11.写像（関数） (2)

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

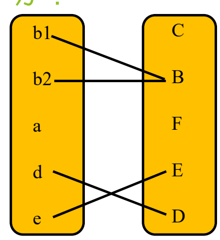
本授業の構成

11月 2日：第1回 命題と証明
11月9日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
11月16日：第3回 命題論理
11月30日：第4回 述語論理
12月7日：第5回 述語と集合
12月14日：第6回 直積と冪集合
12月 21日：第7回 様々な証明法 (1)
1月 4日：第8回 様々な証明法 (2)
1月18日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
1月25日：第10回 写像（関数） (1)
2月 1日：第11回 写像 (関数) (2)
オンデマンド：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
オンデマンド：第13回 同値関係
オンデマンド：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界

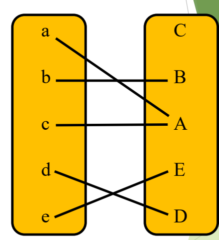
１．本日の目標

① 像と原像
② 逆像
③ 写像の合成
④ 逆写像

復習　以下はどのような写像か？

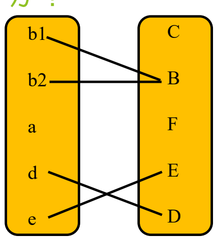


？？？？？

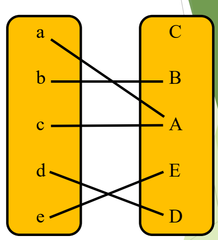


？？？？？

復習　以下はどのような写像か？

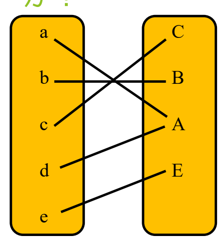


部分写像

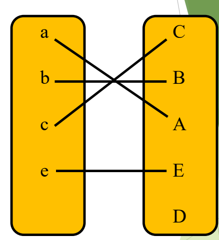


写像（関数）
⊆部分写像

復習　以下はどのような写像か？

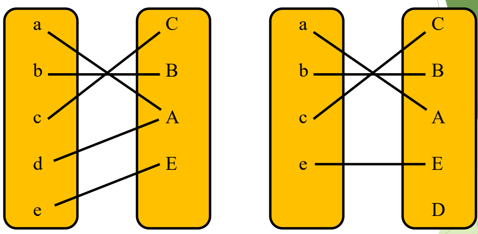


？？？？？



？？？？？

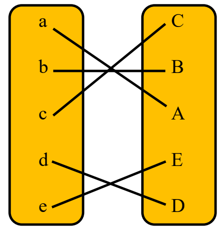
復習　以下はどのような写像か？



全射⊆写像⊆部分写像

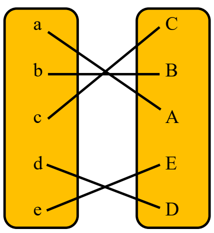
単射⊆写像⊆部分写像

復習　以下はどのような写像か？



？？？？？

復習　以下はどのような写像か？



全単射(⊆ 全射または ⊆単射)⊆写像⊆部分写像

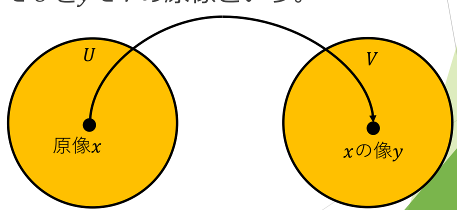
１．　像と原像

Def 1.

$f: U \mapsto V; f(x)$について

$y = f(x) \in V$を$x \in U$の像,

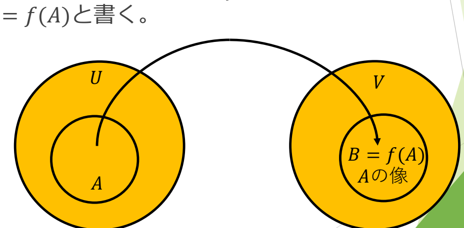
$x \in U$を$y \in V$の原像という。



１．　像と原像

像の概念を部分集合に拡張：

$f: U \mapsto V; f(x)$について 部分集合$A \subseteq U$, $B \subseteq V$を考える。 Vの要素のうち, Aの要素のfによる値になっているものを集めて、写像fによる集合Aの像という。 $B = f(A)$と書く。



１．　像と原像

数学的に定義しよう。

内包的記述を用いると

Def 2.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$,　$A \subseteq U$, $B \subseteq V$について

$$B = f(A) = \{y | ??????????\}$$

をAの像という。

1． 像と原像

数学的に定義しよう。

内包的記述を用いると

Def 2.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$，　$A \subseteq U, B \subseteq V$について

$$B = f(A) = \{y | \exists x \in A[f(x) = y]\}$$

をAの像という。

13

1． 像と原像

数学的に定義しよう。

もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$，　$A \subseteq U, B \subseteq V$について

$$B = f(A) = \{？？？？？\}$$

をAの像という。

14

1． 像と原像

数学的に定義しよう。

もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$，　$A \subseteq U, B \subseteq V$について

$$B = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

をAの像という。

15

例題１．

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ のfの値域を像を用いて示せ。

16

例題１．

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ のfの値域を像を用いて示せ。

正答

$$\mathrm{ran}(f) = f(U)$$

17

例題２．

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ についてfはUからVへの全射であるときの必要十分条件は

$$f(U) = ????$$

18

例題２.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ についてfはUからVへの全射であるときの必要十分条件は

