# 4． 述語論理

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

## 本授業の構成

11月 2日：第1回 命題と証明
11月9日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
11月16日：第3回 命題論理
11月30日：第4回 述語論理
12月7日：第5回 述語と集合
12月14日：第6回 直積と冪集合
12月 21日：第7回 様々な証明法 (1)
1月 4日：第8回 様々な証明法 (2)
1月18日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
1月25日：第10回 写像（関数） (1)
2月 1日：第11回 写像 (関数) (2)
オンデマンド：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
オンデマンド：第13回 同値関係
オンデマンド：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
対面　教室に集合　　第15回 期末試験

## 1．本日の目標

1．述語論理とは何かを理解する
2．真理集合
3．述語の同値性
4．全称命題と存在命題
5．述語演算
6．述語論理での含意
7．述語と集合は等価

## 前回まで習ったこと

- 命題
  - ソクラテスは人間である
  - $2^2+1=5$
  - 2は偶数である



## 前回まで習ったこと

- 命題
  - ソクラテスは人間である
  - $2^2+1=5$
  - 2は偶数である

→より一般化すると述語論理　になる。



## 2.　述語

Def
述語（Predicate)とは、値の決まっていない変数（**自由変数**）を含み，その変数の値を定めれば，真か偽か判断できる記述

- $x$は人間である
- $x^2+1=5$
- $x$は偶数である

## 3．記法

自由変数$x$についての述語を表すのに，$P(x)$, $Q(x)$,…などの記号で表す。

述語$P(x)$の自由変数に値$a$を代入したものを$P(a)$と書く。 $P(x)$ を「自由変数$x$についての述語」という。

例

$P(x)$：「$x$は人間である」， $Q(x)$：$x^2+1=5$

(1) $P$(ソクラテス)：「ソクラテスは人間である」

(2) $Q(2)$：$2^2+1=5$

注） (2)より，方程式も等式を用いた特別な述語の一つであることがわかる。

## 4．述語と条件

- 「**条件**」という言葉は，しばしば述語と同じ意味で用いられる。
- 自由変数$x$についての述語$P(x)$のことを，$x$についての条件と呼ぶことがある。
- このとき，要素$a$を述語$P(x)$の自由変数$x$に代入した命題$P(a)$が真であることを，「要素 $a$ は，条件 $P(x)$ をみたす」という。

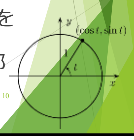
## 5．真理集合

Def

$P(x)$は自由変数$x$についての述語で，$x$の**変域**($x$の取り得る値の範囲）は集合$U$とする。 $U$の要素のうち， $P(x)$の自由変数$x$に代入した命題が真になるものをすべて集めた集合，条件$P(x)$を満たす$U$の要素集合を，$A=\{x|P(x)\}$と書き，述語$P(x)$の真理集合という。

## 例 変域が変わると同じ述語でも真理集合が大きく変わる。

- 自由変数$x\in\mathbb{N}$についての述語「$x<3$」を$P(x)$とする。このとき， $A=\{x|P(x)\}=\{0,1,2\}$
- 自由変数$x\in\mathbb{N}$についての述語「$|x|\le 1$」を$P(x)$とする。このとき， $A=\{x|P(x)\}=\{0,1\}$
- 自由変数$x\in\mathbb{R}$についての述語「$|x|\le 1$」を$P(x)$とする。このとき， $A=\{x|P(x)\}=\{x|-1\le x\le 1\}$
- 自由変数$x\in\mathbb{C}$についての述語「$|x|\le 1$」を$P(x)$とする。このとき， $A=\{x|P(x)\}$は，複素数平面の単位円の円周およびその内部




## 例

- 自由変数$x\in\mathbb{N}$についての述語「$x^2-4x=0$」の真理集合は，$A=\{x|x^2-4x=0\}=\{0,4\}$
- 自由変数$x\in\mathbb{N}$についての述語「$x^2-x+\frac{1}{4}=0$」の真理集合は，$A=\{x|x^2-x+\frac{1}{4}=0\}=\emptyset$
- 自由変数$x\in\mathbb{R}$についての述語「$(x-2)^2\ge 0$」の真理集合は，$A=\{x|(x-2)^2\ge 0\}=\mathbb{R}$
- 自由変数$x\in\mathbb{R}$についての述語「$(x-2)^2<0$」の真理集合は，$A=\{x|(x-2)^2<0\}=\emptyset$

