13.　同値関係

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

10月 7日：第1回 命題と証明
10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
10月21日：第3回 命題論理
10月28日：第4回 述語論理
11月11日：第5回 述語と集合
11月18日：第6回 直積と冪集合
12月 2日：第7回 様々な証明法 (1)
12月 9日：第8回 様々な証明法 (2)
12月16日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
12月23日：第10回 写像（関数） (1)
1月 6日：第11回 写像 (関数) (2)
1月20日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
1月27日：第13回 同値関係
2月 3日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
2月10日：第15回 期末試験（補講があればずれていきます。）

1．本日の目標

① 整数の合同
② 剰余類
③ 同値関係
④ 反射律
⑤ 対称律
⑥ 推移律
⑦ 同値類

1．関係（二項関係）

再掲５章：

Def 1.
二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合Rを
UからVへの「（二項）関係」という．

また，　$R \ni (a,b)$のとき　aRb　：aとbは関係ある
　　　　$R \not\ni (a,b)$のとき　$a \not R b$　：aとbは関係なし
と書く．

2．同値関係のイメージ

二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

例：カレンダーの同値

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとbが同じ曜日である関係を定式化せよ。

7

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとb が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^{+}$について

aRb ：$\exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$

8

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとb が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^{+}$について

aRb ：$\exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$

このような関係を「 aとbが7を法として合同である」と呼ぶ。

9

3.整数の合同

整数の周期的な分類において同じ分類に入るもの。

離散数学の応用では、最も重要な概念の一つ。

10

3. 整数の合同

Def 1. 合同な整数

$m, n, p \in \mathbb{Z}$について

$$\exists q \in \mathbb{Z}[(m - n) = pq]$$

のとき，「 mとn はpを法として合同である」といい，

$$m \equiv_p n$$

と書く。$\equiv_p$が合同関係を示す演算子。

11

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

12

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　〇
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　〇
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　〇
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。　〇
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　〇
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。　〇
4. 18と15は3を法として合同である。　〇
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。　〇
2. 8 と 4は3を法として合同である。　×
3. 11と5は3を法として合同である。　〇
4. 18と15は3を法として合同である。　〇
5. 121と110は3を法として合同である。　×

4. 整数の剰余類

Def 2.整数の剰余類

pを法とするnの剰余類とは，　$n \in \mathbb{Z}$について

$$[n]_p = \{m \in \mathbb{Z} | \exists q \in \mathbb{Z}[(m-n) = pq]\}$$

と定義される。

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1$
(2) $[3]_2$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$
(4) $[1]_{10} = \{\cdots, -9, 1, 11, 21, \cdots\}$

ここまでのまとめ

- 整数の合同とは、ある周期で同じ分類ができること
- 同値関係は、その一般化。
- 二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

↓

次に数学的に同値関係を定義する。

5. 同値関係

Def 3.
U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$
(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$
(3) 推移律　$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R)を同値集合と呼ぶ。

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である
2. R　:違う住所に住んでいる
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

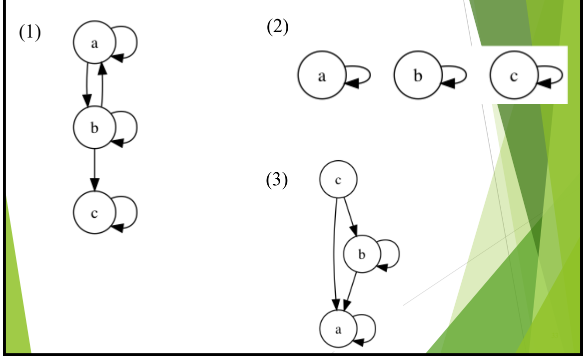
1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問1　反射性を満たすものは

