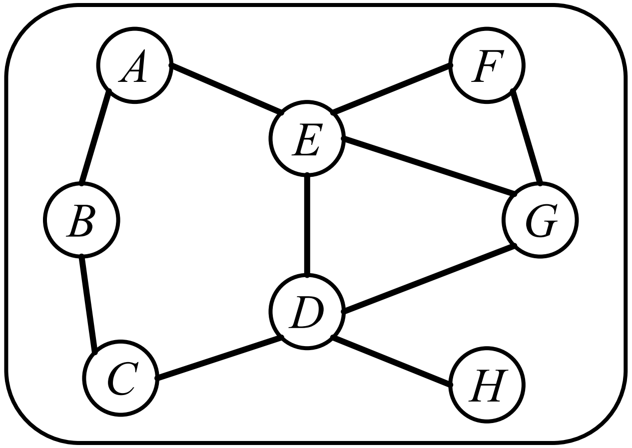
Def 19

完全集合Cが他のどの完全集合の部分集合にもなっていない場合，すなわち，最大の完全集合である場合，Cを**クリーク**（clique）と呼ぶ.

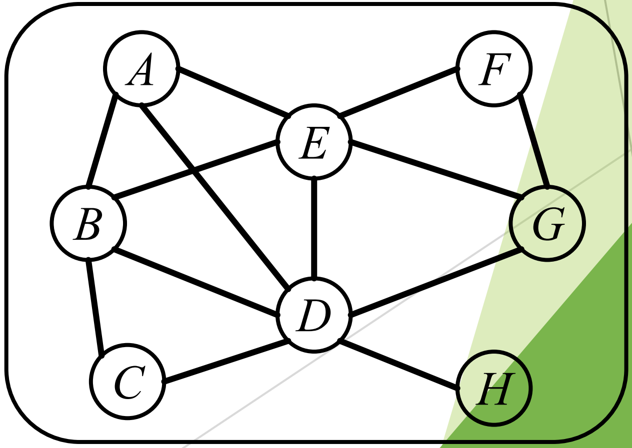
例

図 は，二つの異なるグラフのクリークを示している．
グラフ(a)は，クリーク$C_1=\{A,B\}$，$C_2=\{B,C\}$，$C_3=\{C,D\}$，$C_4=\{D,H\}$，$C_5=\{A,E\}$，$C_6=\{D,E,G\}$，$C_7=\{F,E,G\}$を含む．

グラフ(b) は，クリーク$C_1=\{A,B,D,E\}$，$C_2=\{B,C,D\}$，$C_3=\{D,H\}$，$C_4=\{D,E,G\}$，$C_5=\{E,F,G\}$を含む．



(a)



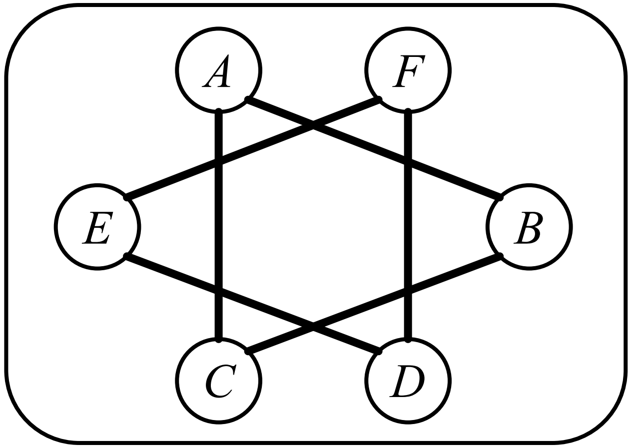
(b)

Def . 20　連結グラフと非連結グラフ

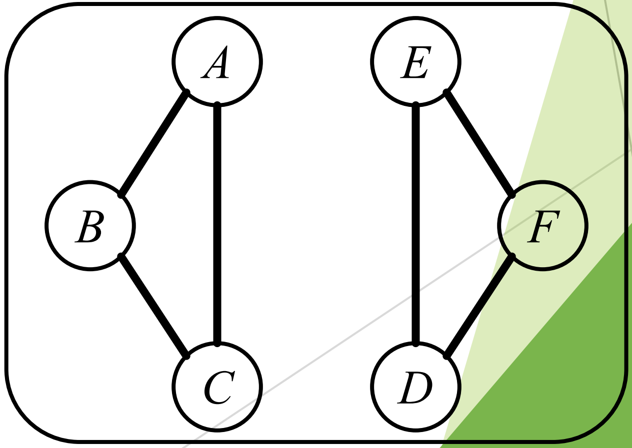
無向グラフのすべての二つの頂点間で少なくとも一つの道が存在するとき，**連結グラフ**（connected graph）と呼ぶ．それ以外を**非連結グラフ**（disconnected graph）と呼ぶ．

