ベイズの定理

植野真臣
電気通信大学
情報理工学研究科
情報数理工学プログラム

スケジュール（予定）

4月11日　授業の概要とガイダンス
4月18日　ベイズの定理
4月25日　ベイズの定理はどのように誕生したのか？
5月2日　ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！
5月9日　アランチューリングとベイズ
5月16日　ベイズから機械学習へ
5月23日　確率の基礎の復習
5月30日　ビリーフとベイズ
6月6日　尤度と最尤推定
6月13日　数値計算法による推定
6月20日　ベイズ推定と事前分布
6月27日　マルコフチェーンモンテカルロ(MCMC)法
7月4日　ベイジアンネットワーク
7月11日　ベイジアンネットワークと機械学習
7月25日　テストと総括

授業の目標

論理推論から確率推論へ
ベイズの定理の意味を知る！！
ベイズの定理を使えるようになる。

1. 論理推論

1. 1. 命題(Proposition)

5

1. 1. 命題(Proposition)

Def
命題（Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

- 調布市は東京ではない
- 和田アキ子は男である
- 松本人志はすごい！！
- このレストランのステーキはおいしい！！
- 犬は動物である
- $x^2-1=0$

6

1. 2.真理値

命題の真理値(truth value)は真(T)か偽(F)である。

問　次の命題は真(T)か偽(F)か?

$p : f(x) = x^2 + x - 2$とすると$f(1) = 0$

$q : \forall a, \forall b \in \mathbb{Z}, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$r : \exists a, \exists b, \exists c \in \mathbb{N}, s.t.\, a^3 + b^3 = c^3$

$s : \exists a, \exists b, \exists c \in \mathbb{N}^+, s.t.\, a^3 + b^3 = c^3$

1. 3.　命題演算

1. 論理積 $\wedge$
2. 論理和 $\vee$
3. 否定 $\neg$

1.3.1. 論理積 $\wedge$

命題p, qに対して，pとqを「かつ」という言葉で結び付けて「pかつq」という文を作ると，これも命題になる。この命題をpとqの論理積，連言（れんげん）といい，$p \wedge q$と書く。

真理値表

Def 命題論理の入力のすべてのパターンに対する真理値

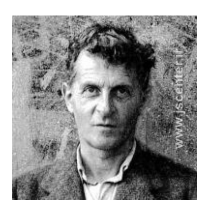
論理積 $\wedge$の真理値表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ウィトゲンシュタイン

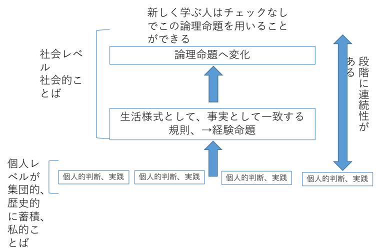
- 真理値表の考案者
- 哲学者　ウィトゲンシュタイン
- **「論理哲学論考」**　1921年
- 真理値表が論理数学のアトム（原子）

- 数学とは人が何度チェックしても同じになるルールのこと
例　２＋２＝４は　人が何度数えても二つと二つを合わせて数えると四つになるというルール



硬化理論（「探究」1953）

ウィトゲンシュタインの死後弟子によって出版



真の知識とは

- 真の知識はアプリオリには存在しない
- 人間社会の中で　社会が承認してきたものを知識と呼んでいる
- 教科書で習う知識は面白くない！！誰が見てもそうだということをまとめてチェックしないでも使えるようにしたに過ぎない！！
- 人は全体のごく一部しか知らないが、社会の他の人と知識を分業して持っており、社会として初めて知識はうまく動く（分散認知）

→　分散コンピューティング、
　　エージェントモデル

14

1. 3.2. 論理和 ∨

命題p, qに対して，pとqを「または」という言葉で結び付けて「pまたはq」という文を作ると，これも命題になる。この命題をpとqの論理和，選言（せんげん）といい，p∨qと書く。

15

論理積∨の真理値表

p	q	$p∨q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

16

1. 3.3. 否定 ¬

- 命題pに対して，「pでない」という文を作ると，これも命題になる。この命題をpの否定といい，$¬p$と書く。
- また，¬と∧，∨が同時に現れる場合には「¬は∧，∨よりも優先度が高い。

17

否定¬の真理値表

p	$¬p$
T	F
F	T

18

1. 3.4. 含意（がんい）

- 「pならばqである」という文を一般に**条件文**という。このとき，命題pを**仮定**，命題qを**結論**と呼び，「$p \rightarrow q$」と書く。
- 論理演算子→を**含意**と呼ぶ。

「含意」の真理値表

「$p \rightarrow q$」：
「仮定p が真のときには結論q も真でなければいけない」

含意の真理値表

「$p \rightarrow q$」：
「仮定p が真のときには結論q も真でなければいけない」
「仮定p が偽のときには結論q は真でも偽でもかまわない」
と解釈する。

