

ベイズ原理はどうして 生まれたのか？

植野真臣
電気通信大学
情報理工学研究科
情報数理工学プログラム

スケジュール

4月12日	ベイズの人工知能への招待
4月19日	ベイズの定理
4月26日	ベイズはどのように誕生したか？
5月10日	ベイズはコンピュータ、人工知能の父である！！
5月17日	アランチューリングとベイズ
5月24日	ベイズから機械学習へ
5月31日	ベイズ推定ピリフとベイズの定理
6月7日	尤度推定と機械学習
6月14日	尤度推定と機械学習2
6月21日	ベイズ推定と機械学習
6月28日	確率的グラフィカルモデルベジアンネットワーク
7月5日	ベジアンネットワークの推論
7月12日	ベジアンネットワークと他の機械学習モデルとの関係
7月19日	ベイズ分類機
8月16日	テストと総括

授業の目標

ベイズはどうして生まれたのか？

ベイズの定理が生まれた背景を知ることにより、一般的な教科書に載っていないベイズという哲学を知ってほしい。

ベイズの定理を簡単に説明します！！

事象A が起こったときの事象Bの起こる確率を $P(B|A)$ と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる同時確率はどのように計算できるか？

同時確率

事象A が起こったときの事象Bの起こる確率を $P(B|A)$ と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？ $P(A, B) = P(B|A)P(A)$

同様に

事象B が起こったときの事象Aの起こる確率を $P(A|B)$ と書く。

このとき、事象Aと事象Bの起こる確率はどのように計算できるか？

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = ?$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

まとめると

$$P(A, B) = P(B|A)P(A)$$

$$P(A, B) = P(A|B)P(B)$$

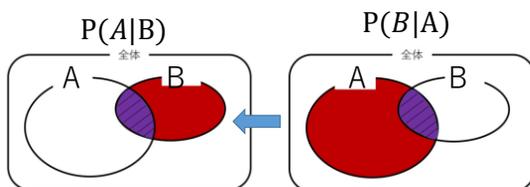
よって

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)}$$

ベン図で考えると



ベイズの定理

原因 → 結果 が分かっているときに
結果が起こったときの原因の確率を求める
数学の定理

$$P(\text{原因}|\text{結果}) = \frac{P(\text{原因})P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果})}$$

$$= \frac{P(\text{原因})P(\text{結果}|\text{原因})}{P(\text{結果}|\text{原因}) + P(\text{結果}|\text{異なる原因})}$$

本授業の主役のベイズの定理

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\neg B)P(\neg B)}$$

例題 1

がん検診データ

$$P(\text{陽性}|\text{がん})=0.9, P(\text{陽性}|\neg\text{がん})=0.1, \\ P(\text{がん})=0.1$$

についてある人は、がん検診で陽性となった。
この人のがんの確率を求めよ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データ X が得られたときの C_i の確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データ X が得られたときの C_i の確率

$$\text{事後確率} \\ P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データ X が得られたときの C_i の確率

$$\text{事後確率} \\ P(C_i|X) = \frac{\text{事前確率} \\ P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データ X が得られたときの C_i の確率

$$\text{事後確率} \\ P(C_i|X) = \frac{\text{事前 データの出る} \\ \text{確率 確率 (尤度)} \\ P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

が成り立つ。

ベイズの定理(一般化された記述)

データXが得られたときの C_i の確率

$$P(C_i|X) = \frac{P(C_i)P(X|C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(X|C_i)}$$

事後確率 事前確率 データの出る
確率 確率 (尤度)
 C_i について定数

が成り立つ。

例題 2

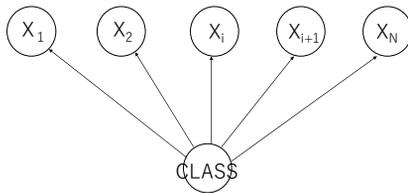
メールに「セール」という単語がある(Sと書く)とスパムメール(Spamと書く)であることが多い。

今、 $P(S | \text{Spam}) = 0.8$, $P(S | \neg\text{Spam}) = 0.1$, $P(\text{Spam}) = 0.1$ とする。

