

2. 集合の基礎と 全称記号・存在記号

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学プログラム

本授業の構成

- 第1回 10月3日：第1回 命題と証明
- 第2回 10月10日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 第3回 10月17日：第3回 命題論理
- 第4回 10月24日：第4回 述語論理
- 第5回 10月31日：第5回 述語と集合
- 第6回 11月7日：第6回 直積と冪集合
- 第7回 11月14日：第7回 様々な証明法 (1)
- 第8回 11月28日：第8回 様々な証明法 (2)
- 第9回 12月5日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 第10回 12月12日：第10回 写像 (関数) (1)
- 第11回 12月19日：第11回 写像 (関数) (2)
- 第12回 12月26日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、
グラフによる表現
- 第13回 1月16日：第13回 同値関係
- 第14回 1月23日：第14回 順序関係：半順序集合、
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 第15回 1月30日：第15回 期末試験

1. 本日の目標

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が正しく使える
2. 全称記号 \forall , 存在記号 \exists が使える
3. 部分集合と包含関係を理解する
4. 集合の演算（和、積、補、差、素, 要素数）

2. 重要な集合

\emptyset :

\mathbb{N} :

\mathbb{N}^+ :

\mathbb{Z} :

\mathbb{Q} :

\mathbb{R} :

\mathbb{C} :

2. 重要な集合

\emptyset : 空集合 (empty set)

(ギリシャ語 φ とは違う)

\mathbb{N} : 自然数集合 (0を含む)

\mathbb{N}^+ : 自然数集合 (1以上)

\mathbb{Z} : 整数集合

\mathbb{Q} : 有理数集合

\mathbb{R} : 実数集合

\mathbb{C} : 複素数集合

要素数が有限の集合を有限集合(finite set),

要素数が無限の集合を無限集合(infinite

set) と呼ぶ

普遍集合

Def

議論の対象とする全体集合

例

普遍集合を \mathbb{N} とする

⇒

自然数全体を全体集合とする

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$a \in A$ と書く。

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：

内包的記法：

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$ (有限集合)

$A = \{1,3,5,7 \dots\}$ (無限集合)

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

3. 集合の「要素」の記法

ある対象 a が集合 A の要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$ (有限集合)

$A = \{1,3,5,7 \dots\}$ (無限集合)

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

(n (かつ) を示す場合にはカンマで区切る)

$$A = \{n \mid 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n \text{は奇数}\}$$

例

- ▶ $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を
外延的記法で表せ。

例

- ▶ $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ を
外延的記法で表せ。
- ▶ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

例

- ▶ $A = \{2,4\}$ を先の例の内包的記法 $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ に条件を足して表せ。

例

- ▶ $A = \{2,4\}$ を先の例の内包的記法 $A = \{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$ に条件を足して表せ。

回答

- ▶ $A = \{n | 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n \text{は偶数}\}$

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」



「任意の自然数 n について, $n \geq 0$ が成り立つ」

4. 全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」



「任意の自然数 n について, $n \geq 0$ が成り立つ」



「 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ 」

\forall : 意味 : すべての(all, any) 読み方: “for all”

日本語訳 :

「 \mathbb{N} に属するすべての n について, $n \geq 0$ が成り立つ」

例

「すべての実数 x について、 $x^2 \geq 0$ 」
を全称記号を用いて表せ.

例

「すべての実数 x について、 $x^2 \geq 0$ 」
を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

5. 存在記号

命題

「実数 x について $x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

5. 存在記号

命題

「実数 x について $x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」



「 $x^2 + 7x < 0$ となる実数 x が存在する」

5. 存在記号

命題

「実数 x について $x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

↓

「 $x^2 + 7x < 0$ となる実数 x が存在する」

↓

「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 7x < 0$ 」

\exists : 意味 : 存在する (Exist) 読み方 : “there exists”

例

「実数 x について $x^2 > 0, x < 0$ となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

例

「実数 x について $x^2 > 0, x < 0$ となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

6. 部分集合

▶ Def (定義 : Definitionのこと)

対象としているものの全体を普遍集合 (全体集合) と呼び, U と書く. また, 要素を一つも持たない集合を空集合といい, \emptyset で表す.