正答

$$f(U) = V$$

例題３

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$ $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。
このとき,

(1) fの値域を求めよ。

(2) $\{1,2,3\}$の像$f[(1,2,3)]$を求めよ。

(3) $\{1,3,5\}$の像$f[(1,3,5)]$を求めよ。

例題３

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$ $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。
このとき,

(1) fの値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$

(2) $\{1,2,3\}$の像$f[(1,2,3)]$を求めよ。

(3) $\{1,3,5\}$の像$f[(1,3,5)]$を求めよ。

例題３

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$ $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。
このとき,

(1) fの値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$

(2) $\{1,2,3\}$の像$f[(1,2,3)]$を求めよ。
$\{2,5\}$

(3) $\{1,3,5\}$の像$f[(1,3,5)]$を求めよ。

例題３

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$ $f(4) = 5, f(5) = 1$ とする。
このとき,

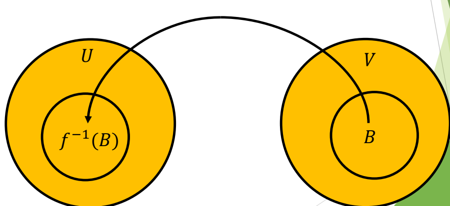
(1) fの値域を求めよ。 $\{1,2,5\}$

(2) $\{1,2,3\}$の像$f[(1,2,3)]$を求めよ。
$\{2,5\}$

(3) $\{1,3,5\}$の像$f[(1,3,5)]$を求めよ。
$\{1,2,5\}$

２．逆像

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について
Uの要素のうちfによる値がBに属する要素を集めてできる集合を，写像fによるBの逆像といい、$f^{-1}(B)$と書く。



2．逆像

Def 3

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について，
以下の集合$f^{-1}(B)$を写像fによる
Bの逆像とよぶ。

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\} \quad .$$

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について
$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。
このとき，

(1) $\{1\}$の逆像$f^{-1}[\{1\}]$を求めよ。

(2) $\{2,5\}$の像$f^{-1}[\{2,5\}]$を求めよ。

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について
$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。
このとき，

(1) $\{1\}$の逆像$f^{-1}[\{1\}]$を求めよ。{5}

(2) $\{2,5\}$の像$f^{-1}[\{2,5\}]$を求めよ。

例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \mapsto U; f(x)$ について
$f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$
とする。
このとき，

(1) $\{1\}$の逆像$f^{-1}[\{1\}]$を求めよ。{5}

(2) $\{2,5\}$の像$f^{-1}[\{2,5\}]$を求めよ。{1,2,3,4}

例題2.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について， $A \subseteq U$を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

例題2.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について， $A \subseteq U$を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$ を証明せよ。

[証明] 定義に戻れ：$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では∀をとって束縛変数（ある値）$x \in A$と仮定して右辺を導く。

$x \in A$と仮定すると， $f(x) \in f(A)$. このとき逆像の定義より$f^{-1}[f(A)]$ =$\{x | f(x) \in f(A)\}$

より　$x \in f^{-1}[f(A)]$．従って$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$

■

例題3.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について，　$B \subseteq V$を考える。

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$を証明せよ。

例題3.

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について，　$B \subseteq V$を考える。

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$を証明せよ。

[証明] 定義に戻れ：$A \subseteq \mathrm{B} \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では∀を とり束縛変数（ある値）$x \in A$と仮定して右辺を導く。

$y \in f[f^{-1}(B)]$と仮定すると，　$x \in f^{-1}(B)$ かつ$f(x) = y$を満たすxが存在する．　このとき，$x \in f^{-1}(B)$なので$f(x) \in B$. 従って，　$y \in B$.

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$　■

3. 写像の合成

Def 4.

$f: U \mapsto V; f(x)$ と $g: V \mapsto W; g(x)$に対し，

$h: U \mapsto W; h(x) = g(f(x))$

を合成写像$h = g \circ f$　と表す。

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0,1,2\}, W = \{p, q\}$とする。

このとき，

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像$h = g \circ f$の列を求めよ。

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0,1,2\}, W = \{p, q\}$　とする。

このとき，

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

正答：$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) = g(1) = p$

例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0,1,2\}, W = \{p, q\}$　とする。

このとき，

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像 $h = g \circ f$ の列を求めよ。

正答：$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) = g(1) = p$

$(g \circ f)(b) = g\big(f(b)\big) = g(2) = q$

例題 1

$U=\{a,b,c\}, V=\{0,1,2\}, W=\{p,q\}$ とする。
このとき，
$f: U \mapsto V; f(a)=1, f(b)=2, f(c)=0$
$g: V \mapsto W; g(0)=p, g(1)=p, g(2)=q$
である。合成写像 $h=g\circ f$ の列を求めよ。