メールに「セール」という単語が入っていた。スパムメールである確率を求めてみよう。

Naïve Bayes

G. Graham, "A plan for spam", (2002)



モデル

$$p(\text{class}|x_1, \dots, x_N) = \frac{p(x_1, \dots, x_N|\text{class})p(\text{class})}{p(x_1, \dots, x_N)}$$

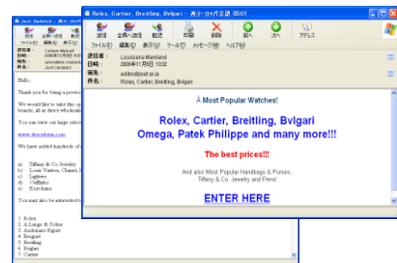
$$\approx \frac{p(\text{class})}{p(x_1, \dots, x_N)} \prod_{i=1}^N p(x_i|\text{class})$$

$p(x_i|\text{class})$ は、classで x_i が出現する文書数

識別関数

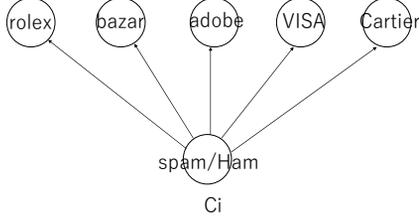
$$g_{\text{class}} = \log p(\text{class}) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | \text{class})$$

例：ベイジアン・フィルタリング



例：ベイジアン・フィルタリング

データ



識別関数の比較判断

$$g_{spam} = \log p(spam) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | spam)$$

$$g_{ham} = \log p(ham) + \sum_{i=1}^N \log p(x_i | ham)$$

例題3

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を A 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を B とし、 $P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.005$ とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

例題4

もう一度 少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.01$ とする。

例題5

この後、少年が20回続けて「オオカミが来た」と叫んだ！！

オオカミが来ている確率を求めてみよう。

$P(B|A) = 1.0$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.02$ とする。

例題6 設定を変えよう

昔、ある村にうそつき少年がいた。少年はいつも「オオカミが来た！！」と大声で叫んでいたが、いままで本当だったことがない。「オオカミが来た」という事象を A 、少年が「オオカミが来た！！」と叫ぶ事象を B とし、 $P(B|A) = 0.4$, $P(B|\neg A) = 0.5$, $P(A) = 0.01$ とする。少年が「オオカミが来た！！」と叫んだとき実際にオオカミが来ている確率を求めてみよう。

トーマス ベイズ



•1702-1761 ロンドン

ベイズはなぜベイズの定理を生み出したのか？

1748年 哲学者デビッド・ヒューム
人間知性研究を出版

イエスの復活を見たという人々の主張が不正確である確率は、それがそもそも起きた確率よりも遥かに大きいと主張

牧師ベイズ怒る

ヒュームが間違っていることを完全に証明しようと、ベイズは出来事の発生確率の定量化を試みる。

ベイズのアイデア

キリストの復活に関する様々な証言は、ヒュームが主張したような形でその出来事の信憑性を無にすることはできない、と考えた。ベイズの結果は、たとえ弱いあいまいな証拠であっても積み重ねれば、あり得ないような出来事の低い確率を覆すことができ、それを事実として確立することができる！！

ベイズは以下の定理を発見した。

- 客観的なデータから自分の信念を変える手法
- 事前確率：データのない確率、尤度：データの起こる確率
- 事後確率：データによって更新された確率
- 事後確率 \propto 事前確率 \times 尤度
- 世界最初のオンライン学習（逐次学習）

数学者からは不人気！！

- 主観を扱っている！！
- 事前の確率が分からない場合は、すべての可能性を等確率にする。

→

無知を確率で計量化しており、おかしい！！
さらに、数学的記述が不正確なものであった！！

プライス牧師

1767年にベイズの友人だったプライス牧師は「キリスト教の重要性、その証拠、およびそれに対し申し立てられた異議」を出版し、ベイズの考えを用いてヒュームの主張に挑戦した。

プライス牧師

統計学者スティーブン・スティグラーは、「基本的な確率論的な論点は、ヒュームは奇跡を目撃したという独立した証言が数多くあることの重要性を過小評価したが、ベイズの結果は、たとえ危うい証拠であっても積み重ねれば、あり得ないような出来事の低い確率を覆すことができ、それを事実として確立することができる、という手法を示した」と言う。