▶ Def

集合 A の要素が集合 B の要素でもあるとき, A は B の部分集合であるといい,

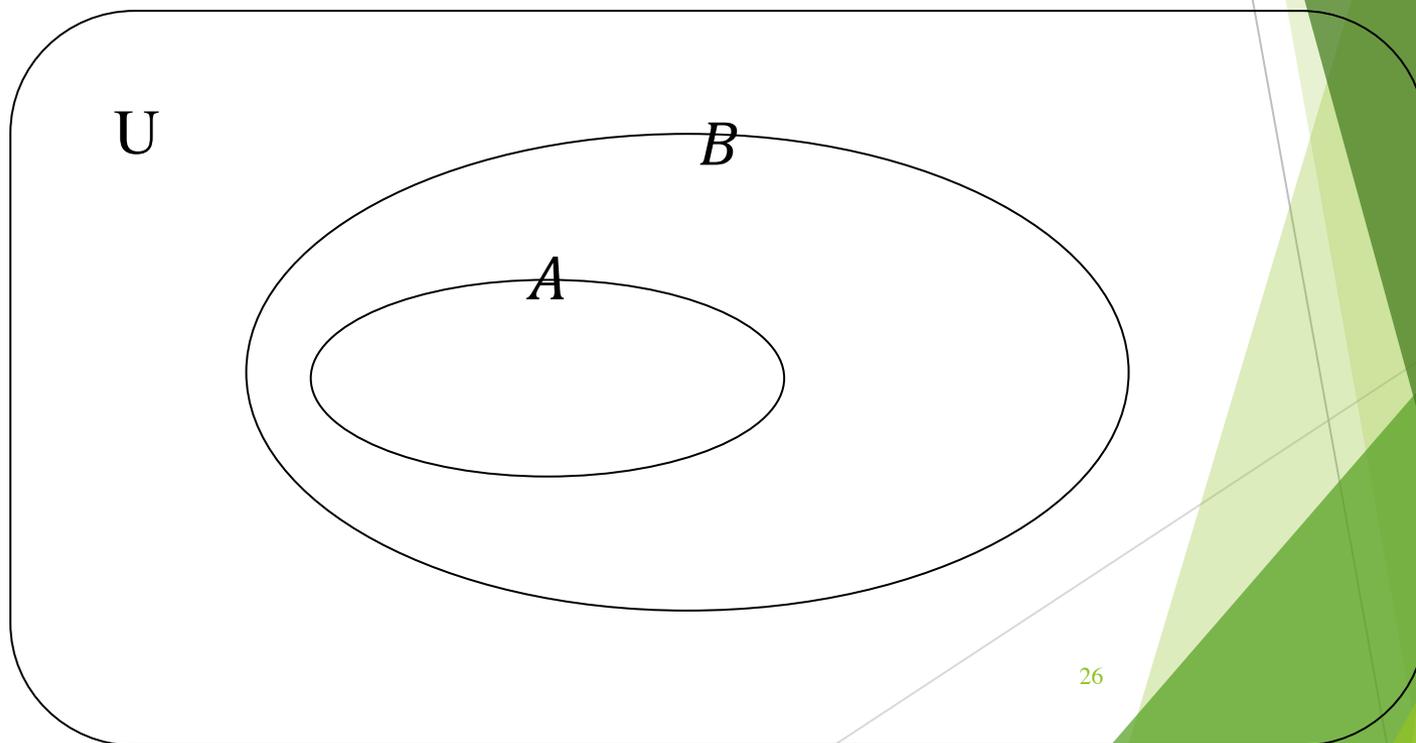
$$A \subseteq B \text{ または } B \supseteq A$$

で表す.

部分集合の数学的表現

$$\text{Def } A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

\rightarrow は「ならば」という意味、
 x が A に含まれているならば、その x のすべては B に含まれる。



注意

- ▶ Def $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$
- ▶ この部分集合の定義では, B 自身も B の部分集合であることがわかる.

例題 次の命題は正しいか？
真偽を証明せよ。

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

ヒント

▶ 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

(1)の解答

$$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}$$

に対して $A \subseteq B$

解答 真

証明

A の要素1,2,3はすべて B の要素で,

$$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$$

が成り立つ. 定義より

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ ならば $A \subseteq B$

$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3,4\}$ に対して

$\forall x[x \in \{1,2,3\} \rightarrow x \in \{1,2,3,4\}]$ が成り立つ.

従って $A \subseteq B$



(2)の解答の方針

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

解答 偽

証明の方針

Aの要素で1はBの要素でない。

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ の否定 \Rightarrow

$\exists x \in A[x \notin B]$

(2)の解答

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

解答 偽

証明

Aの要素で1はBの要素でない. 従って

$$\exists x \in A [x \notin B] \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

定義より

「 $\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$ が成り立たない」ならば

「 $A \subseteq B$ は成り立たない」

従って、命題は偽



重要

全称記号 \forall の否定に存在記号 \exists が
用いられる

$$\neg \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$$

→ 「 A のすべての要素が B の要素である」の否定

→ 「 A の要素の中で B の要素でないものがある」

→

$$\exists x \in A [x \notin B]$$

「 \sim ならば \sim である」の否定は、反例 $\exists x$ を一つ
示せばよい。

同等

Def $A \subseteq B$ and $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

▶ AとBは等しいという.