例18

図 は，同じ構造をもつ非連結グラフの異なる二つの表現である．図(a) はエッジが交差しており，非連結には見えないが，図(b) のように交差を外し，分離すればより非連結性が強調される．



(a)



(b)

Def. 21　木

閉路を持たない連結グラフTを木(tree)とよぶ.

Th. 5　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ の　$\forall V_i\ \forall V_j \in \mathbf{V}$について, V_iとV_jを結ぶただ１つの道が存在する.

Th. 6　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は連結であり，　どの辺を除いても連結ではなくなる.

Th. 7　　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は閉路を持たず、　　辺をどのように一つ加えても閉路を一つ持つグラフになる.

Th. 8

*N*個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は，*N-1*個の辺を持つことである．

*N*個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は，*N-1*個の辺を持つことである.

[証明]　数学的帰納法を用いる.

(1) 頂点数が2のとき,辺が１つで木である.

(2) 頂点数がNのとき,木の必要十分条件はN-1個の辺であるとする.

頂点数がN+1のとき,閉路を持たない連結グラフになるように1つの辺をN+1番目の頂点とそれ以外の1つの頂点の間に加えなければならない.このとき,頂点数-1の辺が存在することになる.　■

Def 22. 2部グラフ

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$とし, $\mathbf{E}$の要素である辺は

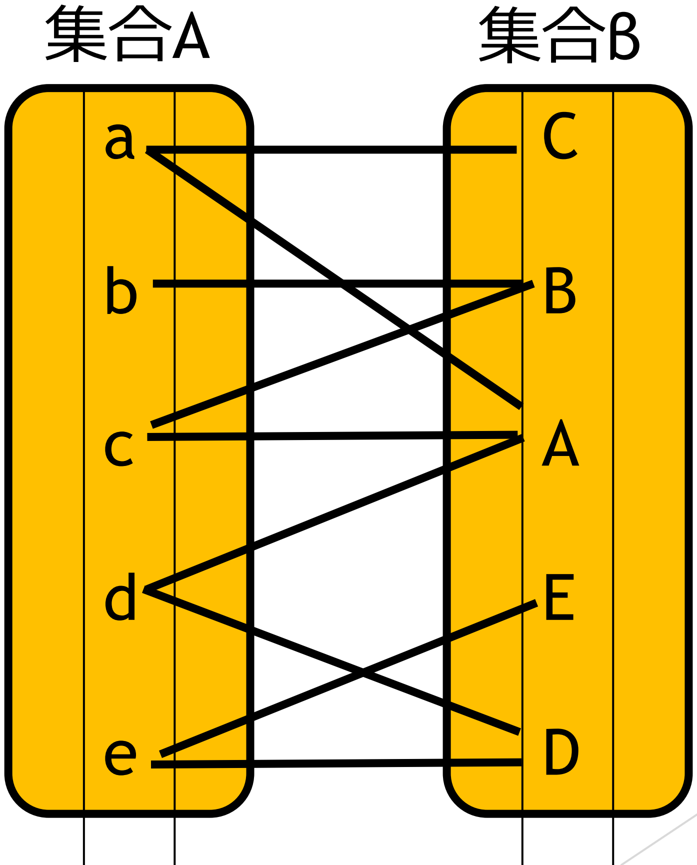
$\mathbf{V} = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset, (V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset)$

となるような$\mathbf{V}$の部分集合V_1, V_2の頂点を結ぶようにできるとき, Gを2部グラフと呼ぶ.