プライスにより、ベイズの考え方は世に出た！！

この時点では、まだ数学的に厳密な記述はなかった。

ピエールシモン ラプラス

1749-1827

フランス 数学者、物理学者

ベイズの定理の発見

ベイズの論文から10年がたったころ、天文学の観測でなぜデータがばらつくのかの原因を推定しようとする。25歳のラプラスは以下のベイズの定理によく似た定理を導く。彼自身は、原因確率の定理と呼んでいた。

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)}$$

ラプラス、ベイズを知る！！

1781年に、プライスがパリを訪れて、ベイズの話講演した。

その講演を聞いたラプラスは感動し、自分の作った原因確率の定理に、解釈を与え、さらに事前確率を等確率にする制約を組み込んだ。

1814年、現在の定理を導く

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

地球科学、気圧変動の推定に用いる。
ラプラスはナポレオンにかわいがられ、内務大臣も務めた。

ラプラス批判

ラプラスの死後、フランス革命が起き、多くの学者たちはラプラス批判を繰り返した。ドモルガンは、ラプラスは人の論文を盗用している、と書いている。この噂はそれから150年間信じられてきた。ジョン スチュアートミルやマリはラプラスは政治家に媚びへつらい、民衆から搾取してきたと書いている。数学的理論への批判というより、フランス革命による王族への反抗であり、それに巻き込まれた形になってしまったのである。

頻度主義の台頭

数学者ポアソン、統計学者 カール ピアソンは、ラプラスの手法は 誤用 とても正しい手法ではないと批判している。特に 事前確率や主観確率について強く批判している。ベイズの定理は絶対に用いてはいけないもので葬り去るものであると統計学の世界では信じられてしまった。

特に統計学を開いたカールピアソンとロナルドフィッシャーはベイズを忌まわしいものと信じ切っており、それを用いる人は統計学者ではないと断言していた。

頻度論の哲学

理論的に何度でも繰り返せる出来事だけを統計の対象とし、サンプルだけが唯一の情報源で、新たに得られたデータは、それぞれ別の問題とみるべきであると考えていた。また、統計的に判断ができるだけの十分なデータ数があればよいが、そうでないのであればそのデータはすべて廃棄すべきであると考えていた。

ロナルド フィッシャー

1890-1962

イギリス、ケンブリッジ大学

検定、分散分析、最尤法など現在 統計学の礎を築く。大のベイズ嫌いで、ベイズの普及を遅らせた張本人。ベイズの定理は誤りであると強く主張。

簡単に検定を説明しましょう！！

検定

薬Dは血糖値を下げるのに有効かどうかをどうやって確かめるか？

検定

薬Dは血糖値を下げるのに有効かどうかをどうやって確かめるか？
患者からランダムに二つのグループA,Bを作り、Aには薬Dを投与し、Bには何もしない。実験の最初と最後に血糖値を測定し、各グループの患者の血糖値の差の平均を求めて2グループで比較すればよい。Aの平均値のほうがBより優位に大きければ良い。

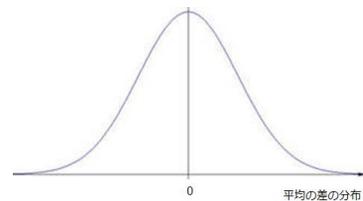
仮説

- 帰無仮説：棄却されることを期待して立てる仮説「2グループの平均に差がない」
- 対立仮説：示したい仮説「2グループの平均に差がある」

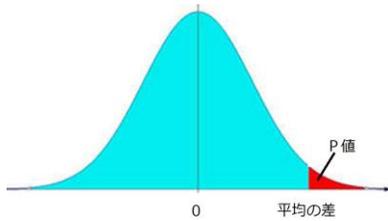
統計的検定では

帰無仮説を元に理論を作ります！！

2グループが同一正規母集団から発生しているときの差異の分布



誤り確率をP値



検定とは

有意水準 $\alpha=0.05$ などを設定し、Pが α 以下のときに仮説が棄却され、有意差があったと判定できる。

ハロルド ジェフリーズ

1891-1989

ケンブリッジ大学の地球物理学者、ベイズ統計学者、非常に穏やかな人格者
フィッシャーと私生活では仲良いベイズ統計学者、
ジェフリーズは尤度を事前確率が一様分布のベイズの一つと考えていたため