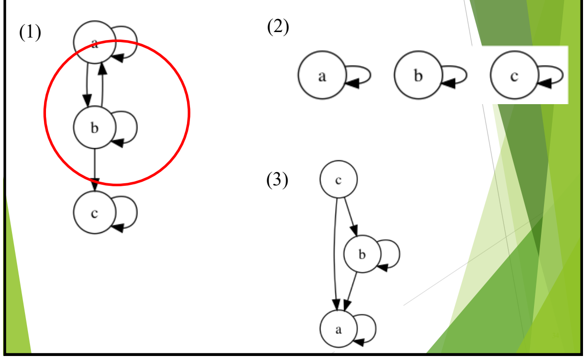
Def　$\forall x \in U, xRx$　：自分は自分と関係ある

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　○

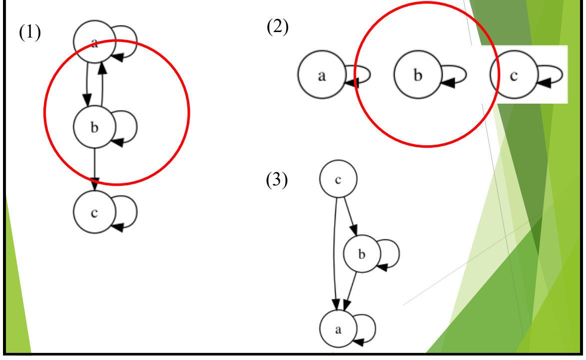
問2　反射性を満たすものは



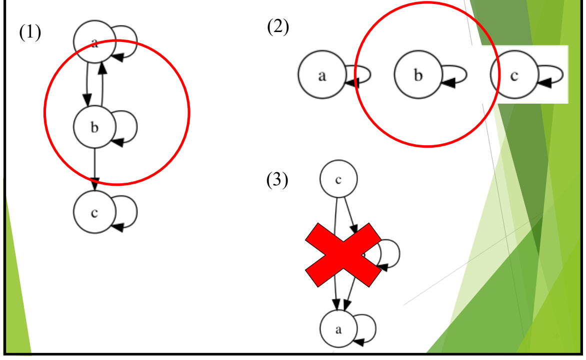
問2　反射性を満たすものは



問2　反射性を満たすものは



問2　反射性を満たすものは



問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$

自分の関係者にとって自分は関係者

1. R　:同じ学年である
2. R　:違う住所に住んでいる
3. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$
自分の関係者にとって自分は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

43

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$
自分の関係者にとって自分は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　○
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

44

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$
自分の関係者にとって自分は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　○
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

45

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$
自分の関係者にとって自分は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　○
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　○
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

46

問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$
自分の関係者にとって自分は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　○
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　○
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　×
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

47

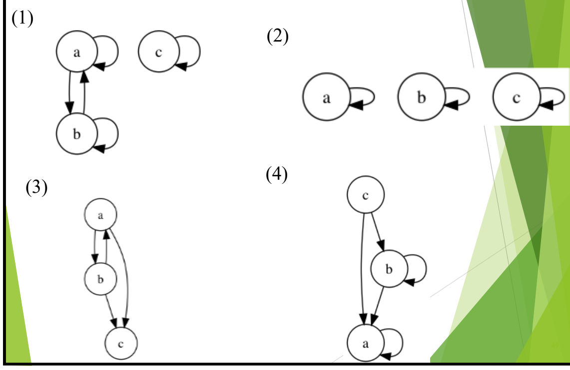
問4 対称性を持つものは？

Def　対称律　$xRy \to yRx$
自分の関係者にとって自分は関係者

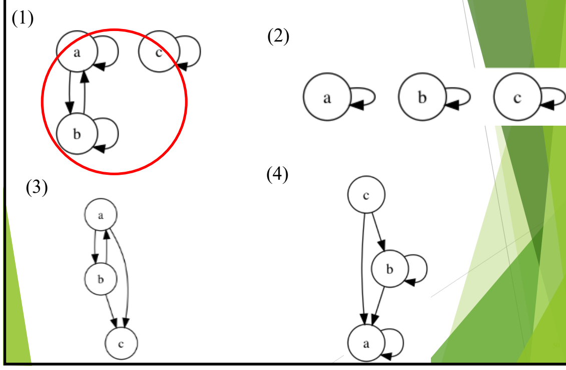
1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　○
3. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　○
5. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　×
6. R　:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　○