## 6. 同値

Def $P(x), Q(x)$を自由変数$x$についての述語とする。

$\{x|P(x)\}=\{x|Q(x)\}$であるとき，述語$P(x)$と$Q(x)$は「**同値である**」という。 $P(x)\equiv Q(x)$ または$P(x)\Leftrightarrow Q(x)$ と書く。

## 例題

自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x < 3$」を $P(x)$とする。自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x \leq 2$」を $Q(x)$とする。このとき， $P(x)$と$Q(x)$は同値か？



## 解答

自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x < 3$」を $P(x)$とする。自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x \leq 2$」を$Q(x)$とする。

このとき， $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\} = \{0,1,2\}$ 。従って，$P(x) \equiv Q(x)$



## 例題

自由変数$x \in \mathbb{R}$についての述語「$x < 3$」を $P(x)$とする。自由変数$x \in \mathbb{R}$についての述語「$x \leq 2$」を $Q(x)$とする。このとき， $P(x)$と$Q(x)$は同値か？



## 解答

自由変数$x \in \mathbb{R}$についての述語「$x < 3$」を $P(x)$とする。自由変数$x \in \mathbb{R}$についての述語「$x \leq 2$」を$Q(x)$とする。

このとき， $\{x|P(x)\} = \{x|x < 3\}, \{x|Q(x)\} = \{x|x \leq 2\}$。

$P(2.5)$は真であるが$Q(2.5)$は偽

$$\exists x \in \mathbb{R}[P(x), \neg Q(x)]$$

従って，$P(x) \not\equiv Q(x)$



## 7. 十分条件と必要条件

Def.　$P(x), Q(x)$を自由変数$x$についての述語とする．$\{x|P(x)\} \subseteq \{x|Q(x)\}$となるとき， $P(x)$は$Q(x)$の十分条件であるといい，$Q(x)$ は$P(x)$の必要条件であるという。



## 例

自由変数$x \in \mathbb{R}$についての述語「$x \leq 2$」を $P(x)$とする。自由変数$x \in \mathbb{R}$についての述語「$x < 3$」を $Q(x)$とする。

$$\{x|P(x)\} \subseteq \{x|Q(x)\}$$

なので， $P(x)$は$Q(x)$の十分条件であるといい，$Q(x)$ は$P(x)$の必要条件である

## 8. 必要十分条件

Def．$P(x)$が$Q(x)$の十分条件であり，かつ，必要条件であるとき， $P(x)$は$Q(x)$の必要十分条件であるという。
$\{x|P(x)\} \subseteq \{x|Q(x)\}$かつ$\{x|P(x)\} \supseteq \{x|Q(x)\}$であるので， $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\}$となる。 $P(x)$は$Q(x)$の必要十分条件であるとは， $P(x)$と$Q(x)$が同値であることをいう。

19

## 例

自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x < 3$」を $P(x)$とする。自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x \leq 2$」を$Q(x)$とする。

このとき， $\{x|P(x)\} = \{x|Q(x)\} = \{0,1,2\}$ 。従って，$P(x)$は$Q(x)$の必要十分条件である。

20

## 9．述語の演算と真理集合

$P(x), Q(x)$を自由変数$x$についての述語とする。
このとき，以下が成り立つ。

Th. 1 (定理1)

$$\{x|P(x) \wedge Q(x)\} = \{x|P(x)\} \cap \{x|Q(x)\}$$

Th. 2 (定理2)

$$\{x|P(x) \vee Q(x)\} = \{x|P(x)\} \cup \{x|Q(x)\}$$

Th. 3 (定理3)

$$\{x|\neg P(x)\} = \{x|P(x)\}^c$$

重要：論理演算が集合演算に対応している。

21

## 例

自由変数$x \in \mathbb{N}$についての述語「$x > 2$」を $P(x)$，「$x < 5$」を $Q(x)$とする。
このとき,

$$\begin{aligned}\{x|P(x) \wedge Q(x)\} &= \{x|P(x)\} \cap \{x|Q(x)\} \\ &= \{x|x > 2\} \cap \{x|x < 5\} \\ &= \{3,4\}\end{aligned}$$

22

## 10. 述語論理の含意と同値

$P(x), Q(x)$を自由変数$x$についての述語とする。

Th. 4

$$P(x) \to Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

Th.5

$$P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Th. 6

$$\{x|P(x) \to Q(x)\} = \{x|P(x)\}^c \cup \{x|Q(x)\}$$

Th.7

$$\{x|P(x) \leftrightarrow Q(x)\} = (\{x|P(x)\} \cap \{x|Q(x)\}) \cup (\{x|P(x)\}^c \cap \{x|Q(x)\}^c)$$