ジェフリーズの頻度論批判

フィッシャーが導入した 有意水準、またはP値について大きな疑問があった。帰無仮説に従ってモデルをつくり、データがそのモデルに当てはまる確率がP値である。棄却したいのでP値が小さいと棄却できる。

ジェフリーズの頻度論批判

なぜ、実際に起きていない結果をよりどころに、仮説が棄却されて、捨て去らねばならないのだろうか？一つの実験を何度もランダムに繰り返すというが、そんなことはできない。特定の地震を繰り返すことは無理じゃないか？頻度論学者は、データを仮説を棄却するためにのみ用いて、仮説の正しさを証明するためには用いることができない。ベイズでは、データに基づいた仮説の事後確率を直接計算することができるのに。

ベイズ V.S. 統計検定

- H 仮説、 $\neg H$ 帰無仮説 (棄却したい仮説)
- X データ
- ベイズ的考え方

$$P(H|X) = \frac{P(X|H)P(H)}{P(X|H)P(H) + P(X|\neg H)P(\neg H)}$$

- 統計的検定の考え方

$P(X|\neg H)$ がある値より小さいと $P(H|X)$ が大きいと考える (根拠薄い)

学問上の対立

王立統計協会のジャーナルで二人のやり取りが何度も掲載されたが、大衆にはフィッシャーが受け入れられた。そもそもジェフリーズは温和で人を攻撃しないが、フィッシャーはその逆でわかりやすい。また、フィッシャーの手法は数式が少ないが、ジェフリーズの手法は複雑で難しい。さらにジェフリーズは話すのが不得意で、ジェフリーズが正しいときも、他の人には負けているように見えたといわれている。

ベイズ統計の没落

1939年 フィッシャーらの活躍で、ベイズは事実上 統計学の中で、タブーになる

軍隊で生き続けたベイズの定理

ラプラス以降、フランス軍は、敵の位置や空気の密度や風の方向、大砲の誤差や初速などの多くの情報を入力して、照準の決め方をベイズの定理により推定した表を学ばせていた。第一次世界大戦中は、弾薬の品質管理にベイズの定理を用いていた。第二次世界大戦中にも続けられ、オペレーションズ リサーチと呼ばれるようになった。

第二次世界大戦で大活躍

第二次世界大戦中ドイツ軍のUボートが大きな戦果をあげ、そのための暗号 エニグマを解読することが連合国の共通の目標となる。

英国首相 チャーチルからの指令でエニグマを解くための数学者が集められる

ケンブリッジのあの人も

反ベイズの旗手ロナルド フィッシャーも手を挙げたが、ドイツの学者たちと親しい関係にあり、却下された。

選ばれたのは

- アラン チューリング
- 1912- 1954
- ケンブリッジ大学
- 数学者

BOMBE (世界で最初のコンピュータ)

- ベイズを用いて暗号の原文を確率的に推定する機械を開発する
- ばらばらに入ってくるデータを逐次的に処理するオンライン学習機

アメリカからの支援

- 連合軍から、アメリカの研究者が協力者に加わった。

クロード シヤノン

- 1916-2001
- 米国 ベル研究所
- 情報理論の創始者
- 伝達情報量、相互情報量はベイズの事前分布の情報量と事後分布の情報量の差異のこと。すなわち、データを得ることによってどれほど情報を得ることができるかということを示している。

暗号理論

- ベイズ復号機には、情報の正しさを評価するために、事後確率と事前確率の比に対数をとったベイズファクターが用いられるようになった。
- シヤノンも 第二次世界大戦のプロジェクトのためにベイズ理論を多用している。

Uボートの壊滅

- チューリングのベイズ復号機により、暗号解読に成功。
- ベイズの考えたボールの探索方式により、潜水艦の場所の特定に成功
- ドイツの潜水艦Uボートは壊滅状態に

1945年 ベイズにドイツ敗戦

ドイツ軍は、連合軍でのベイズ研究により、見事 敗戦。
しかし、その後ベイズは軍事機密として、まだ学問界には君臨できなくなる。

Uボート壊滅とドイツの敗戦の後

- 1952年、無名の救国の英雄チューリングは、同性愛者であることが見つかかり、英国に逮捕され、強制的に女性ホルモンを打たれた。（当時は同性愛）
- その2年後、1954年、チューリングは青酸カリをリンゴに塗り、自殺。