同等

Def $A \subseteq B$ and $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

▶ AとBは等しいという.

例題

$$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{のとき,}$$

$A = B$ を証明せよ.

ヒント

▶ 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

$$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ のとき,

$A = B$ を証明せよ.

証明

(1) $A \subseteq B$

$$\forall x \in A \Leftrightarrow \forall x [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}]$$

$$\Rightarrow \forall x [x = 4(n + 1) - 1, n \in \mathbb{Z}], (n + 1) \in \mathbb{Z} \text{ より} \Rightarrow \forall x [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}] \Rightarrow$$

$$\forall x [x \in B] \text{ より} \forall x [x \in A \rightarrow x \in B].$$

従って $A \subseteq B$

例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ のとき, $A = B$ を証明せよ.

証明

(2) $A \supseteq B$

$$\forall x \in B \Leftrightarrow \forall x [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}]$$

$$\Rightarrow \forall x [x = 4(m - 1) + 3, m \in \mathbb{Z}], (m - 1) \in \mathbb{Z} \text{ より} \Rightarrow \forall x [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow$$

$\forall x [x \in A]$ より

$$\forall x [x \in B \rightarrow x \in A]. \text{ 従って } A \supseteq B$$

(1)(2)より $A \subseteq B$ and $A \supseteq B$

が成り立つ. 従って $A = B$



真部分集合

▶ Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

A は B の真部分集合であるという.



Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$
and ??????

真部分集合

▶ Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$

A は B の真部分集合であるという.



Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$
and $\exists y \in B [y \notin A]$

例題

▶ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

ヒント

▶ 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

▶ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

証明

① $\forall x [x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}]$ が成り立つ

② $y = -1$ について

$y \in \mathbb{Z}$ であるが $y \notin \mathbb{N}$

従って

$\exists y \in \mathbb{Z} [y \notin \mathbb{N}]$

①②より $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



7. 集合演算

集合 A, B と普遍集合を U とする.

A, B を U の部分集合として以下の演算を定義する.

