1.　命題と証明

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学プログラム

本授業「離散数学」の大局的目標

数学リテラシーをつけること
誤った論理を見破ったり、うその証明を見抜けること
コンピュータサイエンスにおける基礎を身に付けること

2

具体的目標

- 1 数学における基本的な用語 (命題,述語,集合，論理，写像，関係,グラフ) を 正しく使うことができる
- 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる
- 3 述語,集合，論理，写像，関係,グラフの関係を理解する

3

本授業の進め方

- 講義
  - 授業は主にスライドで進めます.授業スライドは http://www.ai.lab.uec.ac.jp/%E9%9B%A2%E6%95%A3%E6%95%B0%E5%AD%A6/
    にPDFでおいてあります.　ダウンロードして使ってください.
  - 授業終了後　演習問題を

http://ec2-13-230-8-85.ap-northeast-1.compute.amazonaws.com:8080/eTestSystem/
の学習システムに用意しています.ヒントや解答も出ます.その週内に
やってください.

- 成績　期末テスト(100点満点) × 0.8

　　　　+　システム演習問題の得点×0.2

システム演習問題は何度でも受験できますが、１回目のヒントなしでの正答を高い点数になるようにして採点します。もちろん、その後の回答も加点の対象になります。

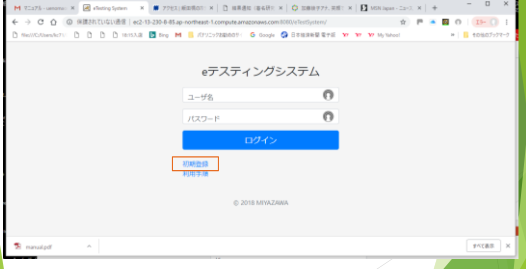
コロナの影響で期末テストが実施不可能な状況になればシステム演習問題の得点のみで成績を付けます。

質問　sugahara あっとai.lab.uec.ac.jp　までメールください.

4

演習システム

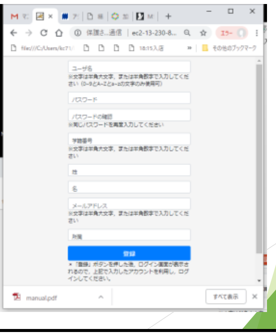
- システムへの登録



5

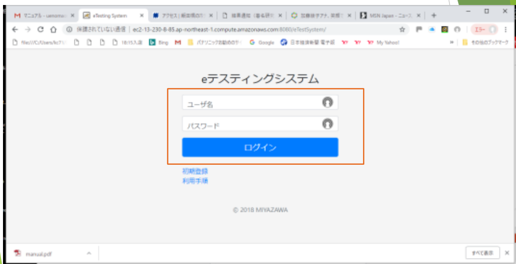
演習システム

- システムへの登録



演習システム

- ログイン：ユーザ名とパスワード入力



7

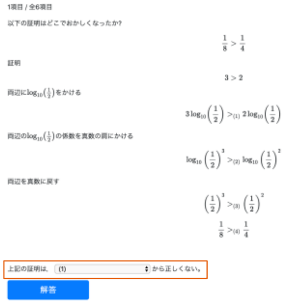
演習システム

- 開始ボタンをクリック

8

演習システム

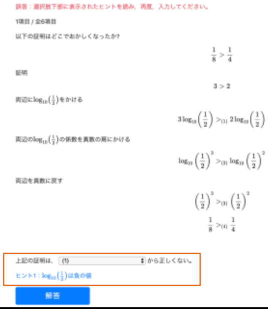
- プルダウンメニューから解答を選択



9

演習システム

- 間違えるとヒントが出ます.ヒントを参考にもう一度解いてください.正答したら次の問題を解いてください.



10

注意

- 授業のあった週に一度は演習を終わらせてください。
- 間違えても構いませんが、他の人の解答を見た場合や何も考えずに回答している場合はシステムが検知します。その回数により減点されます。
- 演習システムは　何度　受けても構いません。
- 学習の態度、時間により　点数を付与します。

11

本授業の構成

第１回　10月 4日：第1回 命題と証明
第２回　10月11日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
第３回　10月18日：第3回 命題論理
第４回　10月25日：第4回 述語論理
第５回　11月 1日：第5回 述語と集合
第６回　11月 8日：第6回 直積と冪集合
第７回　11月15日：第7回 様々な証明法 (1)
第８回　11月29日：第8回 様々な証明法 (2)
第９回　12月 6日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
第１０回　12月13日：第10回 写像 (関数) (1)
第１１回　12月20日：第11回 写像 (関数) (2)
第１２回　12月27日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
第１３回　1月17日：第13回 同値関係
第１４回　1月24日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
第１５回　1月31日：第15回 期末試験
対面　教室に集合