48

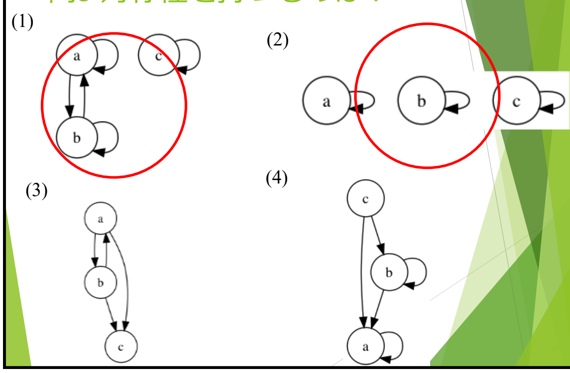
問5 対称性を持つものは？



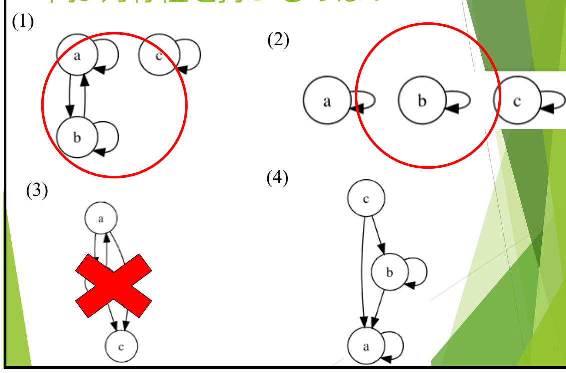
問5 対称性を持つものは？



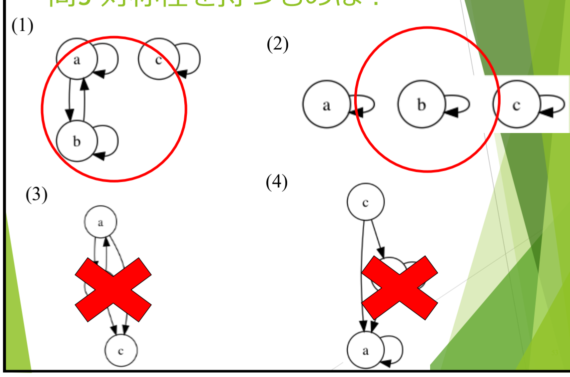
問5 対称性を持つものは？



問5 対称性を持つものは？



問5 対称性を持つものは？



問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問6 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R :同じ学年である
2. R :違う住所に住んでいる
3. R :$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R :$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R :$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R :$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

59

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R :同じ学年である　○
2. R :違う住所に住んでいる
3. R :$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R :$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R :$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R :$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

60

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

問7　推移性を満たすものは?

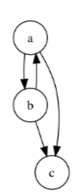
Def 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

関係者の関係者は関係者

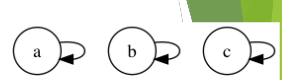
1. R　:同じ学年である　○
2. R　:違う住所に住んでいる　×
3. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　○
4. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$　×
5. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$　○
6. R　:$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$　○

問8　推移性を満たすものは

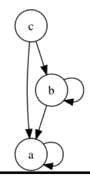
(1)



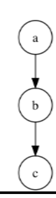
(2)

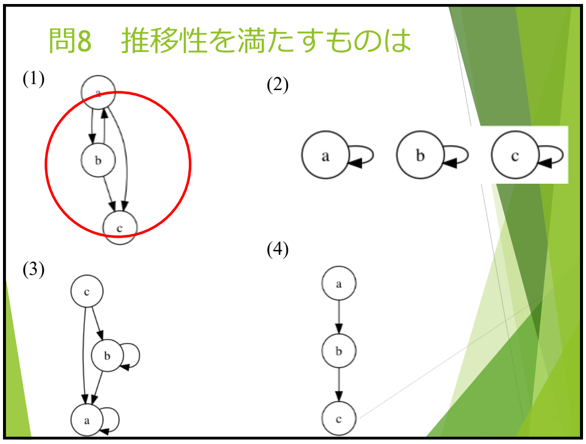


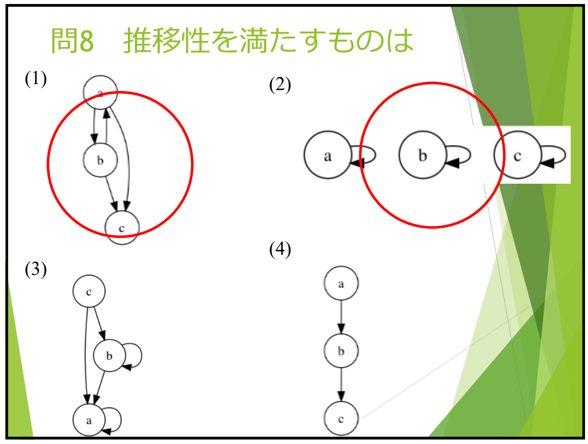
(3)

