1.　命題と証明

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学プログラム

サイエンスを学校で学ぶ理由

学校でサイエンスを学ぶ主な理由は、
サイエンスの知識を学ぶことではない。
科学的方法を学ぶことである。
正しい世の中をつくるために、真摯な科学者の態度や真実を探求するモチベーション、事実から真実を見つけ出す方法、正しいことを正しいといえる勇気、たとえ他のすべての人が間違えていても、正しいことを証明して説得できる力、論理能力とだまされない能力、など

離散数学とは

- 【離散】りさん

1.1.
《名・ス自》
ちりぢりになること。
「一家離散」
2.2.
数学
《名》
本来的にとびとびの値を取ること。
「離散的」

離散数学（りさんすうがく、英語：discrete mathematics）とは、原則として離散的な（言い換えると連続でない、とびとびの）対象をあつかう数学のことである。

問　以下は離散数学の対象か？

1．自然言語における単語
2．ビット列
3．DNA
3．自然数
4．整数
5．実数
6．虚数

4

本授業「離散数学」の大局的目標

数学リテラシーをつけること
誤った論理を見破ったり、うその証明を見抜けること
コンピュータサイエンスにおける基礎を身に付けること

5

具体的目標

- 1 数学における基本的な用語 (命題,述語,集合，論理，写像，関係,グラフ) を 正しく使うことができる
- 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる
- 3 述語,集合，論理，写像，関係,グラフの関係を理解する

6

本授業の進め方

- 講義
- 授業は主にスライドで進めます.授業スライドは http://www.ai.lab.uec.ac.jp/%E9%9B%A2%E6%95%A3%E6%95%B0%E5%AD%A6/ にPDFでおいてあります． ダウンロードして使ってください.
- 自宅ではスライドの最後にある演習問題に取り組んでください. これは自習用で提出は必要ありません.
- 授業終了後

http://ec2-13-230-8-85.ap-northeast-1.compute.amazonaws.com:8080/eTestSystem/ の学習システムも用意しています.ヒントや解答も出ます.その週内にやってください.これは成績に反映させます.

- 成績　期末テスト(100点満点)

　　　+　システム演習問題の得点ボーナス（最大10点）

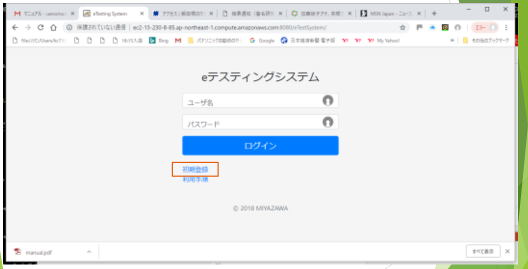
システムは11月2日からアクセスできます.

- 質問　sugahara あっとai.lab.uec.ac.jp　までメールください.

7

演習システム

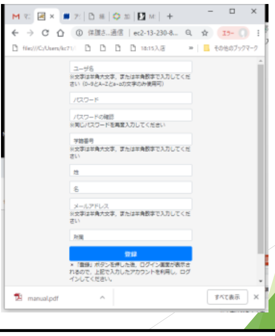
- システムへの登録



8

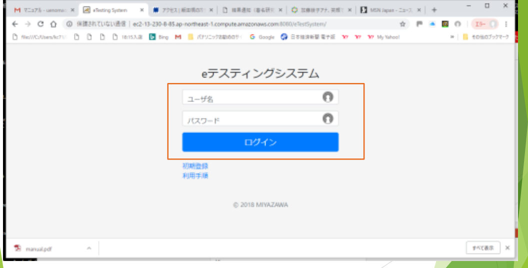
演習システム

- システムへの登録



演習システム

- ログイン：ユーザ名とパスワード入力



10

演習システム

- 開始ボタンをクリック

11

演習システム

- プルダウンメニューから解答を選択

1項目 / 全6項目

以下の証明はどこでおかしくなったか?

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

証明

$$3 > 2$$

両辺に$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$をかける

$$3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) >_{(1)} 2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

両辺の$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$の係数を真数の肩にかける

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3 >_{(2)} \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

両辺を真数に戻す

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 >_{(3)} \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{8} >_{(4)} \frac{1}{4}$$

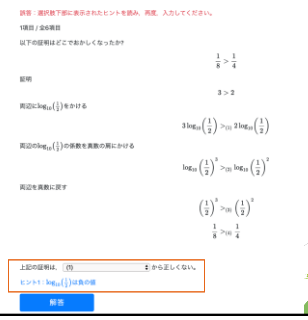
上記の証明は、 (1) から正しくない。

解答

12

演習システム

- 間違えるとヒントが出ます.ヒントを参考にもう一度解いてください.正答したら次の問題を解いてください.