- (1) 和集合
- (2) 積集合
- (3) 補集合
- (4) 差

(1) 和集合

$$A \cup B = \{x | x \in A, \text{ or } x \in B\}$$

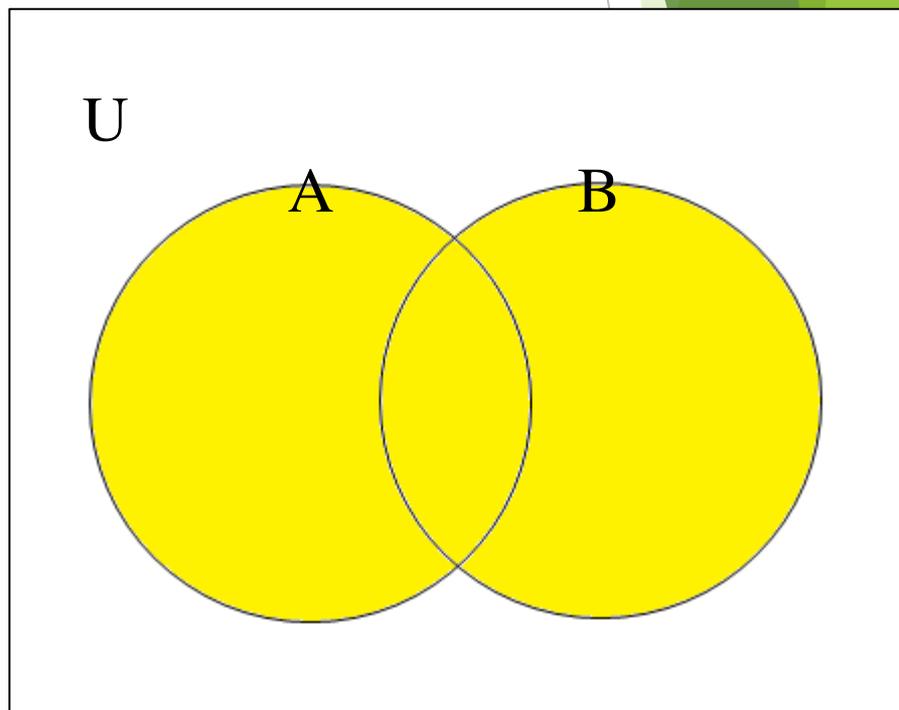
集合 A, B と普遍集合を U とする。

このとき、 A, B の和集合

とは A と B の要素を

すべて併せた集合の

こと



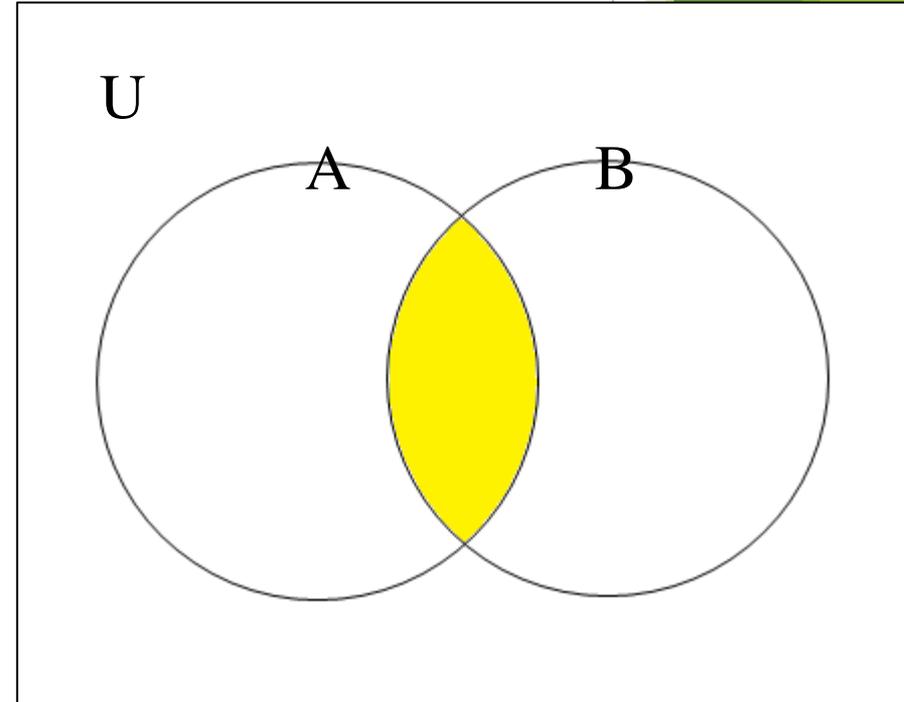
(2) 積集合

$$A \cap B = \{x | x \in A, \text{ and } x \in B\}$$

集合 A, B と普遍集合を U とする。

このとき、 A, B の積集合とは、

A と B の共通要素のみ
からなる集合のこと



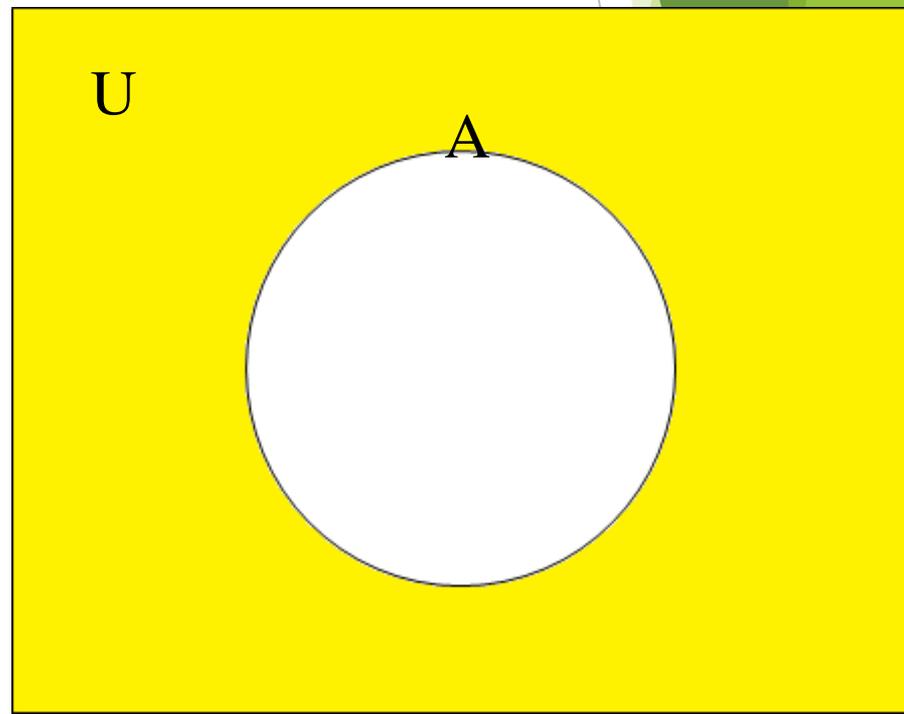
(3) 補集合

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U, \text{ and } x \notin A\}$$

普遍集合を U とし、その部分集合 A を考える。

このとき、 A の補集合とは U のうち

A に含まれない要素の集合のこと



(4)差

$$A - B = \{x | x \in A, \text{ and } x \notin B\}$$

集合 A, B と普遍集合を U とする.