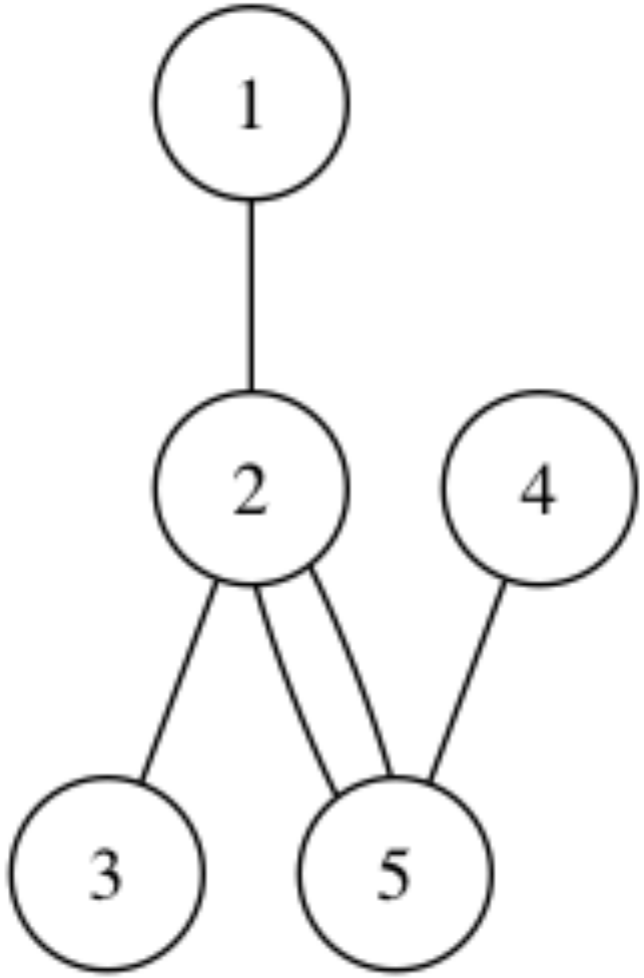
さらに　V_1とV_2のすべての頂点が互いに結ばれてる2部グラフを,完全2部グラフと呼び, $K(m, n)$で示す. $m = |V_1|,\ n = |V_2|$.

2部グラフとは

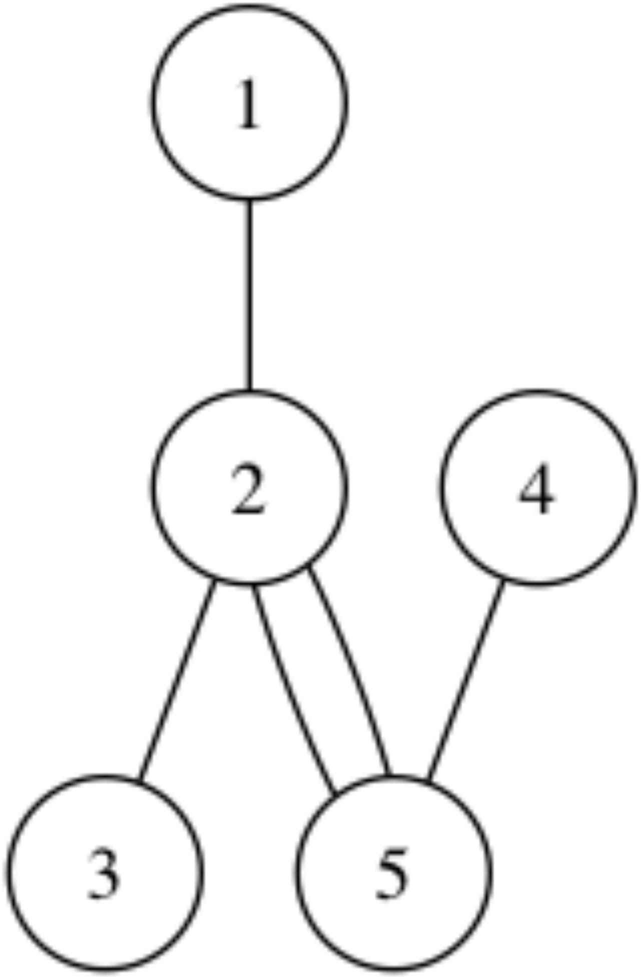
頂点集合を二つの部分集合に分割して各集合内の頂点同士の間には辺が無いようにできるグラフ