注意

- 授業のあった週に一度は演習終わらせてください。
- 間違えても構いませんが、他の人の解答を見た場合や何も考えずに回答している場合は所要時間の異常でシステムが検知します。その回数により減点されます。
- 演習システムは　何度　受けても構いません。
- 学習の態度、時間により　点数を付与します。
- 演習システムは11月2日からアクセスできます。

本授業の構成

11月 2日：第1回 命題と証明
11月9日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
11月16日：第3回 命題論理
11月30日：第4回 述語論理
12月7日：第5回 述語と集合
12月14日：第6回 直積と冪集合
12月 21日：第7回 様々な証明法 (1)
1月 4日：第8回 様々な証明法 (2)
1月18日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
1月25日：第10回 写像（関数） (1)
2月 1日：第11回 写像 (関数) (2)
オンデマンド：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
オンデマンド：第13回 同値関係
オンデマンド：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
対面　教室に集合　　第15回 期末試験

教科書：なし.
講義資料を毎回用意する

- 参考書:
- イラストで学ぶ離散数学、伊藤大雄、講談社
- 論理と集合から始める数学の基礎、嘉田　勝、日本評論社
- はじめての離散数学，小倉久和、近代科学社
- 離散数学への招待 :J.マトウシェク/J.ネシェトリル 丸善出版
- やさしく学べる離散数学:石村園子 共立出版株式会社
- コンピュータサイエンスのための離散数学:守屋悦朗 サイエンス社

本日の目標

- １．本授業のねらい
- ２．離散数学とは何か？
- ３．証明とは何か？
- ４．命題とは何か？
- ５．公理とは何か？

１．証明とは？

- 「証明」は、真理(Truth)を立証するための手法である。

証明の方法は分野によって異なる。

- 法的真理は、法廷で示される証拠と法律、陪審員、裁判官によって決定される。
- 科学的真理は、実験によって確認される。
- 哲学的真理は、厳密な論証の積み重ねによって導かれる。
- 宗教的真理は、歴史的な宗教のコミュニティにより決定される。
- 組織的真理は、権威により決定づけられる。

数学での証明の定義

- Def
- 「証明」とは　基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

注意)

Def = Definition, 定義のこと

三平方の定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

よく知ってます！！

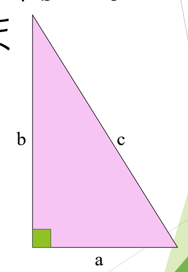


図１.

証明

図１の三角形を図２のように４つ並べる。外側に一辺が $a + b$ の正方形（以下「大正方形」）が、内側に一辺が c の正方形（以下「小正方形」）ができる。

（大正方形の面積）＝（小正方形の面積）＋（直角三角形の面積）× 4

大正方形の面積は $(a + b)^2$, 小正方形の面積は c^2, 直角三角形4個の面積の合計は　$ab/2 \times 4=2ab$

これらを代入すると

$(a+b)^2=c^2+2ab$

従って、$a^{2+}b^2=c^2$

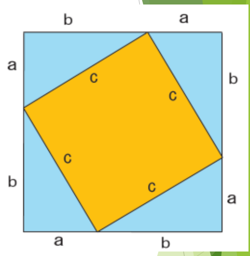
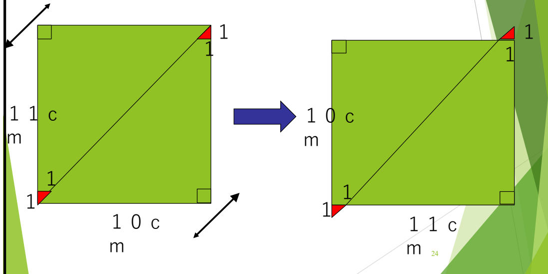


図２

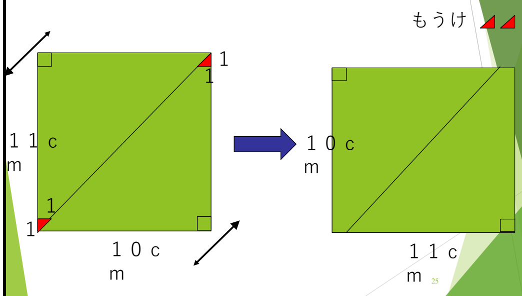
三平方の定理

- 最もよく知られている証明の一つ。
- これ以外にも１００種以上の証明が知られている。

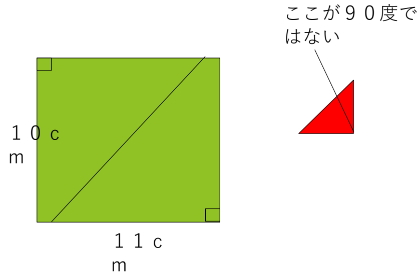
紙を無限に生成しつづける方法



紙を無限に生成しつづける方法



どこが間違い？



定理　0=1である

$x = 0$ とする　①

両辺に１を加えて

$$x + 1 = 1$$

両辺に$x - 1$をかけて

$$x^2 - 1 = x - 1$$

両辺に１を加えて

$$x^2 = x$$

両辺をxで割って

$$x = 1$$

①より　$0 = 1$　■

定理　１＝－１である

- $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$
- $= (\sqrt{-1})^2$
- $= -1$
- ■