再評価

1. 1966年から、コンピュータ科学者らによる国際的学会のACMは、同学会の守備範囲であるコンピュータ科学を中心とした分野の最高の賞として、チューリング賞を授与している。物理や化学といったようなかなり広い分野の最高の賞、という位置づけにあるものとして、コンピュータ科学分野におけるノーベル賞に相当する。
2. 2013年12月24日にエリザベル女王の名をもって正式に恩赦が発行され、キャメロン首相は、彼の業績をたたえる声明を発表した。

チューリング

6月の第1週には毎年花粉症に悩まされるので、彼は花粉を吸わないようガスマスクをして自転車でオフィスに通っていた。自転車は故障していて、定期的にチェーンが外れていた。それを修理してもらう代わりに、ペダルをこいだ回数を数えて、危なくなると一旦降りてチェーンを調整していた。

マグカップが盗まれるのを防ぐために、それをラジエータパイプに鎖で繋いでいた。

第二次世界大戦に大貢献のベイズ理論

その後、どうなった？

第二次世界大戦に大貢献のベイズ理論

ドイツが降伏した数日後、チャーチルは暗号解読に関する極秘資料、文章、あらゆる証拠を消去せよと命じる。関係者には、この事実が超機密事項として伝えられた。

実は、この後もベイズを用いて、ソビエトの暗号を解読していたので、その手法が他国にばれることは戦略的にまずかったのである。

世界最初の汎用コンピュータ

(米) 1946年、ENIAC (弾道計算) 0 進数の使用が可能でプログラミングが可能

チューリングは死んだ。しかし

Irving John ("I. J."; "Jack") Good

1916~2009

戦後Virginia Techのベイズ統計学者

900本のベイズ統計の論文を書く

世界最初の機械がオンラインで手法をベイズオンライン学習する機械学習の論文を執筆（チューリングとの仕事の延長）

チューリングは死んだ。しかし

Irving John ("I. J."; "Jack") Good

1916~2009

ケンブリッジ大学で数学の学位所得後にMI5の無線通信研究所に配属

Bigramを発明、チューリングとベイズ研究に没頭

戦後 ベイズ統計学者 **Virginia Tech** 教授

900本のベイズ統計の論文を書く

世界最初の機械がオンラインで手法をベイズオンライン学習する機械学習の論文を執筆（チューリングとの仕事の延長）

レオナード・ジミー・サヴェッジ

1917 -1971

シカゴ大学、コロンビア大学

主観確率の数学理論の構築

「アメリカが5年以内に戦争する確率」

「核兵器が使用される確率」

「ギャンブルの意思決定」

デニス・V・リンドレー

1923- 2013

ケンブリッジ大学

現代ベイズ理論の数学的体系化を行う

ベイズ統計における重要な数学的発見

英国のベイズ派普及のキーマン

保険業界

- 統計学を学んできたアーサー L. ベイリーは、保険数理士となった。彼はドライバーの年齢、性別、事故履歴や飲酒歴などをエビデンスとして、事故確率をベイズ推定し、適正な保険料を予測するシステムを確立した。事故率は事前分布がないと正しく、推定できないことがわかった。
- これはアメリカの保険業界に革新をもたらす。保険分野ではベイズが主流になる。

物理学（統計物理）

エンリコ フェルミ は ベイズにより物理モデルを発表（ノーベル賞受賞）

統計物理の元祖：逆温度によるボルツマン分布

妻のラウラ・カポーネはユダヤ人でムッソリーニの弾圧から逃げてノーベル賞受賞と同時にアメリカに移住

物理学（量子力学）

リチャード ファインマン（ノーベル賞学者）

量子力学、量子ベイズ主義

量子コンピュータの理論原理

医学

•ジェローム・コーンフィールドにより、肺がんの原因をベイズで推定し、遺伝ではなく喫煙がその原因であることを証明した。

ロジスティック回帰分析の提唱者

また、彼はコレステロールが心臓病の原因になることをベイズで示した。

•タバコ会社のコンサルタントをしていたフィッシャーは、このタバコが癌の原因であるという結果を厳しく批判。

科学と主観主義

•「事前の意見が科学者によって違ってよいとなるとデータ解析の科学的客観性はいったいどうなるのか。」

•サヴェッジ

「データや証拠が集まってくると科学者たちの意見が一致してくるのと同様に、データが乏しいときには主観主義者でありつづけるが、データが多くなってくると、結果は客観的に一つに収束してくる、そして客観主義者になる。科学はまさにそうやって行われる。」

