2. 集合の基礎と
全称記号・存在記号

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学プログラム

本授業の構成

第１回　10月 4日：第1回 命題と証明
第２回　10月11日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月18日：第3回 命題論理
第４回　10月25日：第4回 述語論理
第５回　11月 1日：第5回 述語と集合
第６回　11月 8日：第6回 直積と冪集合
第７回　11月15日：第7回 様々な証明法 (1)
第８回　11月29日：第8回 様々な証明法 (2)
第９回　12月 6日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月13日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月20日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　12月27日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、
グラフによる表現
第１３回　1月17日：第13回 同値関係
第１４回　1月24日：第14回 順序関係：半順序集合、
ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　1月31日：第15回 期末試験
対面　教室に集合

１．本日の目標

１．集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が正しく使える
２．全称記号∀,　存在記号∃が使える
３．部分集合と包含関係を理解する
４．集合の演算（和、積、補、差、素，要素数）

２．重要な集合

$\emptyset$ ：
$\mathbb{N}$ ：
$\mathbb{N}^+$ ：
$\mathbb{Z}$ ：
$\mathbb{Q}$ ：
$\mathbb{R}$ ：
$\mathbb{C}$ ：

２．重要な集合

$\emptyset$ ：空集合　（empty set）
（ギリシャ語φとは違う）
$\mathbb{N}$ ：自然数集合　(0を含む)
$\mathbb{N}^+$:自然数集合　(1以上)
$\mathbb{Z}$ ：整数集合
$\mathbb{Q}$：有理数集合
$\mathbb{R}$：実数集合
$\mathbb{C}$ ：複素数集合
要素数が有限の集合を有限集合(finite set),
要素数が無限の集合を無限集合(infinite set）と呼ぶ

普遍集合

Def
議論の対象とする全体集合

例
普遍集合を $\mathbb{N}$ とする
⇒
自然数全体を全体集合とする

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$　　　と書く。

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$　　　と書く。

外延的記法：

内包的記法：

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$　　　と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$　（無限集合）

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$　　　と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$　（無限集合）

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

$A = \{n|\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$

（∩（かつ）を示す場合にはカンマで区切る）

$A = \{n|\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n$は奇数$\}$

例

- $A = \{n|n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$を外延的記法で表せ。

例

- $A = \{n|n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$を外延的記法で表せ。
- $A = \{1,2,3,4,5\}$

例

▶$A=\{2,4\}$を先の例の内包的記法に条件を足して表せ。

13

例

▶$A=\{2,4\}$を先の例の内包的記法に条件を足して表せ。

▶$A=\{n|\ 1\le n\le 5, n\in\mathbb{N},$ nは偶数$\}$

14

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

15

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，　$n\ge 0$が成り立つ」

16

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，　$n\ge 0$が成り立つ」

↓

「$\forall n\in\mathbb{N}, n\ge 0$」

∀：意味：すべての(all, any)　読み方: “for all”

日本語訳：

「$\mathbb{N}$に属するすべてのnについて, $n\ge 0$が成り立つ」

17

例

「すべての実数xについて, $x^2\ge 0$」を全称記号を用いて表せ.

18

例

「すべての実数xについて, $x^2 \geq 0$」を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

19

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

20

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$ となる実数xが存在する」

21

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$ となる実数xが存在する」

↓

「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 7x < 0$ 」

∃：意味：存在する(Exist)　読み方: “there exists”

22

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

23

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

24

6. 部分集合

- Def (定義： Definitionのこと)

対象としているもの全体を普遍集合（全体集合）と呼び，Uと書く．また，要素を一つも持たない集合を空集合といい， $\emptyset$で表す．

- Def

集合Aの要素が集合Bの要素でもあるとき， AはBの部分集合であるといい，

$A \subseteq B$ または $B \supseteq A$

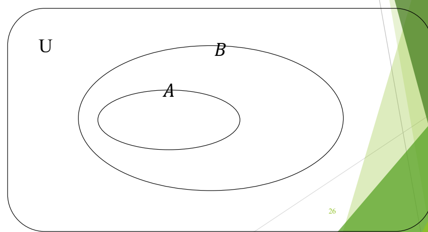
で表す．

部分集合の数学的表現

Def $A \subseteq B \iff \forall x[x \in A \to x \in B]$

→は「ならば」という意味、

xがAに含まれているならば，そのxのすべてはBに含まれる．



注意

- Def $A \subseteq B \iff \forall x[x \in A \to x \in B]$
- この部分集合の定義では， B自身もBの部分集合であることがわかる．

例題 次の命題は正しいか？真偽を証明せよ。

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

---

(1)の解答

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

解答 真

証明

A の要素1,2,3はすべてBの要素で，

$\forall x[x \in A \to x \in B]$

が成り立つ．定義より

$\forall x[x \in A \to x \in B]$ならば$A \subseteq B$

$A = \{1,2,3\}$,$B = \{1,2,3,4\}$ に対して

$\forall x[x \in \{1,2,3\} \to x \in \{1,2,3,4\}]$ が成り立つ．

従って $A \subseteq \mathrm{B}$

■

(2)の解答の方針

(2) $A=\{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$

に対して $A\subseteq$ B

解答　　偽

証明の方針

Aの要素で1はBの要素でない.

