

Knowledge tracing model としての
隠れマルコフ IRT

1831101

堤 瑛美子

情報理工学研究科

電気通信大学

令和2年1月27日

目次

1	まえがき	3
2	学習者の知識状態推定モデル	5
2.1	Bayesian Knowledge Tracing(BKT)	6
2.2	BKT の拡張手法	7
2.2.1	Individualized BKT(IBKT)	7
2.2.2	LogisticHMM(LHMM)	7
2.3	Deep Knowledge Tracing (DKT)	8
3	Item Response Theory(IRT)	9
3.1	2母数ロジスティックモデル	9
3.2	時系列 IRT モデル	10
4	隠れマルコフ IRT モデル	12
5	パラメータ推定	14
6	評価実験	15
6.1	実験データ	15
6.2	データに最適なウィンドウサイズの決定	17
6.3	反応予測精度比較	18
6.4	学習者の能力値推移	22
7	まとめ	22

1 まえがき

近年，コンピュータやタブレット端末の普及に伴って e-ラーニングシステムを用いた学習が広まり，大量の学習データ（学習者の課題への反応データ）を容易に入手できるようになった．人工知能分野では学習データを分析することにより，学習過程における学習者の知識への習熟度や理解度を把握することが課題となっている．学習者の知識状態（学習者が課題の解決に必要な知識をどの程度獲得しているか）を推定することで，未習熟の課題を同定し，個人の成長に最適な指導を行うことが可能となる．これまで，学習過程における学習者の知識状態をモデル化し，過去の学習データから現在の知識状態を推定する手法が多く研究者によって開発されている．一般的に知られている学習者の知識状態を推定する手法は主に次の 3 つに分類される．

1. Bayesian Knowledge Tracing (BKT)[1]
2. Deep Knowledge Tracing (DKT)[12]
3. 項目反応理論 (IRT:Item Response Theory) [16]

BKT は学習過程における学習者の知識状態を隠れマルコフモデルで表現した数理モデルである．学習者が課題解決に必要な知識をどの程度習得しているかを推定することができるため，知的学習支援システム (ITS : Intelligent Tutoring Systems) で利用されている [2][3]．一方，DKT は過去の学習データと特徴量を利用し，深層学習モデルの一つである long short-term memory (LSTM) を用いて学習者の知識状態を推定する [12][13][14]．これらの手法は近年の研究において知識状態の変化に影響する様々な要因が追加され，真の知識状態を表現するためのモデルとして発展してきた．しかし，BKT や DKT 手法には以下のような問題点がある．

1. BKT では学習者の真の知識状態が離散値で表現されているために単純なモデルとなり，高精度な推定が困難である．
2. DKT では学習データへのフィッティングのみでパラメータ学習が行われ，過学習の可能性が高い．

近年では，BKT や DKT の問題点を解決し，知識状態の解釈をさらに多様化するために，学習者の知識状態の推定に IRT が用いられるようになってきた．IRT はテスト理論の一つで過去の学習データを基に学習者の能力値を推定し，課題への成績を予測するために用いられる数理モデルである [16]．BKT，DKT が課題解決に必要な複

数の知識 (スキル) への達成度を予測するモデルであるのに対して, IRT は学習過程で一つのスキルに対する能力値を推定し, 未知の課題への反応を予測するナレッジトレッシングの一種である. 後者の方がより詳細なデータの予測を行っていることになる. IRT では能力値を示す連続隠れ変数 (潜在変数) によって知識状態を表現するため, BKT で推定される離散値の知識状態より柔軟な解釈が可能となる. 先行研究では IRT, BKT, DKT を用いて学習データから学習者の知識状態を推定し, 課題への反応予測精度を比較した実験が行われ, IRT は BKT や DKT に比べて高い精度を示すことが報告されている [9][15].

さらに, 学習者の知識状態の変動をより詳細に表現するために BKT と IRT を組み合わせた手法も提案されているが, どの手法も様々な学習データにおいて IRT より課題への反応予測精度が低いことが報告されている. [9][10]. これらの手法は, 2つのモデル組み合わせることで複雑化したために高精度な推定が困難となった可能性が高い. 一方, IRT は比較的単純かつ学習者の能力値について柔軟な解釈が可能なモデルであるため, 学習者の課題への反応を高精度に予測できると考えられる.

しかし, 標準的な IRT では学習過程における継時的な能力の変化が考慮されていない. そのため正確な能力値推定が行われていない可能性がある. この問題を解決するために, 既存研究では能力値の時系列変化を考慮した IRT の拡張手法が複数提案されており, 学習過程で学習者の能力値変化に影響する様々な要因が考慮されていた手法がある [19][20][21][22].