意思決定理論

•ライフアとシュレイファー

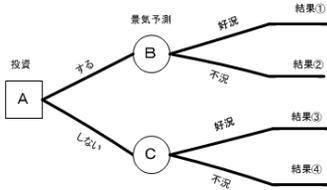
•ベイズ意思決定理論

•期待効用最大化 $\sum P(X_i)P(U_i)$

•デシジョンツリーの開発

•経済学や経営学の分野で大ブレーク

デシジョンツリー



●意思決定ノード：意思決定者がコントロールできる行動で、「□」で表わす。

●イベントノード：意思決定者がコントロールできない事象で「○」で表わす。

●結果ノード=リンク先で表す

●結果ノード：結果価値を得る最終点開いたリンクで表わす。

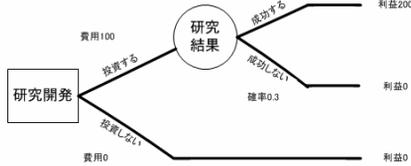
例題

•研究投資には100億円が必要

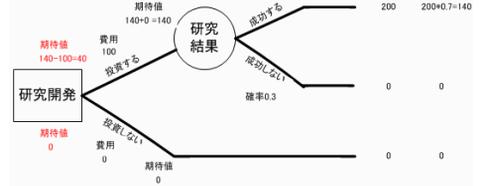
•研究が成功すると利益が200億円見込める

•研究が成功する割合は70%である

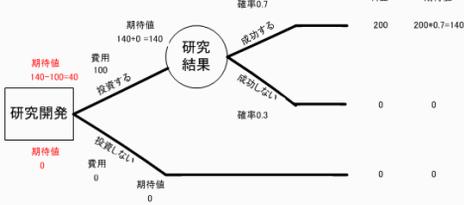
- 研究投資には100億円が必要
- 研究が成功すると利益が200億円見込める
- 研究が成功する割合は70%である



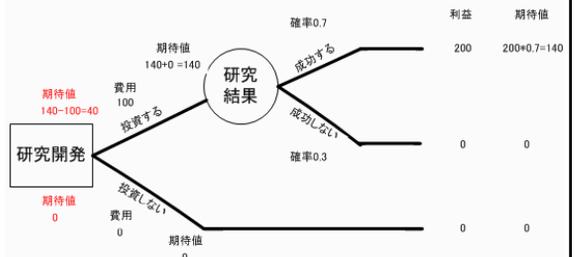
- 研究投資には100億円が必要
- 研究が成功すると利益が200億円見込める
- 研究が成功する割合は70%である



- 研究投資には100億円が必要
- 研究が成功すると利益が200億円見込める
- 研究が成功する割合は70%である



結論:投資したほうが40億円期待値が高いので投資せよ。



選挙の出口調査

1960年にジョン・テューキーが選挙の出口調査での得票確率をベイズを用いて推論する手法を開発

事前分布に加え、性別や年齢などの補助情報も加えるので驚くべき、精度で予測できることがわかり、一般的な手法となる。

原発事故の確率

- ハロルド・ルイスが1974年に原発事故の起こる確率をベイズ推定。高い確率で事故が起こると予測していた。
- 頻度派が大きく、この結果に反対する。
- 1979年にスリーマイル島の原発事故が起こる。

ベイズ的手法の波及

『日本の原発事故率が7倍（500年に1回(54基なら10年に1回)に改定』

原発保険料7倍に…1か所、年2億4000万円。

政府は20日の閣議で、原子力発電所の事故による損害賠償に備え、電力会社に義務づけている保険契約について、4月1日から電力会社が負担する保険料を約7倍に引き上げることを決めた。