$\forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$の否定⇒

$$\exists x\in A[x\notin B]$$

31

(2)の解答

(2) $A=\{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$

に対して $A\subseteq$ B

解答　　偽

証明

Aの要素で1はBの要素でない．従って

$$\exists x\in A[x\notin B]\nLeftrightarrow\forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$$

定義より

「$\forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$が成り立たない」ならば

「$A\subseteq$ Bは成り立たない」

従って、命題は偽　■

32

重要
全称記号∀の否定に存在記号∃が用いられる

$$\neg\forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$$

→「 Aのすべての要素がBの要素である」の否定

→「 Aの要素の中でBの要素でないものがある」

→

$$\exists x\in A[x\notin B]$$

「～ならば　～である」の否定は、反例$\exists x$を一つ示せばよい。

33

同等

Def $A\subseteq B$ and $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$

- AとBは等しいという.

34

同等

Def $A\subseteq B$ and $B\subseteq A\Leftrightarrow A=B$

- AとBは等しいという.

35

例題

$A=\{4n+3\mid n\in\mathbb{Z}\}$,

$B=\{4m-1\mid m\in\mathbb{Z}\}$のとき,

$A=B$を証明せよ.

36

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

37

例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$,
$B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$のとき,
$A = B$を証明せよ.

証明

(1) $A \subseteq B$

$\forall x \in A \Leftrightarrow \forall x\, [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}]$

$\Rightarrow \forall x\, [x = 4(n + 1) - 1, n \in \mathbb{Z}]$, $(n + 1) \in \mathbb{Z}$より $\Rightarrow \forall x\, [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x [x \in B]$ より$\forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$.
従って$A \subseteq B$

38

例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$のとき, $A = B$を証明せよ.

証明

(2)$A \supseteq B$

$\forall x \in B \Leftrightarrow \forall x\, [x = 4m - 1, m \in \mathbb{Z}]$

$\Rightarrow \forall x\, [x = 4(m - 1) + 3, m \in \mathbb{Z}]$, $(m - 1) \in \mathbb{Z}$より $\Rightarrow \forall x\, [x = 4n + 3, n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow$
$\forall x [x \in A]$ より
$\forall x [x \in B \rightarrow x \in A]$. 従って$A \supseteq B$

(1)(2)より$A \subseteq B$ and $A \supseteq B$
が成り立つ. 従って$A = B$ ■

39

真部分集合

- Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$
  AはBの真部分集合であるという.

$\Updownarrow$

Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$
and ?????

40

真部分集合

- Def $A \subseteq B$ and $A \neq B \Leftrightarrow A \subset B$
  AはBの真部分集合であるという.

$\Updownarrow$

Def $A \subset B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$
and $\exists y \in B [y \notin A]$

41

例題

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

42

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$を証明せよ.

証明

①$\forall x[x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}]$　が成り立つ

②$y = -1$について

$y \in \mathbb{Z}$であるが$y \notin \mathbb{N}$

従って

$$\exists y \in \mathbb{Z}[y \notin \mathbb{N}]$$

①②より$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

■

7．集合演算

集合A, Bと普遍集合をUとする.

A, BをUの部分集合として以下の演算を定義する.

(1) 和集合

(2) 積集合

(3) 補集合

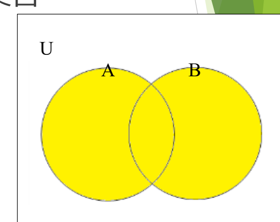
(4) 差

(1) 和集合

$A \cup B = \{x | x \in A, or\ x \in B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，A, Bの和集合とはAとBの要素をすべて併せた集合のこと

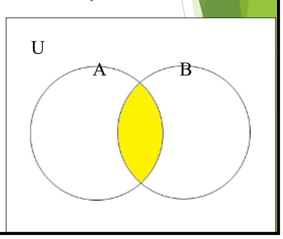


(2) 積集合

$A \cap B = \{x | x \in A, and\ x \in B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，A, Bの積集合とは、AとBの共通要素のみからなる集合のこと

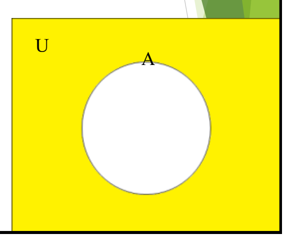


(3) 補集合

$\bar{A} = \{x | x \in U, and\ \ x \notin A\}$

普遍集合をUとし、その部分集合Aを考える.