12

教科書：なし.
講義資料を毎回用意する

- 参考書:
- イラストで学ぶ離散数学、伊藤大雄、講談社
- 論理と集合から始める数学の基礎、嘉田　勝、日本評論社
- はじめての離散数学，小倉久和、近代科学社
- 離散数学への招待 :J.マトウシェク/J.ネシェトリル 丸善出版
- やさしく学べる離散数学:石村園子 共立出版株式会社
- コンピュータサイエンスのための離散数学:守屋悦朗 サイエンス社

本日の目標

- 1．本授業のねらい
- 2．離散数学とは何か？
- 3．証明とは何か？
- 4．命題とは何か？
- 5．公理とは何か？

1．証明とは？

- 「証明」は、真理(Truth)を立証するための手法である。

証明の方法は分野によって異なる。

- 法的真理は、法廷で示される証拠と法律、陪審員、裁判官によって決定される。
- 科学的真理は、実験によって確認される。
- 哲学的真理は、厳密な論証の積み重ねによって導かれる。
- 宗教的真理は、歴史的な宗教のコミュニティにより決定される。
- 組織的真理は、権威により決定づけられる。

数学での証明の定義

- Def
- 「証明」とは　基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

注意)

Def = Definition, 定義のこと

三平方の定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

よく知ってます！！

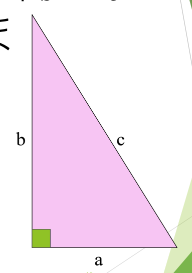


図1．

証明

図１の三角形を図２のように４つ並べる。外側に一辺が $a+b$ の正方形（以下「大正方形」）が、内側に一辺が c の正方形（以下「小正方形」）ができる。
（大正方形の面積）＝（小正方形の面積）＋（直角三角形の面積）×４
大正方形の面積は $(a+b)^2$, 小正方形の面積は c^2, 直角三角形4個の面積の合計は　$ab/2 \times 4=2ab$
これらを代入すると
$(a+b)^2=c^2+2ab$
従って、$a^{2+}b^2=c^2$

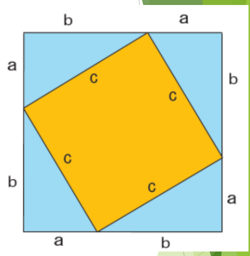
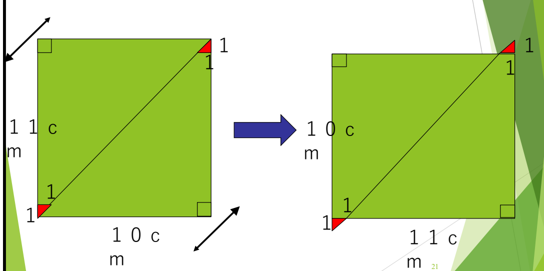


図２

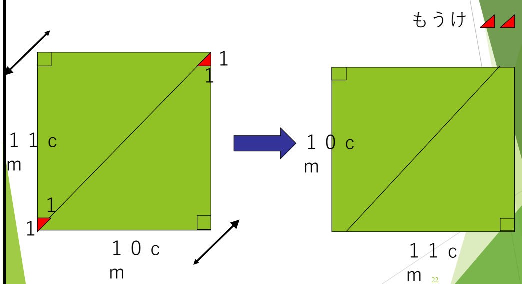
三平方の定理

- 最もよく知られている証明の一つ。
- これ以外にも１００種以上の証明が知られている。

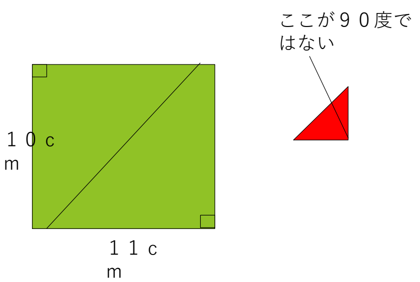
紙を無限に生成しつづける方法



紙を無限に生成しつづける方法



どこが間違い？



定理　　0=1である

$x=0$ とする　　　①
両辺に１を加えて
$x+1=1$
両辺に$x-1$をかけて
$x^2-1=x-1$
両辺に１を加えて
$x^2=x$
両辺をxで割って
$x=1$
①より　　$0=1$　■

定理　1 = − 1 である

- $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$
- $= (\sqrt{-1})^2$
- $= -1$

Bertrand Russell (1872 - 1970)

再掲　：証明の定義

- Def
- 「証明」とは　基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

2．　命題(Proposition)