正答：$(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(1)=p$
$(g\circ f)(b)=g(f(b))=g(2)=q$
$(g\circ f)(c)=g(f(c))=g(0)=p$

37

例題2

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto x+1,$
$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-3,$
のとき，合成写像$g\circ f$を求めよ。

38

例題2

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto x+1,$
$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-3,$
のとき，合成写像$g\circ f$を求めよ。
正答

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)$$
$$=2(x+1)-3=2x-1$$

従って

$$g\circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-1 \quad .$$

39

例題3

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto x+1,$
$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-3,$
のとき，合成写像$f\circ g$を求めよ。

40

例題3

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto x+1,$
$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-3,$
のとき，合成写像$f\circ g$を求めよ。
正答

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-3)$$
$$=(2x-3)+1=2x-2$$

従って

$$f\circ g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-2 \quad .$$

$g\circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R};\ x \mapsto 2x-1$とは異なる

例題3の補題

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto x+1,$
$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto 2x-3,$
のとき，合成写像$f\circ g$を求めよ。

42

例題3の補題

$$f:\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto x+1,$$
$$g:\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto 2x-3,$$

のとき，合成写像$f \circ g$を求めよ。

正答

gは写像ではないので解なし

$x=1$のとき，　$g(x)=-1$で$\mathbb{N}$でない。

43

例題4

$$f:U \mapsto V, g:V \mapsto W, h:W \mapsto X,$$

のとき，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$を証明せよ。

44

例題4

$$f:U \mapsto V, g:V \mapsto W, h:W \mapsto X,$$

のとき，$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$を証明せよ。

[証明]

全称記号$\forall x \in U$が隠れている全称記号についての証明。 ∀をとって束縛変数として扱う。

$x \in U$とする。

$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$　■

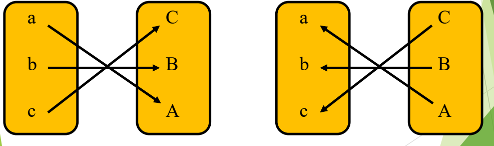
45

４．逆写像

Def 5

$f:U \mapsto V$　が全単射のとき，

$f^{-1}:V \mapsto U$を　fの逆写像と呼ぶ。



$f:U \mapsto V$　　　$f^{-1}:V \mapsto U$

46

例題１

$$U=\{a,b,c\}, V=\{0,1,2\}$$

$f:U \mapsto V; a \mapsto 2,\ b \mapsto 0, c \mapsto 1$のとき，逆写像を求めよ。

47

例題１

$$U=\{a,b,c\}, V=\{0,1,2\}$$

$f:U \mapsto V; a \mapsto 2,\ b \mapsto 0, c \mapsto 1$のとき，逆写像を求めよ。

[回答]

$f^{-1}:V \mapsto U; 0 \mapsto b, 1 \mapsto c, 2 \mapsto a$

48

例題２

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{+}; f(x) = \exp(x) = y$
の逆写像を求めよ。

49

例題２

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{+}; f(x) = \exp(x) = y$
の逆写像を求めよ。

[回答]

$f^{-1}: \mathbb{R}^{+} \mapsto \mathbb{R}; f^{-1}(x) = \ln(y)$

50

例題3

恒等写像$\mathrm{id}u: U \mapsto U; \mathrm{id}u(x) = x$ の逆写像$\mathrm{id}u^{-1}$を求めよ。

51

例題3

恒等写像$\mathrm{id}u: U \mapsto U; \mathrm{id}u(x) = x$ の逆写像$\mathrm{id}u^{-1}$を求めよ。

[回答]

$\mathrm{id}u^{-1}(x) = \mathrm{id}u(x)$

52

例題4

$f: U \mapsto V$　が全単射のとき，
$f^{-1} \circ f$はどのような写像か？

53

例題4

$f: U \mapsto V$　が全単射のとき，
$f^{-1} \circ f$はどのような写像か？

[回答]

$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}u(x)$

54

まとめ

① 像と原像
② 逆像
③ 写像の合成
④ 逆写像

演習問題

問題1

$f: U \mapsto V$，$A_1, A_2 \subseteq U$のとき，
以下を証明せよ．

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2).$$

問題2

$f: U \mapsto V$，$B_1, B_2 \subseteq V$のとき，
以下を証明せよ．

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2).$$

問題3

$f: U \mapsto V$と$g: V \mapsto W$とする．
以下を証明せよ．

(1) fとgが単射ならば$g \circ f$も単射である．
(2) fとgが全射ならば$g \circ f$も全射である．

問題4

$$U = \{a\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$$

$f: U \mapsto V$と$g: V \mapsto U$を$f(a) = a, g(a) = a, g(b) = a$ とする。
このとき， $g \circ f$と$f \circ g$はそれぞれ恒等写像となるか？