例

命題p 「私は車を運転する」ならば
命題q 「私は免許を持っている」
というルールがある。
以下はルールは守られているのか？
- 「私は車を運転するし、　免許を持っている」
- 「私は車を運転するし、　免許を持っていない」
- 「私は車を運転しないが、　免許を持っている」
- 「私は車を運転しないし、　免許を持っていない」

必要条件と十分条件

命題「$p \rightarrow q$」が真のとき，
pをqの「十分条件」と呼び，q をpの「必要条件」と呼ぶ。
「車を運転する」ことは「免許を持っている」ことの十分条件である。　車を運転しているのならば、免許は持っているし、運転しなくても持っている場合がある。「免許を持っている」ことは「車を運転する」の必要条件である。車を運転するためには、絶対に免許を持っていないといけない。

問 $p \rightarrow q$の真理値表を作成せよ

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

問　$\neg p \vee q$の真理値表を作成せよ

p	q	$\neg p \vee q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

25

含意についての重要な知見

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

pが偽か　またはqが真である　！！

26

問　(Waison 1972)

ある工場では、表に文字、裏に数字を印刷したラベルを,
「片方が母音ならば，もう一面は偶数」
という規則に従って製造している。つぎのように４枚のカードの一つの面が見えているとき，製造規則が守られているのかどうかを調べるためには，最低限どのカードを裏返さなければならないか？

E　K　4　7

27

論理推論のまとめ

確かに論理推論は役にたつ！！

問　以下の命題は正しいか？

それは鳥である→ それは飛ぶ

問　以下の命題は正しいか？

それは鳥である→ それは飛ぶ

F (偽)
理由：ペンギンは鳥であるが　飛ばない。

「鳥は飛ぶ」という知識は役に立たないのか？

- ほとんどの鳥は飛ぶのに少数の例外のために「鳥は飛ぶ」という知識が論理推論では全く使えなくなってしまう！！
- 世の中の知識のほとんどは例外があるものが多く、命題としては真とならないものがほとんどで　それらの知識はすべて使えないのか？

2. 確率推論

表現
鳥のX％は　飛ぶ。

→

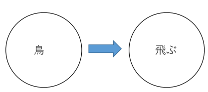
$P(\text{飛ぶ}|\text{鳥})$
$P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥})$

2. 確率推論

表現
鳥のX％は　飛ぶ。

→

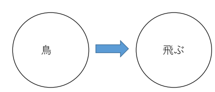
$P(\text{飛ぶ}|\text{鳥})$
$P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥})$



2. 確率推論

$P(\text{飛ぶ}|\text{鳥}) = 0.98$
$P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥}) = 0.01$

「それが鳥」と「それが飛ぶ」が統計的独立でなく、意味的に因果関係があれば以下の「確率的因果」関係が成り立つ。

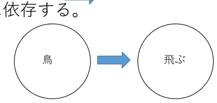


2. 確率推論

$P(\text{飛ぶ}|\text{鳥}) = 0.98$
$P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥}) = 0.01$

「それが鳥」と「それが飛ぶ」が統計的独立でなく、意味的に因果関係があれば以下の「確率的因果」関係が成り立つ。

因果関係の強さ、すなわち → の強さは $P(\text{飛ぶ}|\text{鳥})$ と $P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥})$ の差に依存する。



2. 確率推論

$P(\text{飛ぶ}|\text{鳥}) = 0.98$
$P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥}) = 0.01$

問：　それは鳥である。それは飛ぶか？

2. 確率推論

$$P(\text{飛ぶ}|\text{鳥}) = 0.98$$
$$P(\text{飛ぶ}|\neg\text{鳥}) = 0.01$$

問： それは飛ぶ。それは鳥か？

3 .ベイズの定理を簡単に説明します！！

事象A が起こったときの事象Bの起こる確率を$\mathrm{P}(B|A)$ と書く。
このとき、事象Aと事象Bの起こる同時確率はどのように計算できるか？

ベイズの定理を簡単に説明します！！

事象A が起こったときの事象Bの起こる確率を$\mathrm{P}(B|A)$ と書く。
このとき、事象Aと事象Bの起こる同時確率はどのように計算できるか？

同時確率

事象A が起こったときの事象Bの起こる確率を$P(B|A)$ と書く。
このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？ $P(A, B) = P(B|A)P(A)$

同様に

事象B が起こったときの事象Aの起こる確率を$\mathrm{P}(A|B)$ と書く。
このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$\mathrm{P}(A, B) = \mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A})$$
$$\mathrm{P}(A, B) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

よって

$$\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(A|\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{B})$$

まとめると

$$P(A,B) = P(B|A)P(A)$$
$$P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$
$$P(B|A) = ?$$