1980年以降コンピュータの普及

- 頻度派の統計学は 紙と鉛筆で計算できるように考えられてきた。

ベイズは複雑な数理であるが、コンピュータの普及に伴い、実現化してくる。

スペースシャトルの事故確率

- 1983年にアメリカ空軍が契約した統計分析会社 テレデザイン社がベイズにより、スペースシャトル チャレンジャーの事故の確率を推定したところ、頻度派のコンサルタントが出した結果 10万分の1とは異なり、1/35と推定。
- 頻度派はベイズの結果に大きく反対する。
- 1986年チャレンジャーは25回目の打ち上げで大爆発を起こす

ディーゼルエンジンが肺がん に与える影響分析

- 1983年デュムシェルは、ディーゼルエンジンの肺がんへの影響は無視できることを証明。

Donald B Rubin

- Rubin Causal Model (傾向スコア)
- Rubin(1974) "Estimating Causal Effects of Treatments in Randomized and Nonrandomized Studies". *J. Educational. Psychology*, **66** (5): 688-701
- Missing Data Theory
- EM algorithm
- MCMC法
- ABC分析

ベイズ画像解析

- 1985年
- スチュアート ジーマンとドナルド ジーマン が画像解析のためにMCMC法（マルコフチェーンモンテカルロ法）によるギブスサンプリングアルゴリズムを開発。

経済学

- ゲーム理論のベイズ学者 ナッシュがベイズ・ナッシュ均衡で1994年ノーベル賞 ベイジアンゲームと呼ばれる。
- ハリーマーコウィッツ 2002年にベイズ理論経済学でノーベル賞
- カーネマンとトベルスキー 実際の人間
の意思決定理論ではベイズを少し崩さないといけないことを発見 2002年にノーベル賞

1990年

- デヴィッド ヘッカーマン
- スタンフォード大学 医学部終了後、マイクロソフト社へ
- ベイジアンネットワークの教祖
- ジュディア パールは命名したこととベイジアンネットワークの前の確率木の開発者

MS商品

- 手書き文字認証
- お勧めシステム
- HELPの対応システム
- スпамメール駆除
- 売り上げ予想システム
- 交通渋滞の予想システム
- ペーパークリップのキャラクター クリッピー

グーグル

- 検索エンジンにベイズ
- スпамメールなどの処理に ナイーブベイズ

推薦システム

- ネットフリックスが主催した10億円のコンテストで2009年にAT&T社のベイジアンネットワークによる推薦システムが優勝
- 機械学習 トップカンファレンス UAI が開催した予測コンテストで2010年 UCLAグループのベイジアンネットワークが優勝

自然言語処理

- マーサーとブラウン
- 1998年 IBMベイズによる機械翻訳システム
- 2005年 グーグル ベイズ機械翻訳システムが世界機械翻訳コンテストで優勝
- 現在、グーグルは25言語でベイズ翻訳システムを実用化

アダプティブ ラーニング

ACT*の開発者であるカーネギーメロン大学の人工知能学者アンダーソンのグループは、ベイジアンネットワークで学習者の行き詰まりを同定し、適正な問題を選択し、適正なヒントを提示するシステムを1990年代に提案している。その後、商品化され、現在ではKnewton社が多くのシステムを開発し販売している。2016年より日本にも進出してくる。

<http://wired.jp/2013/04/27/adaptive-learning/>

- **一人ひとりにあった学習を実現！ 教育業界の新潮流「アダプティヴラーニング」**
- 個人個人に最適化された学習内容の自動提供を実現する「アダプティヴラーニング」。ビッグデータを用いたその仕組みによって、これから教育分野でGoogleに匹敵する企業が誕生する可能性もあると期待されている。その注目の動向を紹介しよう。

まとめ

1. ベイズは、牧師がキリストの復活を証明しようとしたことに始まり、数学的にラプラスが提案した。
2. 事前分布、主観確率のために統計学の分野では長く毛嫌いされてきた。
3. 世界最初のコンピュータはチューリングのベイズ機械学習。
4. オペレーションリサーチ、情報理論、統計物理、意思決定理論、ゲーム理論などの分野につながる
5. 1980年代にジーマン兄弟のIEEE論文、MCMCにより一機にベイズが普及
6. 1990年以降ベイジアンネットワークが出現