このとき, 差 $A - B$ とは,

A から B の要素を

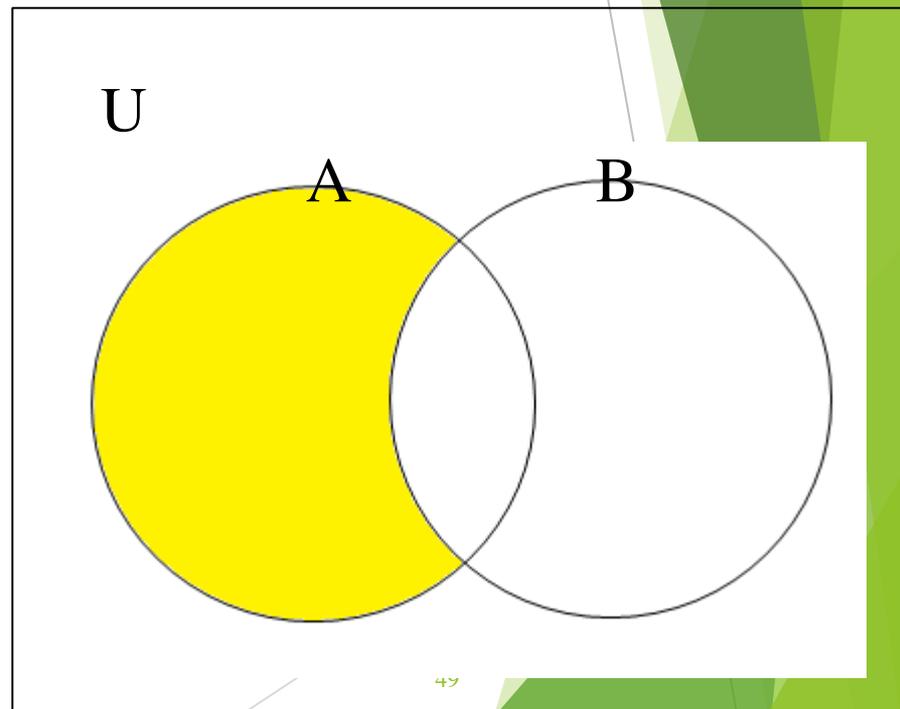
除いた集合のこと

$A - B = A \setminus B$ と書く

こともある.

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

と書ける.



(5) 素

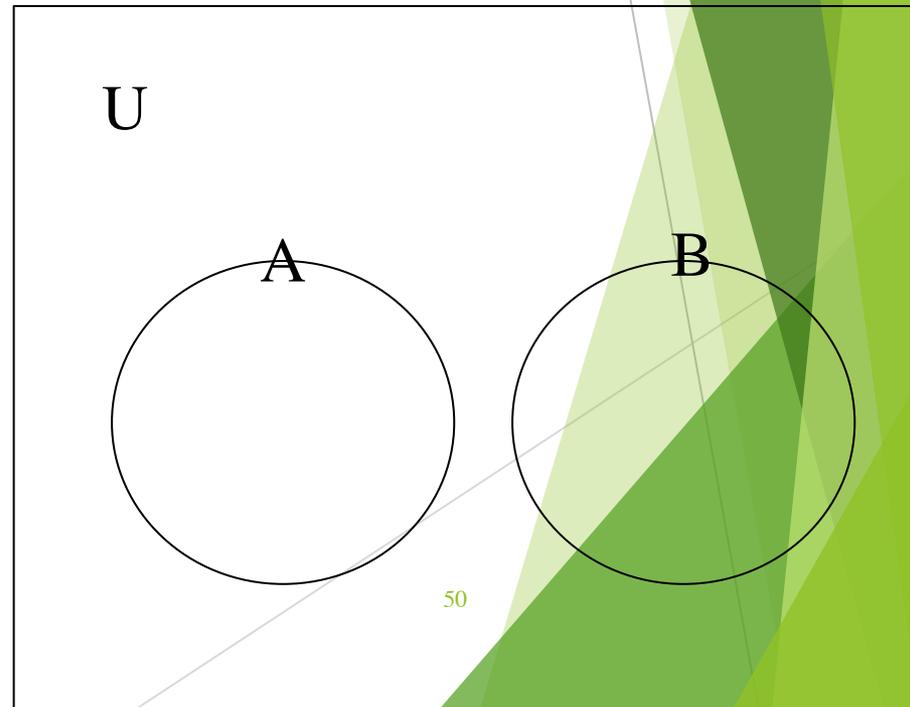
集合 A, B と普遍集合を U とする.