## Th 5を証明せよ

$$P(x) \leftrightarrow Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (P(x) \wedge Q(x)) \vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$$

24

## Th 5を証明せよ

$$P(x) \leftrightarrow Q(x)$$

$\Leftrightarrow (P(x) \land Q(x)) \lor (\neg P(x) \land \neg Q(x))$

[証明]

$P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow [\neg P(x) \lor Q(x)]$

$\land [P(x) \lor \neg Q(x)]$

$\Leftrightarrow [\neg P(x) \land P(x)] \lor [P(x) \land Q(x)] \lor [\neg P(x) \land \neg Q(x)] \lor [Q(x) \land \neg Q(x)] \Leftrightarrow [P(x) \land Q(x)] \lor [\neg P(x) \land \neg Q(x)]$ ■



## １１．全称命題

Def.　　集合$U$の変域を持つ$x$についての述語$P(x)$に対して，「すべての$x$について$P(x)$」という命題を全称命題といい，$\forall x \in U[P(x)]$と書く。$\forall x$を全称量化子という。



## １２．存在命題

Def.　　集合$U$の変域を持つ$x$についての述語$P(x)$に対して，「ある$x$について$P(x)$」という命題を存在命題といい，$\exists x \in U[P(x)]$と書く。$\exists x$を存在量化子という。



## 束縛変数

全称命題，存在命題における$x$は自由に値を代入できるという自由変数の性質を失っている。全称命題，存在命題における$x$のように，述語や命題の内容を示すためだけに用いられる変数を束縛変数と呼ぶ。



## 例

述語「$x-2=3$」を $P(x)$と書く。
このとき，次の命題は真か偽か？

(1)　$\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$

(2)　$\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$



## 例

述語「$x-2=3$」を $P(x)$と書く。
このとき，次の命題は真か偽か？

(1)　$\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$は偽

(2)　$\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$

## 例

述語「$x-2=3$」を $P(x)$と書く。
このとき，次の命題は真か偽か？

(1) $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$は偽

(2) $\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$は真

31

## 13. 全称命題・存在命題の否定

Th. 8. $\neg(\forall x \in U[P(x)]) \equiv \exists x \in U[\neg P(x)]$

32

## 13. 全称命題・存在命題の否定

Th. 8. $\neg(\forall x \in U[P(x)]) \equiv \exists x \in U[\neg P(x)]$

[証明]

$\forall x \in U[P(x)]$： $U$のすべての要素は$P(x)$を満たす

⇒否定 $\neg(\forall x \in U[P(x)])$：

$U$のある要素は$P(x)$を満たさない

⇒ $U$のある要素は$\neg P(x)$を満たす

⇒ $\exists x \in U[\neg P(x)]$ ■

33

## 13. 全称命題・存在命題の否定

Th.9. $\neg(\exists x \in U[P(x)]) \equiv \forall x \in U[\neg P(x)]$

34

## 13. 全称命題・存在命題の否定

Th.9. $\neg(\exists x \in U[P(x)]) \equiv \forall x \in U[\neg P(x)]$

[証明]

$\exists x \in U(P(x))$： $U$のある要素は$P(x)$を満たす

⇒否定 $\neg(\exists x \in U[P(x)])$：

$U$のどの要素も$P(x)$を満たさない

⇒ $U$のすべての要素は$\neg P(x)$を満たす

⇒ $\forall x \in U[\neg P(x)]$ ■

35

## １４． 「～ならば」の述語表現

命題論理では，$p \to q$は「 $p$ならば$q$ 」を意味していた。しかし、述語論理での

$$P(x) \to Q(x)$$

は，「$P(x)$ならば$Q(x)$」という意味とは限らない。

「$P(x)$ならば$Q(x)$」という命題は，

$$\forall x[P(x) \to Q(x)]$$
$$\forall x\,[\neg P(x) \vee Q(x))]$$

という意味。

36

## Th.10

$$\forall x \in U[P(x) \to Q(x)]$$
$$\Leftrightarrow \{x|P(x)\} \subseteq \{x|Q(x)\}$$

37

## Th.10

$$\forall x \in U[P(x) \to Q(x)]$$
$$\Leftrightarrow \{x|P(x)\} \subseteq \{x|Q(x)\}$$