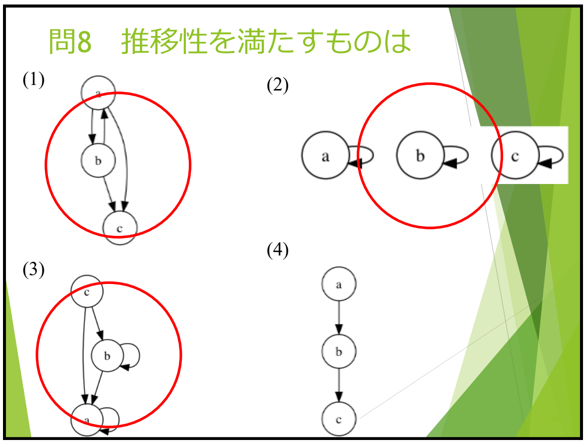


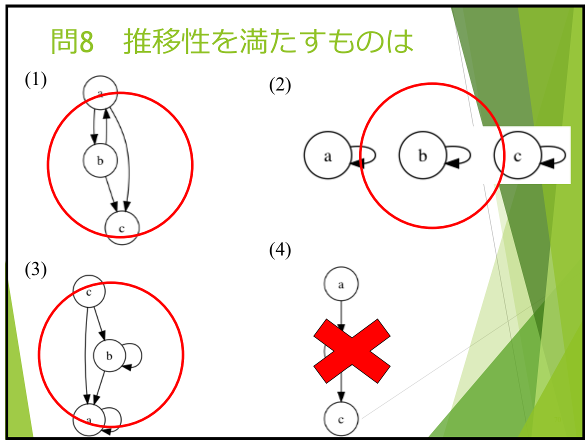
(4)











問9　同値関係を満たすものは?

Def　反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である
2. R:違う住所に住んでいる
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

71

問9　同値関係を満たすものは?

Def　反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる
3. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$
4. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$
5. R:$\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \leq b\}$
6. R:$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \geq 0\}$

72

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$
4. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$
5. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$
6. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$

73

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$ ×
4. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$
5. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$
6. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$

74

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$ ×
4. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$ ×
5. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$
6. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$

75

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$ ×
4. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$ ×
5. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$ ×
6. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$

76

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$ ×
4. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$ ×
5. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$ ×
6. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$ ○

77

問9　同値関係を満たすものは?

Def 反射律、対象律、推移律　を満たす

1. R:同じ学年である　○ 同級生という共通グループ
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a>b\}$ ×
4. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b<0\}$ ×
5. R:$\{(a,b)\in\mathbb{N}^2 | a\leq b\}$ ×
6. R:$\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 | a\times b\geq 0\}$ ○ 同一符号という共通グループ

78

問9　同値関係を満たすものは?

Def　反射律、対象律、推移律　を満たす

同値関係とは共通の性質を持つ関係

1. R:同じ学年である　○ 同級生という共通グループ
2. R:違う住所に住んでいる ×
3. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a > b\}$　×
4. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b < 0\}$ ×
5. $R:\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 | a \le b\}$　×
6. $R:\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | a \times b \ge 0\}$ ○ 同一符号という共通グループ

Def 4　分割

集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \land X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U$, $\exists\, X \in C$, s.t., $x \in X$

を満たすCをいう.

例. $U = \{a, b, c, d, e, f\}$のとき,

$C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$は集合$U$の分割.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを

証明せよ.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを

証明せよ.

[証明]　（１）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを

証明せよ.

[証明]　（１）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \to yRx$

xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.

このとき, RはU上の同値関係であることを

証明せよ.

[証明]　（１）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \to yRx$

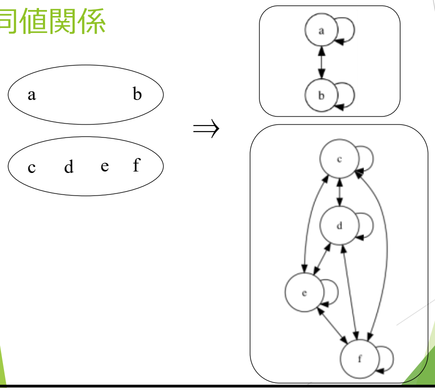
xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

(3) 推移律　$xRy \land yRz \to xRz$

$xRy \land yRz$より, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

従って, (1)-(3)より, xRzは同値関係　■

分割された同グループ要素⇒同値関係



例題2

$a, b \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n, \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b) = nm]$

のとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

例題2

$a, b \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n, \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b) = nm]$

のとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律： $a - a = 0$は$0 = nm$より，$a \sim a$

対称律： $a - b = nm$より， $b - a = (-1)nm$

従って、 $a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： $a - b = nm, b - c = nm'$，$m' \in \mathbb{Z}$のとき，