A と B に共通要素がない場合

$$A \cap B = \emptyset$$

「このとき A と B は素である」

という.



8. ド・モルガンの法則を証明せよ

集合 A, B と普遍集合を U とする.

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ヒント

▶ 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

解答(1)

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

証明

$$A \cup B = \{x \mid x \in A, \text{ or } x \in B\}$$

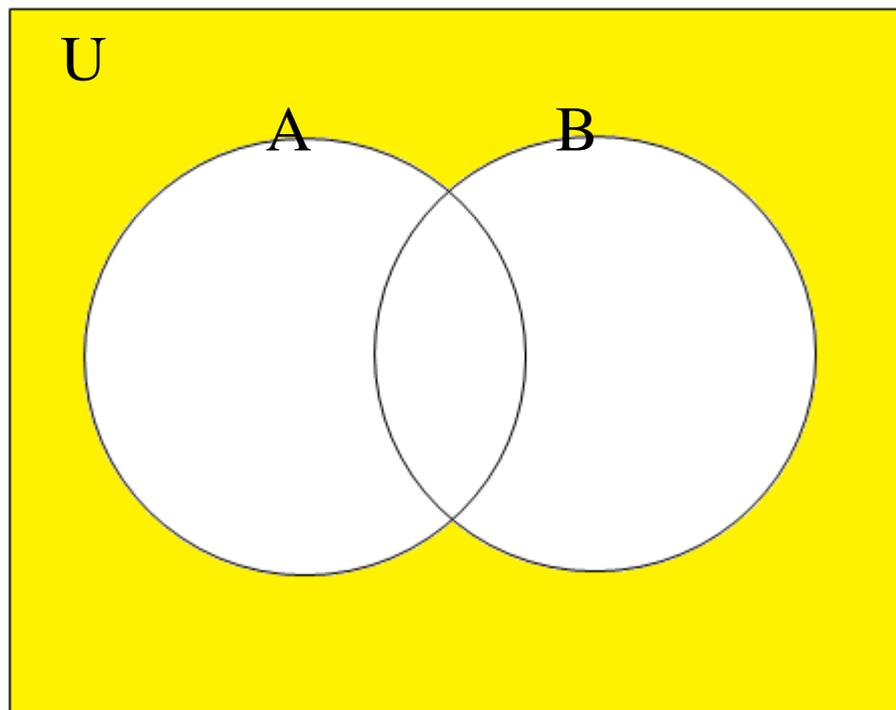
$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \{x \mid x \in U, \text{ and } x \notin A \cup B\} \\ &= \{x \mid x \in U, \text{ and } x \notin A, \text{ and } x \notin B\} \\ &= \bar{A} \cap \bar{B} \end{aligned}$$

注意

$A \cup B$ に含まれないのでそれぞれにも含まれない

(1)のイメージ

$$(1) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



解答(2)

$$(2) \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

証明

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{ and } x \in B\}$$

$$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \in U, \text{ and } x \notin A \cap B\}$$