[証明]

$$\{x|P(x)\} \subseteq \{x|Q(x)\} \Leftrightarrow$$
$$\forall x \in U[x \in \{x|P(x)\} \to x \in \{x|Q(x)\}]$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in U[P(x) \to Q(x)]$$

■

38

## １５． 「～ならば」命題の否定

命題　「$P(x)$ならば$Q(x)$」　の否定は，「$P(x)$かつ$\neg Q(x)$を満たす要素が存在する」

39

## １５． 「～ならば」命題の否定

命題　「$P(x)$ならば$Q(x)$」　の否定は，「$P(x)$かつ$\neg Q(x)$を満たす要素が存在する」

[証明]

$$\neg(\forall x[P(x) \to Q(x)])$$
$$\equiv \neg(\forall x[\neg P(x) \vee Q(x)])$$
$$\equiv \exists x[\neg(\neg P(x) \vee Q(x))]$$
$$\equiv \exists x\,[\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)]$$
$$\equiv \exists x\,[P(x) \wedge \neg Q(x)]$$

■

「$P(x)$ならば$Q(x)$」を否定するためには，$P(x)$かつ$\neg Q(x)$を満たす要素を一つ見つけて示せばよい。この要素を「反例」と呼ぶ。

40

## 例題

述語$P(x)$:「$x \geq 0$」と述語$Q(x)$:「$x > 1$」について以下の命題が成り立たないことを証明せよ。

$$\forall x \in \mathbb{N}[P(x) \to Q(x)]$$

41

## 例題

述語$P(x)$:「$x \geq 0$」と述語$Q(x)$:「$x > 1$」について以下の命題が成り立たないことを証明せよ。

$$\forall x \in \mathbb{N}[P(x) \to Q(x)]$$

証明 (反例は０か１どちらかを挙げればよい)

$1 \in \mathbb{N}$は，命題$P(x)$:「$x \geq 0$」を満たすが，命題$Q(x)$:「$x > 1$」は満たさない。すなわち，$1 \in \mathbb{N}$は命題の否定$(P(x) \wedge \neg Q(x))$を満たす。
すなわち　$\exists x \in \mathbb{N}[P(x) \wedge \neg Q(x)]$

従って，反例が存在し，$\forall x \in \mathbb{N}[P(x) \to Q(x)]$は成り立たない。 ■

42

## 16. 空ゆえに真

命題論理$p \to q$

命題　$p \to q$は，「 $p$ が偽のときには，
$q$ の値に関わらず命題$p \to q$は真」

## 16. 空ゆえに真

命題論理$p \longrightarrow q$

命題　$p \longrightarrow q$は「 $p$ が偽のときには，
$q$ の値に関わらず命題$p \longrightarrow q$は真」

述語論理$P(x) \longrightarrow Q(x)$

「述語$P(x)$の真理集合が空であれば，
述語$Q(x)$が何であれ，$P(x) \longrightarrow Q(x)$は真」

「条件$P(x)$を満たす要素が存在しなければ，
$P(x) \longrightarrow Q(x)$は「空ゆえに真」
(vacurously true, vacuous truth)」

## 例

普遍集合　$U$：{日本の小学生}

$P(x)$: $x$は車を運転する。

$Q(x)$:$x$は運転免許を持っている。

$P(x) \longrightarrow Q(x)$　：空ゆえに真

## 例題 1

自由変数$x \in \mathbb{R}$について，
$P(x): (x-2)^2 < 0$,
$Q(x): x^2 < 0$

とすると　$P(x) \longrightarrow Q(x)$は「空ゆえに真」を証明せよ。

## 例題 1

自由変数$x \in \mathbb{R}$について，$P(x): (x-2)^2 < 0$,
$Q(x): x^2 < 0$

とすると　$P(x) \longrightarrow Q(x)$は「空ゆえに真」を証明せよ。

[証明]

$$\forall x \in \mathbb{R}[P(x) \longrightarrow Q(x)] \equiv \forall x \in \mathbb{R}[\neg P(x) \lor Q(x)]$$
$$\equiv \forall x \in \mathbb{R}[((x-2)^2 \geq 0) \lor Q(x)]$$