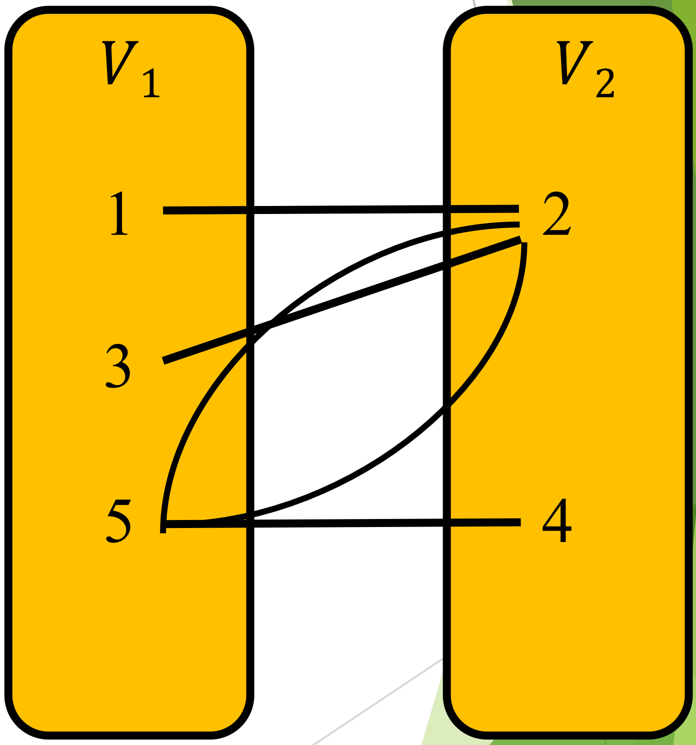


例題１　以下のグラフは2部グラフか。

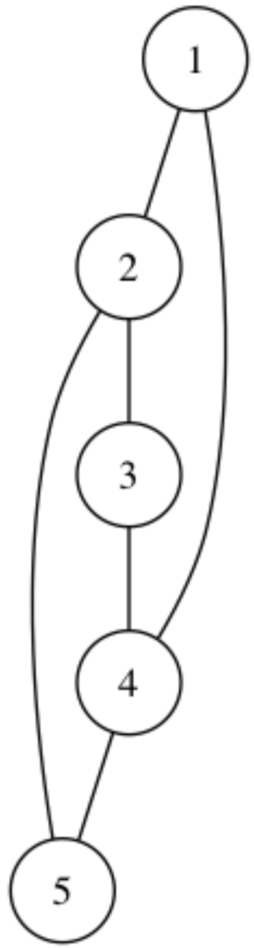


例題１　以下のグラフは2部グラフか。

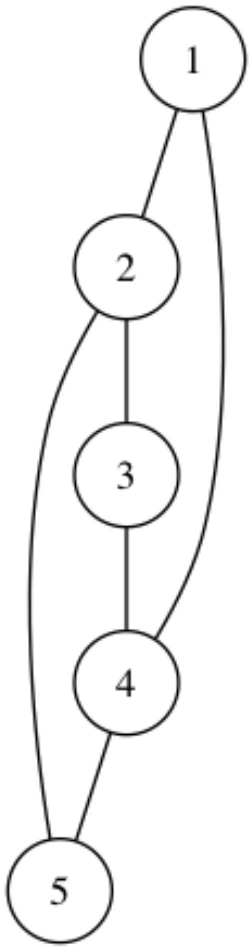


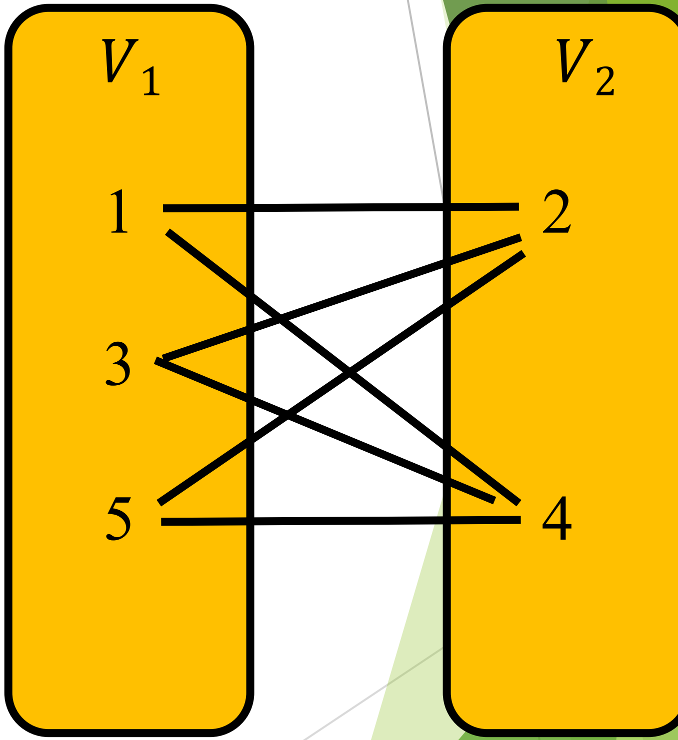


例題２　以下のグラフは2部グラフか。



例題２　以下のグラフは2部グラフか。





完全2部グラフ $K(3,2)$

Def 23 オイラーグラフ

すべての辺を含む路を持つグラフを周遊可能なグラフという．（一筆がきが可能）

すべての辺を含む閉じた路を持つ連結グラフをオイラーグラフと呼ぶ.