$$= \{x \mid x \in U, \text{ and } x \notin A, \text{ or } x \notin B\}$$

$$= \bar{A} \cup \bar{B}$$

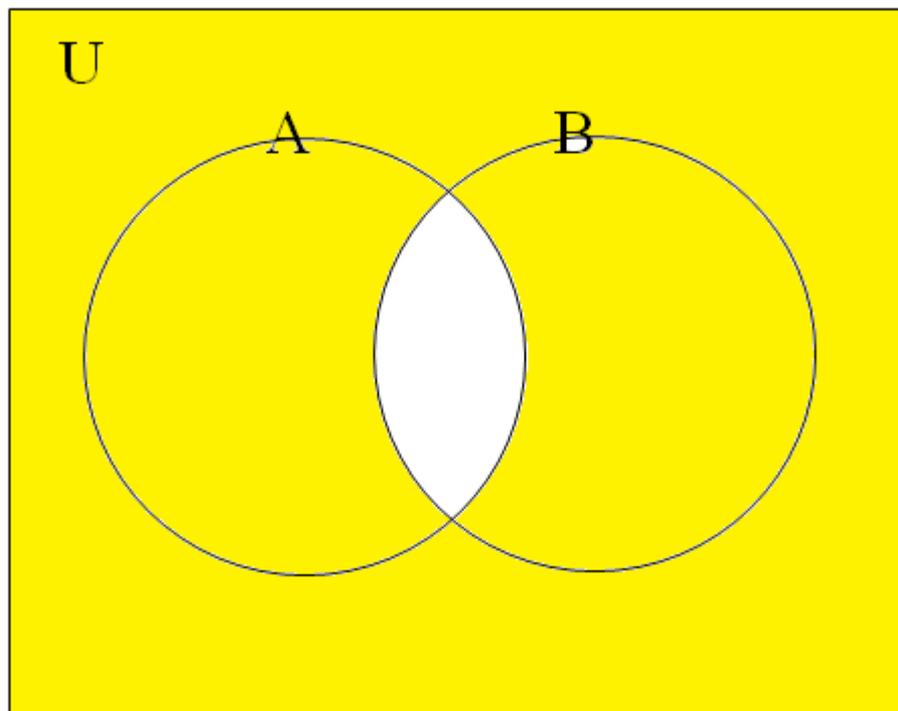
注意

AかつBに含まれないので
Aに含まれないかBに
含まれない



(2)のイメージ

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



例

普遍集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$,

$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B$

(2) 積集合 $A \cap B$

(3) 補集合 \bar{A} , \bar{B}

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

を求めよ.

例

普遍集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$,

$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$

(2) 積集合 $A \cap B$

(3) 補集合 \bar{A} , \bar{B}

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 4\}$,

$B = \{4, 5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 \bar{A} , \bar{B}

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,4\}$,
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,4\}$,
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B = \{1,2\}$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$

例

普遍集合 $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,4\}$,
 $B = \{4,5\}$

このとき,

(1) 和集合 $A \cup B = \{1,2,4,5\}$

(2) 積集合 $A \cap B = \{4\}$

(3) 補集合 $\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$

(4) $A - B = \{1,2\}$

(5) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{3\}$

9. 要素の個数

集合 A が有限集合の場合、要素の数を

$$n(A) \quad \text{や} \quad |A|$$

で表す。

以下を証明せよ。

Th. 1.

U を有限な普遍集合とする。
集合 A, B について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} n(A \cup B) \\ = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \end{aligned}$$

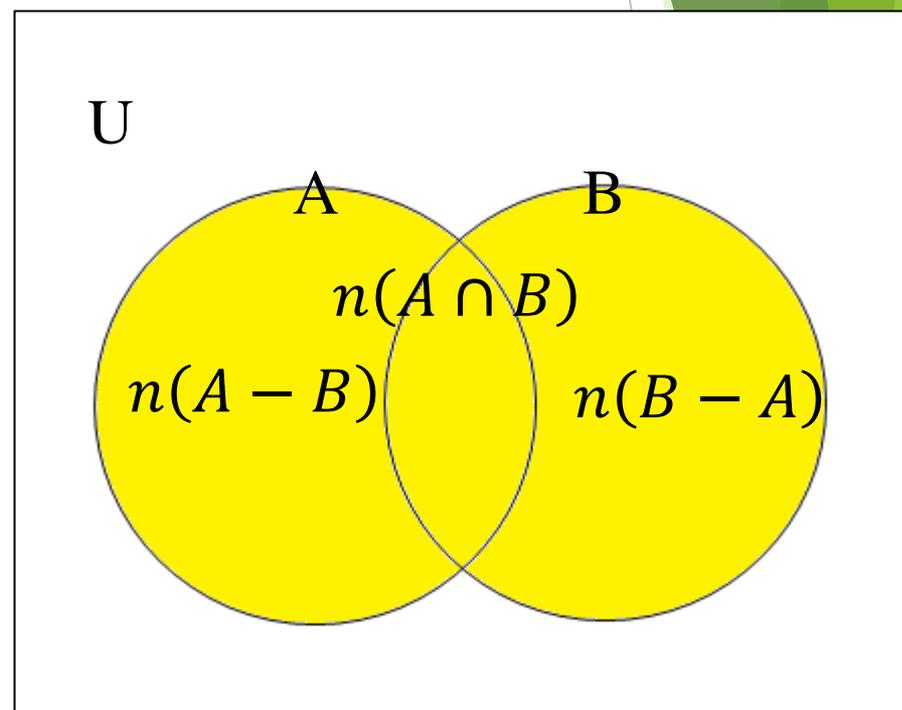
Th 1 U を有限な普遍集合とする。

集合 A, B について

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[ヒント]

$$\begin{aligned} n(A \cup B) \\ &= n(A - B) + n(B - A) \\ &\quad + n(A \cap B) \end{aligned}$$



Th 1 U を有限な普遍集合とする。

集合 A, B について

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[証明]

$$n(A \cup B)$$

$$= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$+ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

従つて

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \blacksquare$$

系 1 Corollary 1

U を有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

系 1 Corollary 1

U を有限な普遍集合とする。

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

[証明]

Th 1より, $n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$.