$a - c = nm + nm' = n(m + m'), m + m' \in \mathbb{Z}$

これらより， ~は同値関係 ■

例題3

Aを三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

例題3

Aを三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：aとaは合同なので，$a \sim a$

対称律：aとbが合同のとき， bとaも合同。

従って、$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： aとb， bとcがそれぞれ合同のとき，aとcも合同。これらより， ~は同値関係 ■

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき，~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：すべての頂点は自分に有向辺を持っているので$a \sim a$

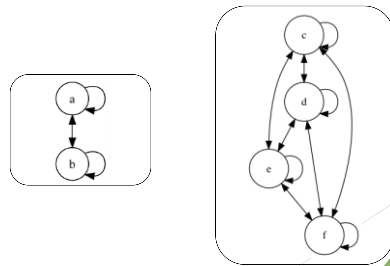
対称律： aからbに経路があり， bからaにも経路があるので　$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： $a \sim b$かつ$b \sim c$のとき，aからcにも経路があるので$a \sim c$

これらより， ~は同値関係 ■

補足

この同値関係による頂点のグループ分け（お互いに行き来可能な頂点集合）をグラフの強連結成分分解という。



例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，　$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，　$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

[証明]

反射律：$f(x) = f(x)$なので$x \sim x$

対称律： $f(x_1) = f(x_2)$ならば$f(x_2) = f(x_1)$

$x_1 \sim x_2 \rightarrow x_2 \sim x_1$

推移律：$x_1 \sim x_2$かつ$x_2 \sim x_3$のとき， $f(x_1) = f(x_2)$かつ$f(x_2) = f(x_3)$。このとき， $f(x_1) = f(x_3)$より　　$x_1 \sim x_3$

これらより， ~は同値関係 ■

6．同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1)　$x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2)　「$x \in P \wedge xRz$」 $\rightarrow z \in P$

を満たすとき，Pを~に関する同値類という。

6．同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1)　$x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2)　「$x \in P \wedge xRz$」 $\rightarrow z \in P$

を満たすとき，Pを~に関する同値類という。

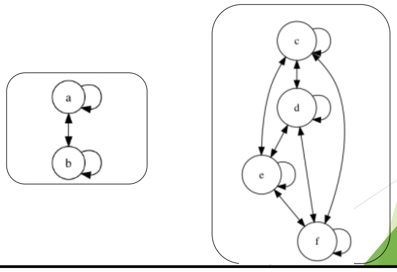
各同値類に属する各要素をその同値類の代表元と呼ぶ. ~で関係づけられた代表元aの同値関係の要素をすべて集めた集合をaの同値類と呼び，$[a]_R$と書く。 同値類の集合は$\{[a]_R \mid a \in U\}$であり、商集合と呼ばれ,

U / R と書く。

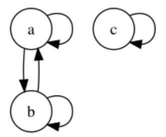
例　$U=\{a,b,c,d,e,f\}$の同値類と商集合

同値類　$[a]_R=\{a,b\}$, $[b]_R=\{a,b\}$, $[c]_R=\{c,d,e,f\}$, $[d]_R=\{c,d,e,f\}$, $[e]_R=\{c,d,e,f\}$, $[f]_R=\{c,d,e,f\}$

商集合$U\,/\,R=\{[a]_R \mid a\in U\}=\{\{a,b\},\{c,d,e,f\}\}$

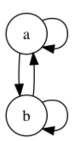


例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a,b\in G$に対して，同値関係$a\sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V\,/\!\sim$を求めよ。

例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a,b\in G$に対して，同値関係$a\sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V\,/\!\sim$を求めよ。

[解答]
商集合$V/\!\sim\,=\{\{a,b\},\{c\}\}$
注意　要素が一つでも同値類になる

例題2

写像$f:U\mapsto U; f(x)$,　$x_1,x_2\in U$　について

$x_1\sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$
とする。 $U=\{a,b,c,d\}$のU上の同値関係
$f(a)=b, f(b)=c, f(c)=b, f(d)=c$
のとき，　~の商集合$U\,/\!\sim$を求めよ。

100

例題2

写像$f:U\mapsto U; f(x)$,　$x_1,x_2\in U$　について

$x_1\sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1)=f(x_2)$
とする。 $U=\{a,b,c,d\}$のU上の同値関係
$f(a)=b, f(b)=c, f(c)=b, f(d)=c$
のとき，　~の商集合$U\,/\!\sim$を求めよ。
[解答]
$U/\!\sim\,=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$

101

例題3

商集合$U\,/\,R$はUの分割であることを証明せよ。

102

例題3

商集合$U \,/\, R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

定義に帰れ！！

商集合$U \,/\, R$が分割の定義

「集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists\, X \in C$, s.t., $x \in X$

を満たすCをいう.」

を満たしていることを順に証明していく.