一方, 堤ら [18] は複数のヒントを含む課題の学習データを用いて学習者の能力値推定を行い, 与えたヒント数ごとに課題への達成確率を予測できる, 時系列データに対応したヒント付きの課題への反応をモデル化した IRT を提案している. 評価実験では学習者が課題に正答するまでに必要とするヒント数の予測精度が IRT を上回ることを示した. しかし, 提案モデルはヒント提示を伴う適応型学習システムの反応予測に特化したモデルであった. このモデルの本質は, ヒント提示の制約を除けば, 能力値が隠れマルコフモデルに従って変動する段階型 IRT の拡張とも解釈できる. また, 隠れ変数が連続値で表現され, SlidingWindow 方式により隠れ変数が過去の学習データにどれだけ依存するかを決定できることから BKT の一般化とも解釈できる. そこで本論文では, 文献 [18] のアイデアをより一般化し, ヒントを含まない学習過程において IRT の時系列モデルとしての一般化, BKT の一般化としての隠れマルコフ IRT モデルを提案する.

提案モデルは, 近年注目されている DKT に対しても優位性を持つ. ディープラー

ニング手法で行われるパラメータ推定はモデル選択の一つと解釈できるが、学習データへのフィッティングのみを目的関数としてモデル選択を行うことは、過学習を起こすことが知られている。これらのモデル選択としての問題は、求める重みパラメータが連続量であり、予測を最大化するためには探索空間が大きすぎることである。一方、提案モデルはモデルの候補数が少ない離散量であるため、交差検証などを用いて容易に最適化できる。

堤ら [18] はヒントの最適化を目的としていたため、学習者に出題する課題の順序が固定されている場合にしか適応できない。しかし、一般的にアダプティブラーニングやアダプティブテストングでは学習者の学習効率を最大にする課題を出題するため、学習者ごとに課題の出題順序が異なる場合が多い。そのため、本研究では学習者への出題順が異なる学習データを用いた場合にも適応できるように拡張する。さらに、堤ら [18] ではデータに最適なウィンドウサイズ L と能力値の変動パラメータ σ の組み合わせを貪欲法を用いて求めていたが、学習データが大規模になるほど最適な組み合わせを求めるのに膨大な時間がかかるという問題があった。提案モデルでは推定時間を短縮し、大規模学習データに適応させるために σ をマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を用いて推定する。

本研究では、これまで学習過程での学習者の知識状態の推定に用いられてきた BKT や DKT,IRT に加え、各手法の拡張手法と提案手法を用いて学習者の反応予測精度比較を行う。学習期間・学習者数・課題数の異なる様々な学習データを用いて実験を行い、提案手法の有効性を示す。

2 学習者の知識状態推定モデル

本章では提案モデルに関連する知識状態の推定モデルを説明する。本研究では学習履歴データにおける学習者数を J 、課題数を M と表し、学習者 j の課題 m に対する反応データ x_{jm} を以下で表す。

$$x_{jm} = \begin{cases} 1: & \text{学習者 } j \text{ が課題 } m \text{ に正答} \\ 0: & \text{上記以外} \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \{x_{jm}\}, (j = 1, \dots, J, m = 1, \dots, M)$$

2.1 Bayesian Knowledge Tracing(BKT)

BKT は学習過程での学習者の知識状態の変化を隠れマルコフモデルで表現した数理モデルであり、学習者の過去の学習履歴データから課題解決に必要な知識 (スキル) の習熟度を推定する [1]. 学習者の未習熟な知識を同定することで次に学習者が取り組むべき課題を予測することが可能になるため、多くの ITS に用いられている [2][3]. BKT では学習者 j の課題 m に対する知識状態 Z_{jm} を以下で表す.

$$Z_{jm} = \begin{cases} 1: & \text{知識を習得している} \\ 0: & \text{知識を習得していない} \end{cases}$$

さらに、知識状態の遷移確率パラメータとして、 $p(L_0)$: 学習者が事前に知識を習得している確率、 $p(T)$: 知識を習得していない状態から習得する確率、 $p(S)$: 知識を習得している状態で課題に誤答する確率、 $p(G)$: 知識を習得していない状態で課題に正答する確率の 4 つのパラメータをもつ. 学習者 j が課題 m を学習後に知識を習得する確率を $p(Z_{jm} = 1) = p(L_{jm})$ とすると、 $p(L_{jm})$ は式 (1),(2) を用いて式 (3) のように表せる.

$$\begin{aligned} p(L_{jm}|X_{jm} = 1) \\ = \frac{p(L_{jm})(1 - p(S))}{(1 - p(L_{jm}))p(G) + p(L_{jm})(1 - p(S))} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} p(L_{jm}|X_{jm} = 0) \\ = \frac{p(L_{jm})p(S)}{(1 - p(L_{jm}))(1 - p(G)) + p(L_{jm})p(S)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} p(L_{jm}) = p(L_{j,m-1}|X_{j,m-1}) \\ + (1 - p(L_{j,m-1}|X_{j,m-1}))p(T) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ただし、 $p(L_{j1}) = p(L_0)$ とする. 学習者 j が課題 m に正答する確率を次式で求める.