（周遊可能なグラフの中で始点と終点が同じもの）

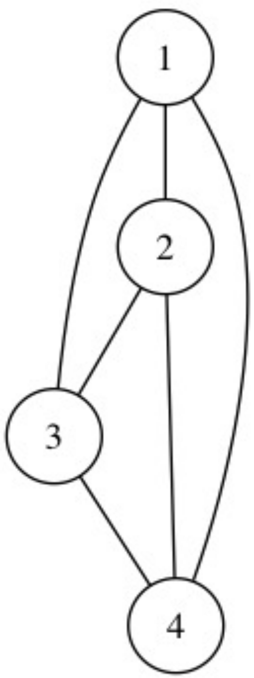
Th 9

連結グラフGがオイラーグラフであるための必要十分条件は, Gの頂点がすべて偶頂点（次数が偶数である頂点）であることである.

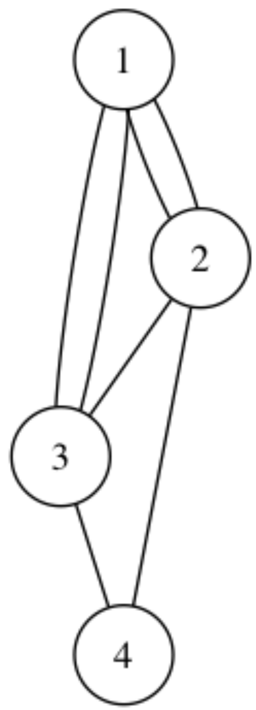
周遊可能なグラフの必要十分条件は, Gの頂点がすべて偶頂点か同じ奇頂点が２個存在することである.

例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

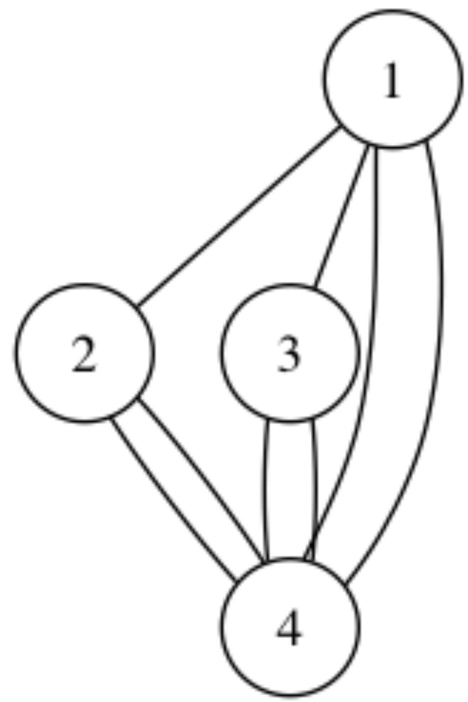
（１）



(2)

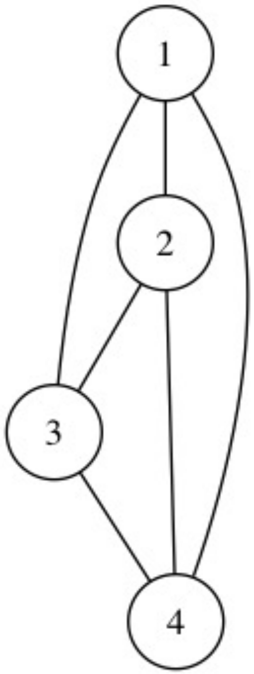


(3)