103

例題3

商集合$U \,/\, R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$を証明する.

商集合の定義より,$X \in U/R, s.t, \exists a \in U,$

$X = [a]_R$. 同値類の定義より,$[a]_R \subseteq U$.

よって　$X \subseteq U$.

同値関係の反射性より, aRa.従って$[a]_R \neq \emptyset$.

したがって, $X \neq \emptyset$.

よって　$\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$

104

例題3

商集合$U \,/\, R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(2) $\forall X, Y \in U \,/\, R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ を証明する.

$X, Y \in U \,/\, R$と仮定する.

$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ の対偶$X \cap Y \neq \emptyset \longrightarrow X = Y$を証明する.

$X \cap Y \neq \emptyset$を仮定する.商集合の定義より,$X \in U/R, s.t,$

$\exists a \in U, X = [a]_R$, $Y \in U/R, s.t, \exists a' \in U, Y = [a']_R$.

$X \cap Y \neq \emptyset$より, $\exists a'' \in U, s.t.\ a'' \in X \wedge a'' \in Y$.

すなわち, $a'' \in [a]_R$かつ$a'' \in [a']_R$.同値類の定義より,

$a''Ra$かつ$a''Ra'$.同値関係の対称性より, aRa''.

aRa''と$a''Ra'$と同値関係の推移性からaRa'.これより

$[a]_R = [a']_R$.

105

従って, $X = Y$. 以上より$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

例題3

商集合$U \,/\, R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(3)$\forall x \in U, \exists\, X \in U \,/\, R$, s.t., $x \in X$を証明する.

$x \in U$を仮定する.

反射性から,　xRx.

同値類の定義より,　$x \in [x]_R$.

従って,　$\exists\, X \in U \,/\, R$, s.t., $x \in X$.

106

例題3

商集合$U \,/\, R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$

(2) $\forall X, Y \in U \,/\, R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

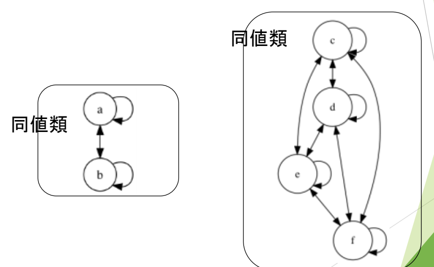
(3) $\forall x \in U, \exists\, X \in U \,/\, R$, s.t., $x \in X$

より,

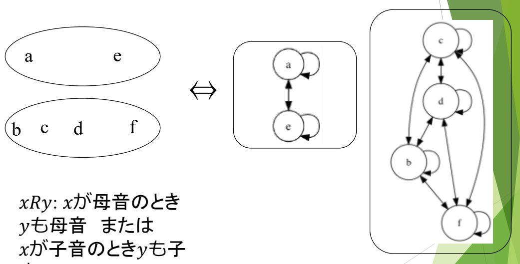
商集合$U \,/\, R$はUの分割である.　■

107

商集合のことを同値分割ともいう



つまり同値関係⇔あるルール（関係、もしくは２変数述語＝２変数条件）によって分割された同グループ要素



xRy: xが母音のときyも母音　またはxが子音のときyも子音.

同値類

- 同値類⇔あるルール（関係、もしくは２変数述語＝２変数条件）によって余すところなく、　背反に分割されたグループ
- 同値関係とは、すべての要素を背反にグループ化するための２変数述語（＝２変数条件）.

再掲：カレンダーとは7を法とした同値類（同値分割）

January 1 令和XX年 20XX

日	月	火	水	木	金	土
29	30	31	1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	1
2	3	4	5	6	7	8

6.　まとめ

① 整数の合同
② 剰余類
③ 同値関係
④ 反射律
⑤ 対称律
⑥ 推移律
⑦ 同値類

演習問題

問題1

$n \in \mathbb{N}^+$とする．$\mathbb{Z}$上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (a-b) = nk$$

は同値関係であることを証明せよ。

問題2

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^2$,
$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = y_1 - y_2)$
のとき,
$\sim$ が同値関係となることを証明せよ.

問題3

$\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$とする.
$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$,
$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$
のとき,
$\sim$ が同値関係となることを証明せよ.