$$\begin{aligned} p(X_{jm} = 1) \\ = p(L_{jm})(1 - p(S)) + (1 - p(L_{jm}))p(G) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Corbett and Anderson の標準的な BKT[1] では知識の忘却、つまり $Z_{j,m-1} = 1$ から $Z_{j,m} = 0$ への遷移は起こらないと仮定されている. また、知識状態の遷移確率が学習

者や課題によらず一定である。このため、多くの研究者によって学習者や課題の個々の特性を考慮した BKT の拡張手法が提案されている。

2.2 BKT の拡張手法

本節では、標準的な BKT に学習者や課題特有の影響を考慮した BKT の拡張手法を紹介する。

2.2.1 Individualized BKT (IBKT)

Yudelso ンら [4] は標準的な BKT において知識状態の初期確率 $p(L_0)$ と遷移確率 $p(T)$ が学習者によらず一定であることを問題視し、 $p(L_0)$ と $p(T)$ を学習者ごとに固有のパラメータとして推定する IBKT を提案した。この研究によって遷移確率 $p(T)$ のみを学習者の固有パラメータすることで推定精度が向上することが示された。

$$p(L_{jm}) = p(L_{j,m-1}|X_{j,m-1}) + (1 - p(L_{j,m-1}|X_{j,m-1}))p(T)_j \quad (2.5)$$

2.2.2 LogisticHMM (LHMM)

BKT や IBKT は知識状態を二値で表現する単純なモデルであったために、知識状態を正確に推定できていない可能性があった。そこで、Pelánek ンら [8] は学習者の知識状態をより詳細に把握するために知識状態 Z_{jm} を段階的な離散値に拡張し、予測反応確率がロジスティック関数に従う LogisticHMM (LHMM) を開発した。LHMM では学習者と課題の相関を表す識別力や学習の難易度をパラメータとして組み込んでおり、課題の特性を考慮した推定が可能となっている。学習者 j の知識状態が $s \in \{1, \dots, S\}$ であるとき、課題 m に正答する確率を以下で表す。

$$p(X_{jm} = 1|Z_{j,m} = s) = \frac{1}{1 + \exp(-a(s/(S-1) - b))} \quad (2.6)$$

ここで、 S は学習者の知識状態数、 a は識別力パラメータ、 b は難易度パラメータを表す。LHMM では知識状態が $Z_{j,m-1} = s-1$ から $Z_{jm} = s$ に遷移する確率を l とし、習得状態の低下と二段階以上の遷移は起こらない。このとき、学習者 j が課題 m で状

態 $Z_{jm} = s$ となる確率は，式 (7)，(8) を用いて式 (9) のように求められる。

$$\begin{aligned} p(Z_{jm} = s | X_{jm} = 1) \\ = \frac{p(X_{jm} = 1 | Z_{jm} = s)p(Z_{jm} = s)}{\sum_{s'=0}^{S-1} p(X_{jm} = 1 | Z_{jm} = s')p(Z_{jm} = s')} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} p(Z_{jm} = s | X_{jm} = 0) \\ = \frac{p(X_{jm} = 0 | Z_{jm} = s)p(Z_{jm} = s)}{\sum_{s'=0}^{S-1} p(X_{jm} = 0 | Z_{jm} = s')p(Z_{jm} = s')} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} p(Z_{jm} = s) = \sum_{s'=1}^S p(Z_{j,m} = s | Z_{j,m-1} = s') \\ \cdot p(Z_{j,m-1} = s') \end{aligned} \quad (2.9)$$

また，学習者 m が課題 j に正答する確率を以下で表す。

$$\begin{aligned} p(X_{jm} = 1) = \sum_{s'=1}^S p(X_{jm} = 1 | Z_{jm} = s') \\ \cdot p(Z_{jm} = s') \end{aligned} \quad (2.10)$$

以上のように BKT 手法は学習者個人や課題を識別した手法や，知識状態を段階的に扱える LHMM などに拡張されてきたが，一つ前の知識状態のみにしか依存しないことや知識状態の段階の遷移が隣接する段階への遷移に制限されていることなど，モデルとしての柔軟性に欠けるという問題がある。

2.3 Deep Knowledge Tracing (DKT)

DKT はスキル間の独立を仮定せず，過去の学習データから時系列の深層学習モデルである LSTM を用いて課題への反応を予測するモデルである [12]。LSTM は画像処理や自然言語処理など広範囲な分野で用いられており，教育分野でも応用が進んでいる [12][13][14][15]。DKT では時点 t までの学習者の課題への反応ベクトル $X_t = \{x_1, \dots, x_t\}$ を入力データとし，時刻 t における各課題に対する予測反応ベクトル y_t を出力する。時刻 t の LSTM の隠れ層を h_t と表すとき DKT モデルは以下で表

される.

$$\begin{aligned}
i_t &= \sigma(W_{ix}x_t + W_{ih}h_{t-1} + b_i) \\
g_t &= \sigma(W_{gx}x_t + W_{gh}h_{t-1} + b_g) \\
f_t &= \sigma(W_{fx}x_t + W_{fh}h_{t-1} + b_f) \\
o_t &= \sigma(W_{ox}x_t + W_{oh}h_{t-1} + b_o) \\
m_t &= f_t \odot m_{t-1} + i_t \odot g_t \\
h_t &= o_t \odot m_t \\
z_t &= W_{zm}m_t + b_z \\
y_t &= \sigma(z_t)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$W_{ix}, W_{ih}, W_{gx}, W_{gh}, W_{fx}, W_{fh}, W_{ox}, W_{oh}, W_{zm}$ は重み行列であり, b_i, b_g, b_f, b_o, b_z はバイアスベクトルを表す. また, \odot はアダマール積, σ はシグモイド関数を示す.