このとき，Aの補集合とは　UのうちAに含まれない要素の集合のこと



(4)差

$A - B = \{x | x \in A, and \ \ x \notin B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，差$A - B$とは、

AからBの要素を

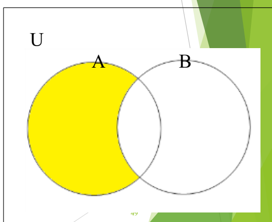
除いた集合のこと

$A - B = A \setminus B$と書く

こともある.

$A - B = A \cap \bar{B}$

と書ける.



(5) 素

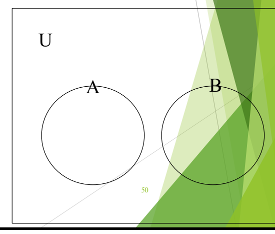
集合A, Bと普遍集合をUとする.

AとBに共通要素がない場合

$A \cap B = \emptyset$

「このときAとBは素である」

という.



8. ド・モルガンの法則を証明せよ

集合A, Bと普遍集合をUとする.

(1)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

ヒント

▶証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

解答(1)

(1)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

証明　$A \cup B = \{x | x \in A, or \ x \in B\}$

$\overline{A \cup B} = \{x | x \in U, and \ \ x \notin A \cup B\}$

$= \{x | x \in U, and \ \ x \notin A, and \ x \notin B\}$

$= \bar{A} \cap \bar{B}$

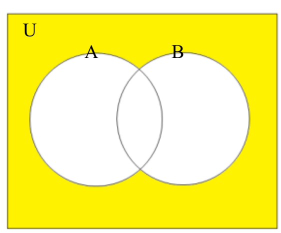
注意

$A \cup B$に含まれないのでそれぞれにも含まれない

■

(1)のイメージ

(1)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



解答(2)

$$(2)\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$

証明

$$A\cap B=\{x|x\in A, and\ x\in B\}$$

$$\overline{A\cap B}=\{x|x\in U, and\ \ x\notin A\cap B\}$$
$$=\{x|x\in U, and\ \ x\notin A, \boxed{or}\ x\notin B\}$$
$$=\bar{A}\cup\bar{B}$$

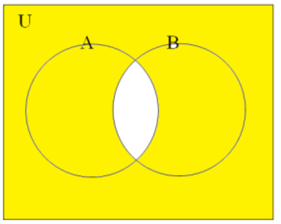
注意

AかつBに含まれないので
Aに含まれないかBに
含まれない

■

(2)のイメージ

$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$$



例

普遍集合$U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,2,4\}$,
$B=\{4,5\}$
このとき,
(1)和集合$A\cup B$
(2)積集合$A\cap B$
(3)補集合$\bar{A}$, $\bar{B}$
(4) $A-B$
(5) $\bar{A}\cap\bar{B}$
を求めよ.

例

普遍集合$U=\{1,2,3,4,5\}, A=\{1,2,4\}$,
$B=\{4,5\}$
このとき,
(1)和集合$A\cup B=\{1,2,4,5\}$
(2)積集合$A\cap B=\{4\}$
(3)補集合$\bar{A}=\{3,5\}$, $\bar{B}=\{1,2,3\}$
(4) $A-B=\{1,2\}$
(5) $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}=\{3\}$

9. 要素の個数

集合Aが有限集合の場合，要素の数を

$n(A)$　や　$|A|$

で表す.

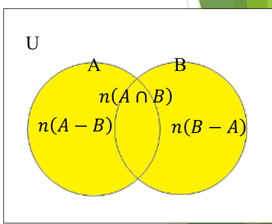
以下を証明せよ。
Th. 1.

Uを有限な普遍集合とする。
集合A, Bについて以下が成り立つ。

$$n(A\cup B)$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Th 1　Uを有限な普遍集合とする。
集合A, Bについて
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

[ヒント]
$n(A \cup B)$
$= n(A - B) + n(B - A)$
$+ n(A \cap B)$



61

Th 1　Uを有限な普遍集合とする。
集合A, Bについて
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

[証明]

$n(A \cup B)$
$= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$
$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$
$+ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

従って
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ■

62

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。
$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$

63

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。
$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$

[証明]
Th 1より，$n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$.
$\bar{A} \cap A = \emptyset$より，
$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$
従って，
$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$ ■

64

例

普遍集合$U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$
について
$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$
とするとき，以下を求めよ。

$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$

65

例

普遍集合$U = \{m | 1 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$
について
$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\},$
とするとき，