- Def
- 命題（Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

次の記述は命題か？

- 1 + 1 = 2
- 2 + 3 = 6
- 調布市は東京ではない
- ダウンタウン松本人志はすごい！！
- びっくりした！！
- このレストランのステーキはおいしい！！
- 犬は動物である
- $x^2 - 1 = 0$

3．公理

- Def 公理とは証明された真の命題のこと
- 公理の種類

1. 定理 (Theorem)　非常に重要な命題
2. 補題(Lemma)　重要な命題を証明するために必要な公理の証明
3. 系(corollary) すでに証明されている定理から容易に証明できる命題

4．高校での証明と大学での証明

- 次の命題は偽であることを証明せよ。
- 「すべての実数xについて

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」

嘉田勝　（数学セミナー2009 年5 月号）

高校での解答

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$だから， $2<x<3$のとき，$x^2-5x+6<0$が成り立つ．したがって，「すべての実数xについて
$x^2-5x+6\geq 0$」
は偽である．

■

31

大学では　間違い

「すべての実数について　～が成り立つ」の否定の証明はどのようにすればよいか？

32

大学では　間違い

「すべての実数について　～が成り立つ」の否定の証明はどのようにすればよいか？

↓

「ある実数xについて～が成り立たない」ことを示せばよい．

- ロジカル！！

33

大学での証明

実数$x=\frac{5}{2}$について，$x^2-5x+6=-\frac{1}{4}$　より
$x^2-5x+6\geq 0$ を満たさない実数$x=\frac{5}{2}$が存在する．
したがって，「すべての実数xについて$x^2-5x+6\geq 0$」
は偽である．

■

34

高校生と大学生の差

- 高校生は計算結果をずらずら書けば点数がもらえる。
- 大学生は、本当に命題を証明しないと正解にならない。
- 高校生は自分の思考の順に証明をずらずら書く。
- 大学生は説得するための順序をまず考える。

高校や大学入試での数学で覚えた「自分が考えた過程を書く」という方法を改めて，「読み手を説得するために書く」という姿勢に転換することが重要　嘉田勝　（数学セミナー2009 年5 月号）

35

証明法のパターン（7—8回目）

① 全称命題の証明
② 存在命題の証明
③ 背理法による証明
④ 含意「ならば」型命題の証明
⑤ 場合分けによる証明
⑥ 含意命題の否定の証明
⑦ 集合包含関係の証明
⑧ 複数量化子の命題の証明

36

証明法のパターン（7—8回目）

① 全称命題の証明
② 存在命題の証明
③ 背理法による証明
④ 含意「ならば」型命題の証明
⑤ 場合分けによる証明
⑥ 含意命題の否定の証明
⑦ 集合包含関係の証明
⑧ 複数量化子の命題の証明

このパターンを学べば本当の数学の証明ができるようになります！！

4．本日のまとめ

- 1．本授業のねらい
- 2．離散数学とは何か？
- 3．証明の定義
- 4．命題の定義
- 5．公理

演習問題

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(a)

1/8 > ¼

証明

$$3>2$$
$$3\log_{10}(1/2) > 2\log_{10}(1/2)$$
$$\log_{10}(1/2)^3 > \log_{10}(1/2)^2$$
$$(1/2)^3 > (1/2)^2$$
$$1/8 > 1/4$$

■

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(b) 100￠=1＄である。しかし、以下が成り立つ。

1￠ =1＄

証明

1￠ = 0.01＄ = (0.1＄)^2 = (10￠)^2= 100 ￠ =1＄

■

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(c) aとbは二つの等しい実数である。そうであればa=0である。

証明

$$a = b$$
$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a-b)(a+b) = (a-b)b$$
$$a + b = b$$
$$a = 0$$

■

問題2
算術平均と幾何平均の間には任意の$a,b \geq 0$ について以下の性質がある。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

以下の証明のどこが間違いか？

証明　$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　が成り立つと仮定する.

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$　より

$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$　より

$a^2-2ab+b^2 \geq 0$　より

$(a-b)^2 \geq 0.$

仮定から導かれた$(a-b)^2 \geq 0$は真である.

従って命題は真である.

43

問題3　次のうち命題はどれか？

(1)坂本龍馬は土佐の人であった。

(2)地球外の天体に生命が存在するかもしれない。

(3) $f(x)=x^2+x-2$とすると$f(2)=0$

(4)アインシュタインはかしこい。

(5) $n \geq 3$の整数のとき，$a^n+b^n=c^n$を満たす実数(a,b,c)は存在しない。

(6) $100000 \neq 100001$

(7) $100000 \fallingdotseq 100001$