パラメータの学習は, 次式の反応予測に関する損失関数を最小化することで実現できる.

$$L_p = \sum_t l(y^T \sigma(q_{t+1}), a_{t+1}) \tag{2.12}$$

ここで, 出力 y は時点 t での予測反応ベクトル y_t , q_{t+1} は時点 $t+1$ で実際に学習者が解答した課題を示す one-hot ベクトル, a_{t+1} は時点 $t+1$ での課題への正誤を表し, l は交差エントロピー誤差関数を示す.

近年, DKT 手法は高い予測精度を示すことで注目されている. しかし, 一般にディープラーニングのパラメータ推定は学習データへのフィッティングのみを目的関数としてモデル選択を行うため, 過学習を起こすことが知られている. DKT の問題は求める重みパラメータが連続量であり, 予測を最大化するためには探索空間が大きすぎることである.

3 Item Response Theory(IRT)

3.1 2母数ロジスティックモデル

IRT はテスト理論の一つで過去の学習データを基に学習者の能力値を推定し, 課題の成績を予測するために用いられる数理モデルである [16][24]. 近年では, 学習過程での学習者の習熟度をより詳細に把握するための手法として用いられるようになってきた. IRT は能力値を示す連続隠れ変数 (潜在変数) によって知識状態を表現するため,

BKT で推定される離散値の知識状態より柔軟な解釈が可能となる．ここでは，IRT の中でも一般的に多く用いられる 2 母数ロジスティックモデルについて説明する．2 母数ロジスティックモデルでは，学習者 j の課題 m に対する反応データ x_{jm} 得られたとき，能力値 θ_j の学習者 j が課題 m に正答する確率を次式で表す．

$$p(x_{jm} = 1 | \theta_j) = \frac{1}{1 + \exp(-a_m(\theta_j - b_m))} \quad (3.1)$$

ここで， a_m は課題 m の識別力パラメータ， b_m は課題 m の難易度パラメータ， θ_j は学習者 j の能力パラメータを表す．項目パラメータ a_m ， b_m は学習データから事前に推定した値を用いる．

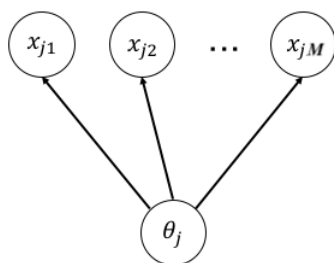


図 1: 標準的な IRT

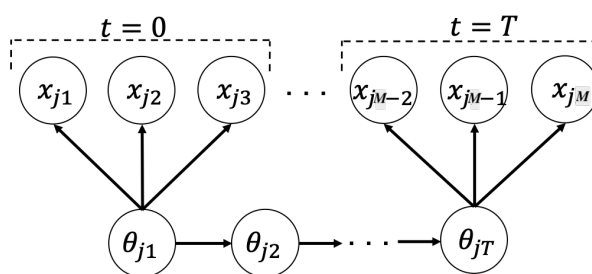


図 2: Martin らの手法

3.2 時系列 IRT モデル

3.1 節で紹介した標準的な IRT では学習過程における継時的な能力の変化が考慮されていない．しかし，実際には学習が進むと学習者の真の能力は変化する．そのため標準的な IRT では能力値の推定精度が低下している可能性がある．既存研究では信頼性の高い能力値推定手法として，能力値が隠れマルコフ過程に従って変化する新たな IRT 手法が開発されている．Martin ら [20] は図 2 のように学習過程を複数の範囲に分割し，ある範囲での能力値が一つ前の範囲での能力値に依存して変化する手法を開発している．この手法では学習者 j が課題 m に正答する確率を次式で表す．

$$p(x_{jm} = 1 | \theta_{jt}) = \frac{1}{1 + \exp(-a_m(\theta_{jt} - b_m))} \quad (3.2)$$

$$\theta_{j0} \sim N(0.0, 1.0) \quad (3.3)$$

$$\theta_{jt} \sim N(\theta_{jt-1}, \sigma) \quad (3.4)$$

ここで、 $N(\mu, \sigma)$ は平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布を表す。Martin らの手法は能力値の変動パラメータ σ の最適値を学習データから推定するため、標準的な IRT より柔軟に能力変化を表現することができる。しかし、学習データを分割するために短期間の学習では一回の能力推定に利用できるデータ数が少なく、分割回数も制限されるため高精度な推定が困難である。