$n(A) = 25$
$n(B) = 25$
$n(A \cap B) = 0$
$n(A \cup B) = 50$

66

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$
について
$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$,
とするとき，以下を求めよ。

$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$

67

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$
について
$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$,
とするとき，

$n(A) = 26$
$n(B) = 25$
$n(A \cap B) = 0$
$n(A \cup B) = 51$

68

8．まとめ

1．集合の記述法（外延的記法、内包的記法）
2．全称記号∀、存在記号∃
3．部分集合と包含関係
4．集合の演算（和、積、補、差、素,要素数）

演習問題1．次の集合を外延的記法でかけ。

(1) $A = \{n | \ 1 < n < 10, n \in \mathbb{N}, n$は偶数$\}$
(2) $B = \{4n - 1 \ | n \in \mathbb{N}\}$
(3) $C = \{x \mid x^2 - x - 6 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$
(4) $D = \{x \mid 2x^2 + 9x + 9 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

70

演習問題2．次の集合を内包的記法でかけ。

(1) $A = \{4,8,12,16,20\}$
(2) $B = \{\cdots, -14, -7, 0, 7, 14, \cdots\}$
(3) $C = \{1,8,27,64,125,216\}$
(4) $D = \{0,5,10,15,20, \cdots\}$

71

演習問題3．　次の数について数の集合$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$に属するか属さないかを∈か∉を用いて表現せよ。

(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\sqrt{2}$

(3) -5

(4) $2 - i$

72

演習問題4. 次の数式を日本語で表せ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 0$

(3) $\exists n \in \mathbb{C}, n^2 \in \mathbb{N}$

(4) $\forall x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$

(6) $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq a$

(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, ax + \mathrm{b} = 0$

(8) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\cos x| < \mathrm{a}$

73

演習問題5. 次の日本語を全称記号，存在記号を用いて表せ

(1)実数の中には、有理数ではない数が存在する

(2)すべての実数xについて、$2x^2 - x + 2 > 0$が成り立つ

(3) 0と異なる任意の実数xについて、$\frac{y}{x} = 1$ となる実数yが存在する

(4)任意の整数nに対し$\sin(2\pi n) = 0$が成り立つ

(5)整数の中には，2で割り切れない数が存在する

(6)すべての実数xについて、$2^x > 0$である

(7)任意の実数xに対し、$x^2 + 3x + 2 > a$となる定数aが自然数の中に存在する

(8)任意の整数aに対し、$x^2 + x + 2 > a$となる有理数xが存在する

74

演習問題6.

(1) $A = \{a, b, c, d\}$に対して，Aの部分集合をすべて挙げよ.

(2) 集合$A = \{2,3,5,6\}$，$B = \{2,3,5,7,8\}$に対して $A \subseteq \mathrm{B}$が成り立たないことを証明せよ.

75

演習問題7

$A = \{5n + 2m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$のとき，$A = \mathbb{Z}$を証明せよ.

76

演習問題8.

普遍集合U， 集合A, B, Cについて $A \subseteq B$，and $B \subseteq C$，のとき，

$$A \subseteq C$$

を証明せよ.

77

演習問題9.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$A = \{2,4,5,6,9\}$$
$$B = \{1,2,3,6,7\}$$

このとき，

(1)和集合$A \cup B$

(2)積集合$A \cap B$

(3)補集合$\bar{A}$，$\bar{B}$

(4) $A - B$

を求めよ.

78

演習問題10.

$U=\{n|1\leq n\leq 15, n\in\mathbb{Z}\}$を全体集合とし、部分集合$A=\{a|a$は偶数$\}$, $B=\{b|b$は奇数$\}$, $C=\{c|c$は4の倍数$\}$を考える．以下の要素を列挙せよ．

(1) A, B, C

(2) $B\cup C$

(3) $B\cap C$

(4) $\bar{A}$

(5) $\overline{A\cup C}$

(6) $\bar{B}\cap C$

(7) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

79

演習問題11. 次の命題の否定形を答えよ。

(1) 「私の視力は1.0未満であり、かつ握力は50kg以下」ということはない。

(2) このリンゴは甘いか、または酸っぱくない。

(3) 「すべての人がiPadを持っている」とは限らない

(4) 「iPad proを持っていない人がいる」ということはない

(5) (3)(4)を全称記号∀と存在記号∃を用いて書け。

80

演習問題12

普遍集合$U=\{m|0\leq m\leq 100,\ m\in\mathbb{N}\}$について

$$A=\{3k|k\in\mathbb{N}\},$$
$$B=\{5k|k\in\mathbb{N}\},$$

とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A\cap B), n(A\cup B),$$
$$n(\bar{A}\cap B), n(\bar{A}\cup\bar{B})$$

81