$\neg P(x) = ((x-2)^2 \geq 0)$　は$\forall x \in \mathbb{R}$について真。

$Q(x)$に関わらず，

$\forall x \in \mathbb{R}[P(x) \longrightarrow Q(x)]$は真　■

## 例題2

普遍集合$U$,自由変数$x \in U$について，条件
$P(x)$を満たす要素が存在しなければ，
$P(x) \longrightarrow Q(x)$は「空ゆえに真」を証明せよ。

例題2　普遍集合$U$,自由変数$x \in U$について，条件$\boldsymbol{P(x)}$を満たす要素が存在しなければ，$\boldsymbol{P(x) \longrightarrow Q(x)}$は「空ゆえに真」を証明せよ。

証明　$\forall x \in U[P(x) \longrightarrow Q(x)]$

$\equiv \forall x \in U[\neg P(x) \vee Q(x)]$

$\{x|\neg P(x)\} = \{x|P(x)\}^c$より，

$\forall x \in U[P(x) \longrightarrow Q(x)]$の真理集合は

$\{x|P(x)\}^c \cup \{x|Q(x)\}$

ここで，$\{x|P(x)\} = \emptyset$より，$\{x|P(x)\}^c = U$

$\{x|P(x)\}^c \cup \{x|Q(x)\} = U \cup \{x|Q(x)\} = U$

$Q(x)$に関わらず，真理集合が$U$となり，

$\forall x \in U[P(x) \longrightarrow Q(x)]$は真　■

49

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

50

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$A \cap B$の述語表現はどのようになるのか？

51

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

52

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cup B$の述語表現はどのようになるのか？

53

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$

54

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A^C$の述語表現はどのようになるのか？

55

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$

$A \subseteq B$の述語表現はどのようになるのか？

56

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \{x|x \in A \longrightarrow x \in B\}$

$A = B$の述語表現は？

57

## 17. 述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \wedge (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \vee (x \in B)\}$

$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \{x|x \in A \longrightarrow x \in B\}$

$A = B \Leftrightarrow \{x|x \in A \longleftrightarrow x \in B\}$

## 18. 述語論理と人工知能

述語論理は初期（８０s）の人工知能推論

$P(x)$: $x$は人間である。

$Q(x)$: $x$は　死ぬ。

$[P(x) \rightarrow Q(x)]$

$P$(ソクラテス)：「ソクラテスは人間である」　真

↓

$Q$(ソクラテス):「ソクラテスは　死ぬ」　真

59

## 三段論法

$P(x)$: $x$はギリシャ人である。

$Q(x)$: $x$は人間である。

$R(x)$: $x$は　死ぬ。

$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \rightarrow R(x)]$

$P$(ソクラテス) → $Q$(ソクラテス) → $R$(ソクラテス)

$P$(ソクラテス)：「ソクラテスは人間である」→

$Q$(ソクラテス):「ソクラテスは　死ぬ」

60

## 例題：三段論法

$\forall x\ [[P(x) \rightarrow Q(x)] \land [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]]$
を証明せよ。



## 例題：三段論法

$$\forall x\ [[P(x) \rightarrow Q(x)] \land [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]]$$

を証明せよ。

[証明]

$\neg([P(x) \rightarrow Q(x)] \land [Q(x) \rightarrow R(x)]) \lor (\neg P(x) \lor R(x))$

$\equiv \neg\Big(\big(\neg P(x) \lor Q(x)\big) \land \big(\neg Q(x) \lor R(x)\big)\Big) \lor \big(\neg P(x) \lor R(x)\big)$

$\equiv \big(P(x) \land \neg Q(x)\big) \lor (Q(x) \land \neg R(x)) \lor \neg P(x) \lor R(x)$

$\equiv \{[P(x) \land \neg Q(x))]\ \lor \neg P(x)\} \lor \{[Q(x) \land \neg R(x)] \lor R(x)\}$

$\equiv \neg Q(x)\ \lor Q(x)$

は$\forall x$について　真 (恒真命題)

$\forall x\ [[P(x) \rightarrow Q(x)] \land [Q(x) \rightarrow R(x)] \rightarrow [P(x) \rightarrow R(x)]]$は真　■

## 推論

$P(x)$: $x$はギリシャ人である。
$Q(x)$: $x$は人間である。
$R(x)$: $x$は　死ぬ。
－－－－－－－－－－－－－－－－－－－
$\neg R$(ドラえもん): ドラえもんは死なない。
→ ドラえもんは人間でない
→ ドラえもんはギリシャ人でない