また、Wang ら [19] は長期の学習に注目し、学習者の能力の成長率パラメータによって学習日ごとに能力値を成長させる手法 (DIR : Dynamic item response) を開発した。DIR には学習者の能力値・項目難易度・学習日 t ごとの能力成長・課題ごとの学習効果をパラメータとして用いており、様々な要因による日々の能力成長を考慮している。そのため、他の IRT 拡張手法と比較して能力値が高い値で推定される傾向にある。

$$\theta_{jt} = \theta_{jt-1} + c_j(1 - \rho\theta_{jt-1})\Delta_{jt}^+ + \omega_{jt} \quad (3.5)$$

ここで、 Δ_{jt}^+ は学習者 j の学習日 $t-1$ から学習日 t のまでの経過日数、 c_j は学習者 j の平均成長率、 ω_{jt} は学習日 t の成長幅を表す。この手法はパラメータが多い複雑なモデルであるためにパラメータ推定が複雑になり、様々な学習過程に適応させることが難しい。そのため、学習データによって反応予測精度に差が生じてしまう問題点がある。

Molenaar ら [21] は学習者が1つの課題を解くために必要とした時間と学習全体にかかった反応時間を考慮した手法を提案している。この手法では学習全体の能力値は一定であるが、各課題への反応時間の違いから課題ごとに応答プロセス (解法やアプローチ) が異なることに注目しており、応答プロセスがマルコフ過程に従って変化していると仮定した IRT 手法である。本研究では学習者が課題に取り組んだ時間は考慮せず、課題への正誤データを元に学習過程での能力変化に注目する。このため、Molenaar らの手法との反応予測精度比較は行わない。

Wilson ら [15][22] は学習の経過時間によって能力推定に用いる学習データを徐々に忘却させる手法 (:Temporal Item Response Theory) を提案している。TIRT では、学習者がそれまでに取り組んだすべての学習データを用いて能力値推定を行い、課題への予測正答確率を以下で求める。

$$p(x_{jm} = 1 | \theta_{jt}) = \frac{1}{1 + \exp(-\tilde{a}_{\Delta_t}(\theta_{jt} - b_m))} \quad (3.6)$$

$$\tilde{a}_{\Delta_t} = \frac{a_m}{\sqrt{1 + \sigma a_m \Delta_t}} \quad (3.7)$$

θ の事前分布は式 (15),(16) に従う. Δ_t は課題に取り組んだ時点からの経過時間を表しており, 経過時間が増加するごとに \tilde{a} が小さくなり徐々に過去の学習データを忘却する. Wilson ら [15] では, 能力値の学習データへの依存度を変化させることで DKT や IRT 手法より予測精度が向上することが示されている.

4 隠れマルコフ IRT モデル

前章では学習過程での学習者の能力値の継時的変化を考慮した IRT 手法として Martin らの手法, DIR, TIRT を紹介した. Martin らの手法では学習過程を分割しているために能力推定に用いる学習データが少なくなる場合があり, DIR は学習者の能力値に影響するパラメータが多いためにパラメータ推定が複雑になるという問題点があった.

信頼性の高い能力推定を行うためには, 学習過程で学習者の真の能力値が変化することを考慮し, 推定に用いるデータのある時点以前で忘却させる必要がある. しかし, データを忘却させることで能力推定に用いられるデータ数が少なくなり能力値が過剰評価されやすくなるというトレードオフの問題が生じる. このトレードオフを解消するために, 堤ら [18] では学習者の能力変化の度合いと, 能力値推定に用いる学習データ数を制限した隠れマルコフ IRT を提案した. この手法により, ヒントを含んだ課題において学習者の反応予測精度が向上することを示した.

しかし, 教育現場ではヒントを含む課題を用いた学習の機会は少なく, 解答を正答・誤答で評価する課題が多い. そこで, 本研究では堤ら [18] で提案した隠れマルコフ IRT を正誤学習データに適応させた隠れマルコフ IRT の一般化手法を新たに提案する (以降 Hidden Markov IRT:HMIRT と表記する). また, 堤ら [18] ではヒントの最適化を目的としていたため, 学習者に出題する課題の順序が固定されている場合にしか適応できなかった. しかし, 一般的にアダプティブラーニングやアダプティブテストングでは学習者の学習効率を最大にする課題を出題するため, 学習者ごとに課題の出題順序が異なる場合が多い.HMIRT は学習者への出題順が異なる学習データを用いた場合にも適応できるように拡張する.