Bertrand Russell (1872 - 1970)

再掲　：証明の定義

- Def
- 「証明」とは　基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論（Logical Deduction)の連鎖である。

２．命題(Proposition)

- Def
- 命題（Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

次の記述は命題か？

- 1 + 1 = 2
- 2 + 3 = 6
- 調布市は東京ではない
- ダウンタウン松本人志はすごい！！
- びっくりした！！
- このレストランのステーキはおいしい！！
- 犬は動物である
- $x^2 - 1 = 0$

31

3．公理

- Def 公理とは証明された真の命題のこと
- 公理の種類

1. 定理 (Theorem)　非常に重要な命題
2. 補題(Lemma)　重要な命題を証明するために必要な公理の証明
3. 系(corollary) すでに証明されている定理から容易に証明できる命題

32

4．高校での証明と大学での証明

- 次の命題は偽であることを証明せよ。
- 「すべての実数xについて

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」

嘉田勝　（数学セミナー2009 年5 月号）

33

高校での解答

$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$だから，　$2 <$ x < 3のとき，$x^2 - 5x + 6 < 0$が成り立つ．したがって，「すべての実数xについて

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」

は偽である．

■

34

大学では　間違い

「すべての実数について　～が成り立つ」の否定の証明はどのようにすればよいか？

35

大学では　間違い

「すべての実数について　～が成り立つ」の否定の証明はどのようにすればよいか？

⇩

「ある実数xについて～が成り立たない」ことを示せばよい．

- ロジカル！！

36

大学での証明

実数$x = \frac{5}{2}$について，　$x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{4}$　より

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ を満たさない実数$x = \frac{5}{2}$が存在する.

したがって，「すべての実数xについて$x^2 - 5x + 6 \geq 0$」

は偽である.

■

37

高校生と大学生の差

- 高校生は計算結果をずらずら書けば点数がもらえる。
- 大学生は、本当に命題を証明しないと正解にならない。
- 高校生は自分の思考の順に証明をずらずら書く。
- 大学生は説得するための順序をまず考える。

高校や大学入試での数学で覚えた「自分が考えた過程を書く」という方法を改めて，「読み手を説得するために書く」という姿勢に転換することが重要　嘉田勝　（数学セミナー2009 年5 月号）

38

証明法のパターン（7―8回目）

① 全称命題の証明
② 存在命題の証明
③ 背理法による証明
④ 含意「ならば」型命題の証明
⑤ 場合分けによる証明
⑥ 含意命題の否定の証明
⑦ 集合包含関係の証明
⑧ 複数量化子の命題の証明

39

4．本日のまとめ

- 1．本授業のねらい
- 2．離散数学とは何か？
- 3．証明の定義
- 4．命題の定義
- 5．公理

40

演習問題

41

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(a)

1/8 > ¼

証明

$$3>2$$
$$3 \log_{10}(1/2) > 2 \log_{10}(1/2)$$
$$\log_{10}(1/2)^3 > \log_{10}(1/2)^2$$
$$(1/2)^3 > (1/2)^2$$
$$1/8 > ¼$$

■

42

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(b) 100￠=1＄である。しかし、以下が成り立つ。

1￠ =1＄

証明

1￠ = 0.01＄ = (0.1＄)^2 = (10￠)^2= 100 ￠ =1＄

■

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(c) aとbは二つの等しい実数である。そうであればa=0である。

証明

$$a = b$$
$$a^2 = ab$$
$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$
$$(a-b)(a+b) = (a-b)b$$
$$a + b = b$$
$$a = 0$$

■

問題2
算術平均と幾何平均の間には任意の$a, b \geq 0$ について以下の性質がある。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

以下の証明のどこが間違いか？

証明　$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　が成り立つと仮定する.

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$　より

$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$　より

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$　より

$(a-b)^2 \geq 0$.

仮定から導かれた$(a-b)^2 \geq 0$は真である.

従って命題は真である.

■

問題3　次のうち命題はどれか？

(1)坂本龍馬は土佐の人であった。

(2)地球外の天体に生命が存在するかもしれない。

(3) $f(x) = x^2 + x - 2$とすると$f(2) = 0$

(4)アインシュタインはかしこい。

(5) $n \geq 3$の整数のとき，$a^n + b^n = c^n$を満たす実数(a, b, c)は存在しない。

(6) $100000 \neq 100001$

(7) $100000 \fallingdotseq 100001$