まとめると

$$P(A,B) = P(B|A)P(A)$$
$$P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

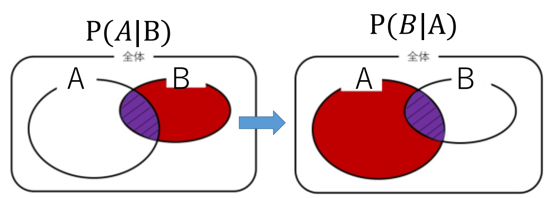
まとめると

$$P(A,B) = P(B|A)P(A)$$
$$P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$
$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)}$$

ベン図で考えると



ベイズの定理

原因　→　結果　が分かっているときに
結果が起こったときの原因の確率を求める
数学の定理

$$P(原因|結果) = \frac{P(原因)P(結果|原因)}{P(結果)}$$
$$= \frac{P(原因)P(結果|原因)}{P(結果|原因)+P(結果|異なる原因)}$$

本授業の主役のベイズの定理

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)}$$

例題 1
がん検診データ
P(陽性|がん)=0.9,P(陽性|¬がん)=0.1,
P(がん)=0.1
についてある人は，がん検診で陽性となった.
この人のがんの確率を求めよ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事後確率

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事後確率　事前確率

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{\boxed{P(C_i)}P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事後確率　事前確率　データの出る確率（尤度）

$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{\boxed{P(C_i)}\boxed{P(X|C_i)}}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ.

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときのC_iの確率

事後確率　事前確率　データの出る確率（尤度）

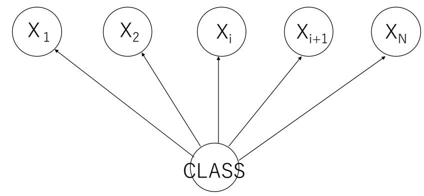
$$\boxed{P(C_i|X)} = \frac{\boxed{P(C_i)}\boxed{P(X|C_i)}}{\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}}$$

C_iについて定数

が成り立つ.

例題 2
メールに「セール」という単語がある(Sと書く)と スパムメール(Spamと書く) であることが多い.
今， P(S | Spam) = 0.8 , P(S |¬Spam) = 0.1 , P(Spam) = 0.1 とする.
メールに「セール」という単語が入っていた. スパムメールである確率を求めてみよう.

Naïve Bayes
G. Graham, “A plan for spam”, (2002)



モデル

$$p(class|x_1,\cdots,x_N) = \frac{p(x_1,\cdots,x_N|class)p(class)}{p(x_1,\cdots,x_N)}$$

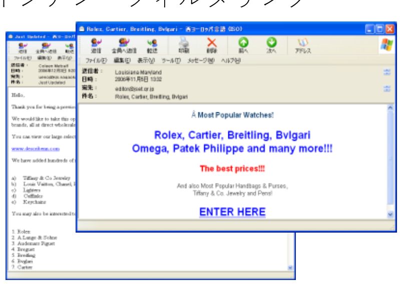
$$\approx \frac{p(class)}{p(x_1,\cdots,x_N)}\prod_{i=1}^{N} p(x_i|class)$$

$p(x_i|class)$ は、classでx_iが出現する文書数

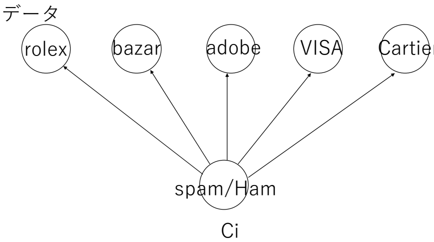
識別関数

$$g_{class} = \log p(class) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid class)$$

例：ベイジアン・フィルタリング



例：ベイジアン・フィルタリング
データ



識別関数の比較判断

$$g_{spam} = \log p(spam) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid spam)$$

$$g_{ham} = \log p(ham) + \sum_{i=1}^{N} \log p(x_i \mid ham)$$

例題3

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象をA,少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象をBとし， $\mathrm{P}(B|A)=1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A)=0.5$, $\mathrm{P}(A)=0.005$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

例題 4

もう一度　少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

$\mathrm{P}(B|A)=1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A)=0.5$, $\mathrm{P}(A)=0.01$とする．

例題 5

この後、少年が20回続けて「オオカミが来た」と叫んだ！！

オオカミが来ている確率を求めてみよう．

$\mathrm{P}(B|A)=1.0$, $\mathrm{P}(B|\neg A)=0.5$, $\mathrm{P}(A)=0.02$とする．

例題6 設定を変えよう

昔，ある村にうそつき少年がいた．少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが，いままで本当だったことがない．「オオカミが来た」という事象をA,少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象をBとし， $\mathrm{P}(B|A)=0.4$, $\mathrm{P}(B|\neg A)=0.5$, $\mathrm{P}(A)=0.01$ とする．少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう．

まとめ

ベイズの定理

データXが得られたときのC_iの確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(X|C_i)}$$