HMIRT はある時点 t の能力値 θ_{jt} が一つ前の時点 $t-1$ での能力値 θ_{jt-1} に依存する隠れマルコフモデルを IRT に組み込んだモデルである. 図 3 のように能力値推定に用いる学習データ数をパラメータ (ウィンドウサイズ L) で制限し, それ以前の学習

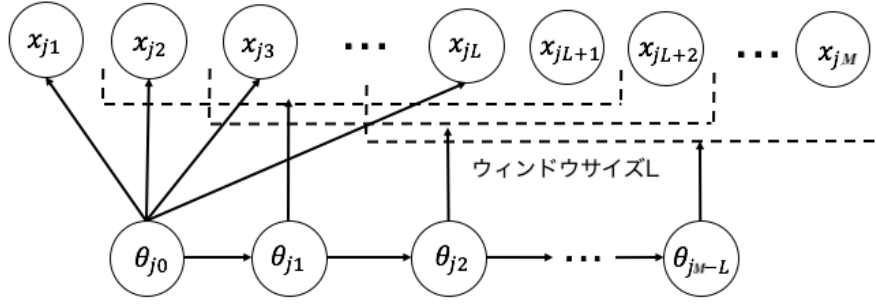


図 3: HMIRT

データを忘却する．学習過程における $\{t\}, (0, \dots, M - L)$ は,

$$\begin{cases} t = 0: & m = 1, \dots, L \text{ のとき} \\ t = 1: & m = 2, \dots, L + 1 \text{ のとき} \\ \vdots & \vdots \\ t = M - L: & m = M - L - 1, \dots, M \text{ のとき} \end{cases} \quad (4.1)$$

とする．

本研究では課題 $m = L$ 以降の能力値推定において，推定に用いる学習課題を 1 題ずつずらして行うことで能力値の推移を考慮するが，この手法はウィンドウの重複をなくすことで Martin らの手法 [20] を表現することも可能である．また，能力値推移幅を制限するパラメータ σ をもち，各パラメータの最適値が予測が最大になるように推定されるために，あらゆる学習過程に適応できるモデルである．

HMIRT では時点 t において学習者 j が課題 m に正答する確率 P_{mjt} を次式で表す．

$$P_{mjt} = \frac{1}{1 + \exp(-a_m(\theta_{jt} - b_m))} \quad (4.2)$$

a_m は課題 m の識別力パラメータ， b_m は課題 m の難易度パラメータ， θ_{jt} は時点 t で学習者 j の能力パラメータを表す．ただし，

$$\theta_{jt} \sim N(\theta_{jt-1}, \sigma) \quad (4.3)$$

$$\theta_{j0} \sim N(0, 1) \quad (4.4)$$

式 (4.3) から σ は時間経過による能力の変動の大きさを表すパラメータとみなせる．HMIRT のウィンドウサイズ L と能力値の変動パラメータ σ は，能力推定に利用する学習データ数と能力推定値のトレードオフを解決するための重要な役割をもつ．

5 パラメータ推定

HMIRT ではパラメータ推定法としてマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を用いた期待事後確率推定 (Expected A Posteriori: EAP) を用いる [23]. 本研究では, 学習者ごとに課題の出題順序が異なる場合にもパラメータ推定を可能とするため, 学習者 j が n 番目に解いた課題番号を表す順序データ $\mathbf{I}_j = \{I_{j1}, \dots, I_{jn}\}$ を用いる. また, 堤ら [18] の HMIRT ではデータに最適なウィンドウサイズ L と能力値の変動パラメータ σ の組み合わせを貪欲法を用いて求めていたが, σ が連続量であるため学習データが大規模になるほど最適な組み合わせを求めるのに膨大な時間がかかるという問題があった. 本研究では σ の推定時間を短縮し, 大規模学習データに適応させるために σ を MCMC で推定する.

ここで, 各パラメータの集合をそれぞれ $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_{10}, \dots, \theta_{JM-L}\}$, $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_m\}$, 各事前分布をそれぞれ $g(\theta_{jt}|\sigma)$, $g(a_m)$, $g(b_m)$, $g(\sigma)$ と表す. このとき, 反応データ \mathbf{X} , 順序データ \mathbf{I}_{jn} を所与としたパラメータの事後分布は以下のように表せる.

$$\begin{aligned}
 p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b} | \mathbf{X}) & \propto L(\mathbf{X} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{a}, \mathbf{b})g(\mathbf{a})g(\mathbf{b})g(\boldsymbol{\theta}|\sigma)g(\sigma) \\
 & = \left[\prod_{t=0}^{M-L} \prod_{n=t+1}^{L+t+1} (P_{I_{jn},jt})^{x(jI_{jn})} (1 - P_{I_{jn},jt})^{1-x(jI_{jn})} \right] \\
 & \quad \left[\prod_{m=1}^M g(a_m) \cdot g(b_m) \right] \left[\prod_{t=0}^{M-L} \prod_{j=1}^J g(\theta_{jt}|\sigma) \right] g(\sigma)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

MCMC の手法のうち, メトロポリスヘイスティングス法 [23] でパラメータ推定を行う. 以下に手順を示す.