## 対偶

$P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$

\------------------------------------------------

$\neg R$(ドラえもん): ドラえもんは死なない。
→ $\neg Q$(ドラえもん)：ドラえもんは人間でない。

$\neg Q$(ドラえもん)：ドラえもんは人間でない。
→ $\neg P$(ドラえもん)：ドラえもんはギリシャ人ではない。



## 注意「真の述語命題からは何も推論できない」

$P(x)$: $x$はギリシャ人である。
$Q(x)$: $x$は人間である。
$R(x)$: $x$は　死ぬ。

\----------------------------------------------------

$R$(ネズミ)：ネズミは死ぬ$\nrightarrow$ネズミは人間である
$\nrightarrow$ ネズミはギリシャ人である
→　帰納推論（確率推論へ）



## １９９０年代以降

その他の欠点
・計算量が爆発する
・人間が知識を入力しないと学習できない
・例外がある場合処理が複雑
・不確実な知識を扱えない
↓
人工知能分野は　機械学習、確率的アプローチにシフト。現在のＡＩの繁栄につながる。

## 18. まとめ

1．述語論理とは何かを理解する
2．真理集合
3．述語の同値性
4．全称命題と存在命題
5．述語演算
6．述語論理での含意
7．述語と集合は等価

67

## 演習問題

68

## 問題１　(1)

$U=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\le x\le 10\}$について，
$P_1(x)\Leftrightarrow$ "x≤8", $P_2(x)\Leftrightarrow$ "x>5", $P_3(x)\Leftrightarrow$ "x>6", $P_4(x)\Leftrightarrow$ "$x^2-10x+9=0$".
(1)次の述語の真理集合を外延的記法で示せ。
(a) $P_1(x)$,
(b) $P_4(x)$,
(c) $\neg P_2(x)$,
(d) $P_2(x)\wedge\neg P_4(x)$,
(e) $P_1(x)\vee P_2(x)$,
(f) $P_3(x)\wedge P_4(x)$.

69

## 問題１（２）

$U=\{x\in\mathbb{N}\mid 1\le x\le 10\}$について，　$P_1(x)\Leftrightarrow$ "x≤8",
$P_2(x)\Leftrightarrow$ "x>5", $P_3(x)\Leftrightarrow$ "x>6", $P_4(x)\Leftrightarrow$ "$x^2-10x+9=0$".
次の文が「必要十分条件である」「十分条件だが必要条件ではない」「必要条件だが十分条件ではない」「十分条件でも必要条件でもない」のどれにあてはまるか文を完成させよ。
(a)　$P_3(x)$は$P_2(x)$の
(b)　$P_1(x)$は$P_4(x)$の
(c)　$P_4(x)$は$P_1(x)\wedge P_2(x)$の
(d)　$P_3(x)$は$\neg P_4(x)$　の
(e)　$P_1(x)\vee P_3(x)$は $P_2(x)$の
(f)　$\neg P_1(x)\vee P_4(x)$は$P_2(x)$の
(g)　$P_1(x)\vee P_2(x)$は $P_4(x)$の
(h)　$P_1(x)\wedge P_3(x)$は $P_4(x)$の

70

## 問題２．変数$x\in\mathbb{R}$についての以下の述語の否定命題を書け。

1. $\forall x\in\mathbb{R}(x^2-2x+1>0)$
2. $\forall x\in\mathbb{R}(2x^2-x+3\ge 0)$
3. $\forall x\in\mathbb{R}(x>3\vee x\le 7)$
4. $\exists x\in\mathbb{R}(x^2-x+2=0)$
5. $\exists x\in\mathbb{R}(x^2-2x+10\ne 0)$
6. $\exists x\in\mathbb{R}(x\ne 0\wedge x^2\ge 0)$

71

## 問題3. $x\in\mathbb{R}$についての次の命題の真偽を答えよ。偽の場合は，その否定命題を述べ，それが真であることを証明せよ。

1. $\forall x\in\mathbb{R}(x^2-5x+6\ge 0)$
2. $x>3\longrightarrow x>\sqrt{10}$
3. $x^2=9\longrightarrow x=3$
4. $x<4\longrightarrow x^2<16$

72

問題4　自由変数$x \in \mathbb{R}$についての
述語$P(x)$を「$2^x \leq 0$」，述語$Q(x)$を
「$x = 0$」とする．$P(x)$が偽のとき，
$Q(x)$の真偽に関係なく，$P(x) \longrightarrow Q(x)$が
成り立つことを証明せよ。

73