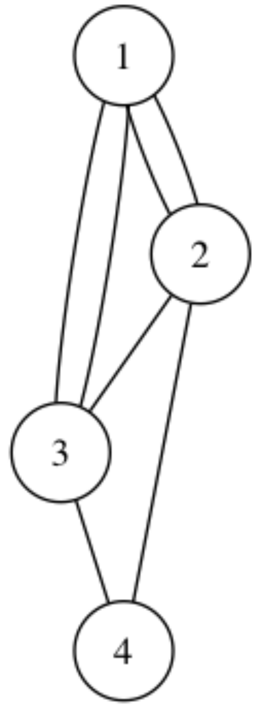
例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

（1）

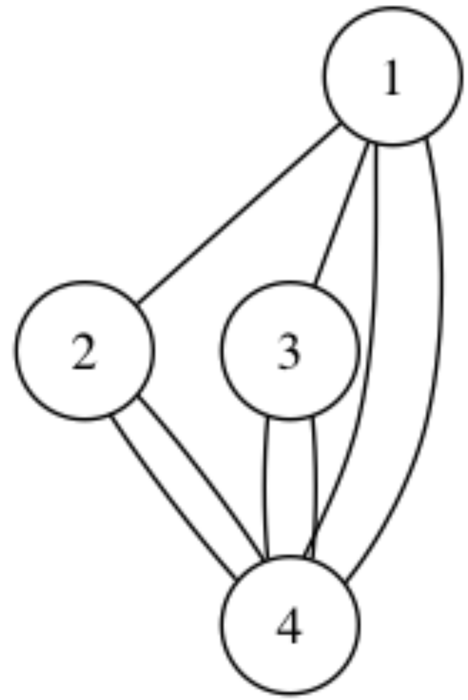


すべて次数が3で
周遊可能でなく,
オイラーグラフ
でない.

(2)

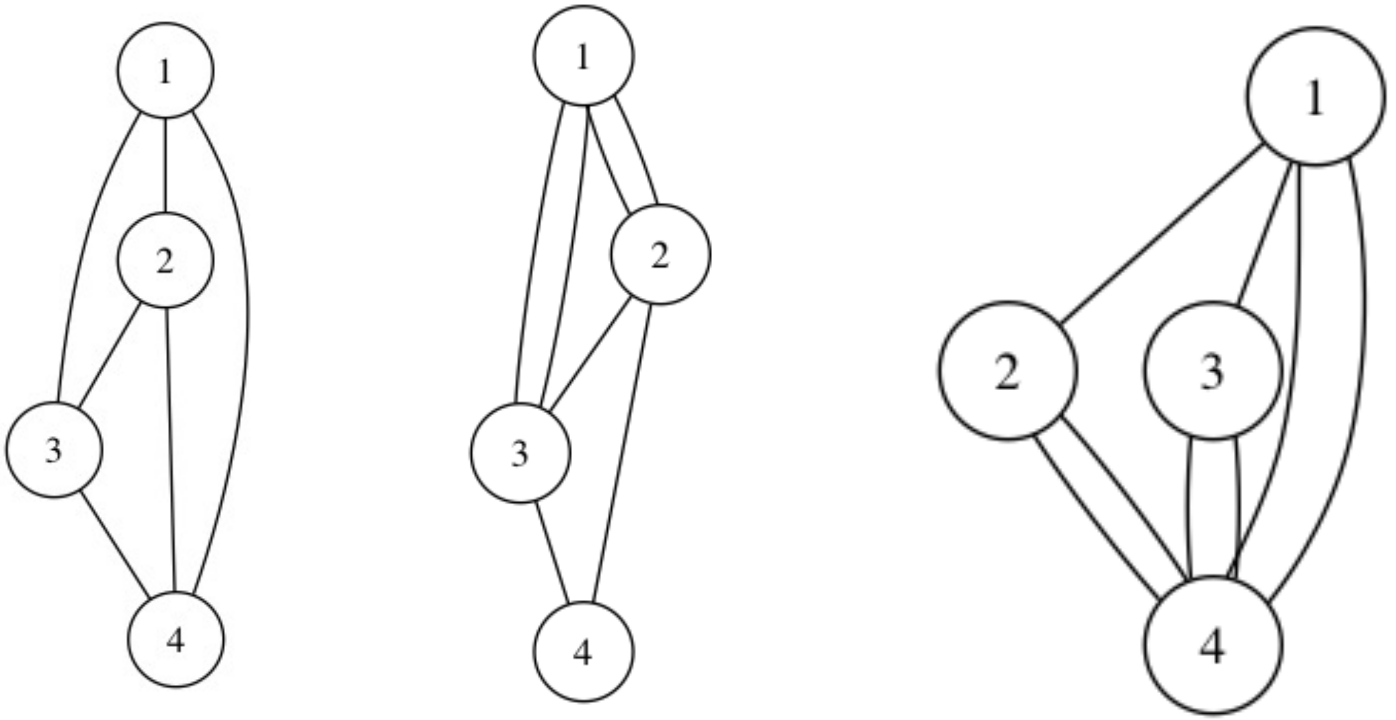


(3)