1. 初めに, 各パラメータの初期値を事前分布からランダムにサンプリングする. 本研究では, 各パラメータの事前分布はそれぞれ次のように設定する.

$$\log a_m \sim N(0.0, 0.2)$$

$$\theta_{j0} \sim N(0.0, 1.0)$$

$$\theta_{jt} \sim N(\theta_{jt-1}, \sigma)$$

$$\sigma \sim IG(1.0, 1.0)$$

$$b_m \sim N(0.0, 1.0)$$

2. $\theta_j = \{\theta_{j0}, \dots, \theta_{jM-L}\}$ を現在のパラメータ値 θ_j' に依存する提案分布 $q(\theta_j | \theta_j')$ にしたがってサンプリングし、以下の採択率に基づいて採択する.

$$\begin{aligned} & \alpha(\theta_j | \theta_j') \\ &= \min \left(\frac{L(\mathbf{X}_j | \theta_j, \mathbf{a}', \mathbf{b}') \prod_{t=0}^{M-L} g(\theta_{jt})}{L(\mathbf{X}_j | \theta_j', \mathbf{a}', \mathbf{b}') \prod_{t=0}^{M-L} g(\theta'_{jt})}, 1 \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

提案分布には $N(\theta_j', \Sigma \mathbf{1}_{M-L})$ を用いる. ここで, $\mathbf{1}_n$ は $n \times n$ の単位行列を表す. 本研究では, $\Sigma = 0.01$ とする.

3. パラメータ a_m と b_m についても上記と同様にサンプリングを行う.
4. 初期値の影響を無くすために, burn-in で設定した回数より前のサンプルは破棄する. また, 自己相関を考慮し, 得られたサンプルの thinning を行い, そのサンプル列の期待値を推定値とする. 本研究では burn-in を 20,000 回として, 20,000~40,000 回のうちから 1,000 回の間隔でサンプルを取得し, その平均値を EAP 推定値とした. 提案モデルの MCMC アルゴリズムの擬似コードを Algorithm1 に示す.

6 評価実験

6.1 実験データ

これまで, 学習過程での学習者の知識状態の推定に用いられてきた BKT や DKT, IRT に加え, 各手法の拡張手法を紹介した. 本研究では既存手法と提案手法 HMIRT を用いて学習データから学習者の知識状態または能力値を推定し, 学習者の課題への反応予測を行う. 学習期間・学習者数・課題数の異なる様々な学習データを用いて実験を行い, 反応予測精度から各手法の問題点や提案手法の適応性を示す.

本研究では e-ラーニングを用いて収集した以下の時系列学習データを用いて実験を行う.

1. プログラミング基礎 1 (7 課題 148 人) [24]
2. プログラミング基礎 2 (18 課題 75 人) [18]
3. 情報社会と情報倫理 (13 課題 23 人) [24]
4. 離散数学 (125 課題 77 人) [24]
5. ASSISTments 2009-2010(skill_builder) (2635 課題 2732 人)[12]

Algorithm 1 MCMC algorithm

Given maximum chain length S , burn-in B , interval E
Initialize MCMC sample $A \leftarrow \phi$
Initialize $\theta^0, \mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0, \sigma^0$

- 1: **for** $s = 1$ to S **do**
- 2: **for** $j \in \{1 \cdots J\}$ **do**
- 3: Sample $\theta_j^s \sim N(\theta_j^{s-1}, \sigma \mathbf{1}_{M-L})$
- 4: Accept θ_j^s with the probability $\alpha(\theta_j^s | \theta_j^{s-1})$
- 5: **end for**
- 6: **for** $i \in \{1 \cdots I\}$ **do**
- 7: Sample $a_m^s \sim N(a_m^{s-1}, \sigma \mathbf{1})$
- 8: Accept a_m^s with the probability $\alpha(a_m^s | a_m^{s-1})$
- 9: Sample $b_m^s \sim N(b_m^{s-1}, \sigma \mathbf{1})$
- 10: Accept b_m^s with the probability $\alpha(b_m^s | b_m^{s-1})$
- 11: Sample $\sigma^s \sim N(\sigma^{s-1}, \sigma \mathbf{1})$
- 12: Accept σ^s with the probability $\alpha(\sigma^s | \sigma^{s-1})$
- 13: **end for**
- 14: **if** $s \geq B$ and $s \% E = 0$ **then**
- 15: $A \leftarrow (\theta^s, \mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s, \sigma^s)$
- 16: **end if**
- 17: **end for**
- 18: **return** average value of A

(1)~(4) は、大学生を対象に e-ラーニングシステム SAMURAI を用いて収集した学習データである。ASSISTments(2009-2010) はオンライン教育システムを用いた小学生の算数に関する課題への反応データであり、近年 Knowledge Tracing の多くの研究で反応予測精度比較に用いられている。ASSISTments(2009-2010) には各課題で必要とされる知識を表す skill_name が付与されている。BKT,IRT を用いた実験では ASSISTments(2009-2010) を skill_name 別に分けた学習データを作成し、各 skill_name での反応予測精度の平均値を ASSISTments(2009-2010) の反応予測精度として算出する。DKT を用いた実験では ASSISTments(2009-2010) の分割は行わず、すべての skill_name を用いて反応予測を行う。また、ASSISTments(2009-2010) で