$\bar{A} \cap A = \emptyset$ より,

$$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$$

従って,

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A) \quad \blacksquare$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$
とするととき, 以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B)$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 25$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 50$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$,
とするととき, 以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B)$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B)$$

例

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$

について

$$A = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき,

$$n(A) = 26$$

$$n(B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 0$$

$$n(A \cup B) = 51$$

8. まとめ

1. 集合の記述法（外延的記法、内包的記法）
2. 全称記号 \forall 、存在記号 \exists
3. 部分集合と包含関係
4. 集合の演算（和、積、補、差、素,要素数）

演習問題1. 次の集合を外延的記法でかけ。

$$(1) A = \{n \mid 1 < n < 10, n \in \mathbb{N}, n \text{ は偶数}\}$$

$$(2) B = \{4n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$(3) C = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$$

$$(4) D = \{x \mid 2x^2 + 9x + 9 = 0, x \in \mathbb{N}\}$$

演習問題2. 次の集合を内包的記法でかけ。

$$(1) A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$$

$$(2) B = \{\dots, -14, -7, 0, 7, 14, \dots\}$$

$$(3) C = \{1, 8, 27, 64, 125, 216\}$$

$$(4) D = \{0, 5, 10, 15, 20, \dots\}$$

演習問題3. 次の数について数の集合 $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ に属するか属さないかを \in か \notin を用いて表現せよ。

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\sqrt{2}$

(3) -5

(4) $2 - i$

演習問題4. 次の数式を日本語で表せ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 0$

(3) $\exists n \in \mathbb{C}, n^2 \in \mathbb{N}$

(4) $\forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

(6) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq a$

(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, ax + b = 0$

(8) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| < a$

演習問題5. 次の日本語を全称記号, 存在記号を用いて表せ

- (1) 実数の中には、有理数ではない数が存在する
- (2) すべての実数 x について、 $2x^2 - x + 2 > 0$ が成り立つ
- (3) 0と異なる任意の実数 x について、 $\frac{y}{x} = 1$ となる実数 y が存在する
- (4) 任意の整数 n に対し $\sin(2\pi n) = 0$ が成り立つ
- (5) 整数の中には、2で割り切れない数が存在する
- (6) すべての実数 x について、 $2^x > 0$ である
- (7) 任意の実数 x に対し、 $x^2 + 3x + 2 > a$ となる定数 a が自然数の中に存在する
- (8) 任意の整数 a に対し、 $x^2 + x + 2 > a$ となる有理数 x が存在する

演習問題6.

- (1) $A = \{a, b, c, d\}$ に対して, A の部分集合をすべて挙げよ.
- (2) 集合 $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 8\}$ に対して $A \subseteq B$ が成り立たないことを証明せよ.

演習問題7

$A = \{5n + 2m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ のとき, $A = \mathbb{Z}$ を証明せよ.

演習問題8.

普遍集合 U , 集合 A, B, C について
 $A \subseteq B$, and $B \subseteq C$, のとき,
 $A \subseteq C$

を証明せよ.

演習問題9.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{2,4,5,6,9\}$$

$$B = \{1,2,3,6,7\}$$

このとき,

(1)和集合 $A \cup B$

(2)積集合 $A \cap B$

(3)補集合 \bar{A}, \bar{B}

(4) $A - B$

を求めよ.

演習問題10.

$U = \{n \mid 1 \leq n \leq 15, n \in \mathbb{Z}\}$ を全体集合とし、部分集合 $A = \{a \mid a \text{は偶数}\}$, $B = \{b \mid b \text{は奇数}\}$, $C = \{c \mid c \text{は4の倍数}\}$ を考える。以下の要素を列挙せよ。

(1) A, B, C

(2) $B \cup C$

(3) $B \cap C$

(4) \bar{A}

(5) $\overline{A \cup C}$

(6) $\bar{B} \cap C$

(7) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

演習問題11. 次の命題の否定形を答えよ。

- (1) 「私の視力は1.0未満であり、かつ握力は50kg以下」ということはない。
- (2) このリンゴは甘いか、または酸っぱくない。
- (3) 「すべての人がiPadを持っている」とは限らない
- (4) 「iPad proを持っていない人がいる」ということはない
- (5) (3)(4)を全称記号 \forall と存在記号 \exists を用いて書け。

演習問題12

普遍集合 $U = \{m \mid 0 \leq m \leq 100, m \in \mathbb{N}\}$
について

$$A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

とするととき、以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B), \\ n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$