例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

（1）　　(2)　　(3)

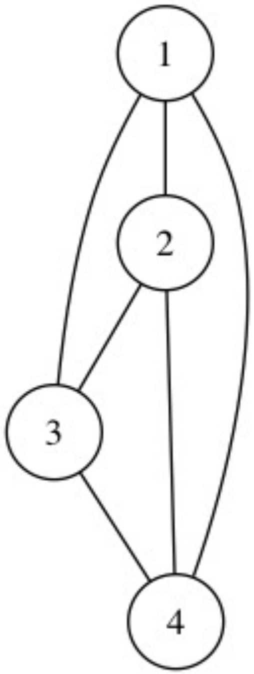


すべて次数が3で周遊可能でなく,オイラーグラフでない.

すべての次数が偶数なので周遊可能で,オイラーグラフである.

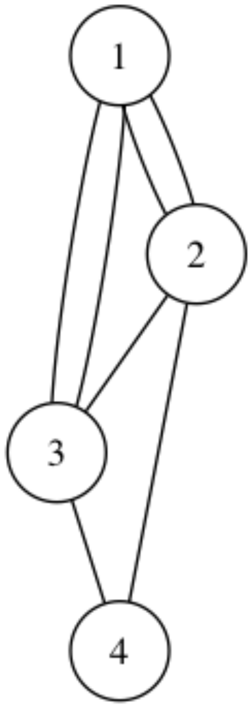
例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーグラフか？

（1）



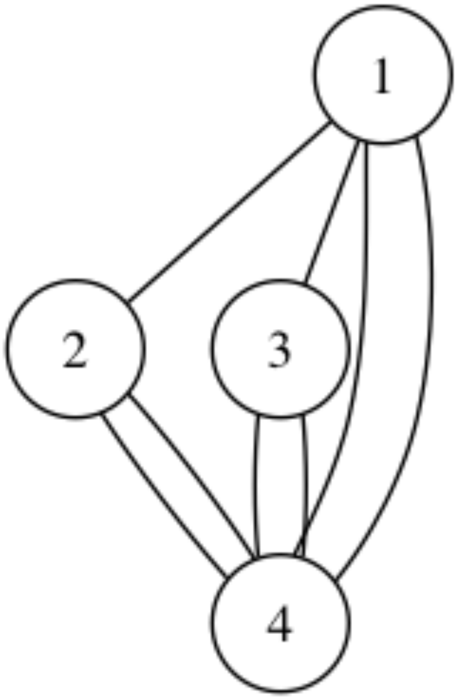
すべて次数が3で周遊可能でなく，オイラーグラフでない．

(2)



すべての次数が偶数なので周遊可能で，オイラーグラフである．

(3)



奇頂点がちょうど二つなので周遊可能で，オイラーグラフでない．

まとめ

① 関係（二項関係）

② 関係と写像

③ グラフによる表現

④ 関係行列

⑤ 有向グラフと無向グラフ

⑥ 隣接集合と隣接行列

⑦ 木、完全グラフ、クリーク

⑧ 2部グラフ

演習問題

問題1

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$とし，A上の関係

$$R = \left\{ \begin{matrix} (a,a),(a,d),(a,e),(b,b),(c,c),(c,f),(d,d), \\ (d,a),(d,e),(e,e),(e,a),(e,d),(f,f),(f,c) \end{matrix} \right\}$$

について，有向グラフを用いてRを表せ.

問題2

$A=\{1,2,3,4,5\}$上の関係Rについて

$x,y\in A$のとき　xRy ：$x>y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

問題3

$A = \{n \mid -2 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{Z}\}$において，
関係R：「$\equiv (mod. 3)$」を

$m \equiv n\ (mod. 3) \iff m - n$は3の倍数

と定義するとき，この関係を直積A^2の
部分集合Rとして表せ.

また，Rを有向グラフで表せ.