は各スキルの回答者が 30 人以上、各学習者の解答課題数が 10 問以上の反応データを利用する。

6.2 データに最適なウィンドウサイズの決定

HMIRT は能力値推定に用いる課題数 (ウィンドウサイズ) L の値によって異なるモデルとなるため、学習データごとに最適な L を求める必要がある。本研究では、10 分割交差検証で実験を行う。以下の手順で算出される予測精度を最大にする L を最適値とする。

1. L を所与として、訓練データから課題の識別力パラメータ \mathbf{a} 、難易度パラメータ \mathbf{b} 、能力の変動パラメータ σ を MCMC アルゴリズムで推定する。
2. (1) で求めたパラメータを所与とし、テストデータから学習者 j の能力値 θ_j を MCMC アルゴリズムで推定する。課題 $m \in \{2, \dots, M\}$ で正答する確率 P_{mjt} を求め、 $P_{mjt} \geq 0.5$ のとき $\hat{x}_{jm} = 1$ 、 $P_{mjt} < 0.5$ のとき $\hat{x}_{jm} = 0$ を予測反応 \hat{x}_{jm} とする。 P_{mjt} の計算に利用する各学習者の能力値 $\hat{\theta}_{jt}$ は、以下の方法で求める。

(a) $m - 1 < L$ のとき

課題 $m - 1$ 以前のデータ $\mathbf{x}_j^{(m-1)} = \{x_{j1}, \dots, x_{j,m-1}\}$ を用いて以下の EAP 推定法で求める。

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{j0} &= E[\theta_{j0} | \mathbf{x}_j^{(m-1)}] \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{j0} g(\theta_{j0}) L(\mathbf{x}_j^{(m-1)} | \theta_{j0}) d\theta_{j0}}{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta_{j0}) L(\mathbf{x}_j^{(m-1)} | \theta_{j0}) d\theta_{j0}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここで、

$$\theta_{j0} \sim N(0.0, 1.0) \quad (6.2)$$

$$L(\mathbf{x}_j^{(m-1)} | \theta_{j0}) = \prod_{m'=1}^{m-1} (P_{m'jt})^{x_{jm'}} \quad (6.3)$$

実際には、式中の積分は $-3.0 < \theta_{j0} < 3.0$ での 100 点の区分求積法を用いて近似値を求める。

- (b) $m - 1 \geq L$ のとき MCMC アルゴリズムで推定した $\hat{\theta}_{jt} (t = 1, \dots, M - L)$ を用いる。

3. 学習者 j の課題 m における実際の反応データ x_{jm} と予測反応 \hat{x}_{jm} を用いて、各課題 m における一致割合 c_m を次式で求める.

$$c_m = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \psi(\hat{x}_{jm}, x_{jm}) \quad (6.4)$$

ここで、 $\psi(\hat{x}_{jm}, x_{jm})$ は \hat{x}_{jm} と x_{jm} が一致するときに 1、そうでないときに 0 をとる関数とする.

4. 手順 (3) で求めた一致割合を全ての課題について平均し、HMIRT の予測精度 c として次式を求める.

$$c = \frac{1}{M-1} \sum_{m=2}^M c_m \quad (6.5)$$

予測精度 c が最大になる L を実験データにおける最適値として HMIRT に用いる.

5. さらに、手順 (2) で得られる各課題への予測正答確率 P_{mjt} と実際の反応データ x_{jm} から予測正答確率の誤差 e を次式で求める.

$$e = \frac{1}{M-1} \sum_{m=2}^M \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sqrt{(x_{jm} - P_{mjt})^2} \quad (6.6)$$

6.3 反応予測精度比較

本節では、学習データに最適な L を用いた HMIRT と以下の既存手法について反応予測精度 c を分析する. 本実験での比較手法を表 1 に示す. 比較手法のパラメータ推定は提案手法と同様に MCMC で行った. 特に重要なパラメータは次のように設定した. Martin ら [20], DIR 手法では、学習データに学習期間や学習範囲が設定されていない場合、予測精度が最も高くなるように学習過程を分割した. DIR 手法におけるパラメータについて、 $\rho = 0.1, \Delta_{jt}^+ = 1.0$ とした. TIRT では Wilson ら [15] で行われた実験と同様に課題の識別力パラメータを $\mathbf{a} = 1.0$ に固定した.

比較手法を用いた実験は HMIRT と同様に前節の予測精度算出手順に沿って行い、得られる c を反応予測精度とした. 実験結果を表 2 に示す. HMIRT における学習データごとに最適な L と σ の推定値は表中に記載した. 予測精度 (Accuracy) は前節の手順で求めた反応予測精度 c を表し、error は予測正答確率の誤差 e を表す. また、

表 1: 比較手法

提案手法	HMIRT
比較手法	BKT[1]
	IBKT[4]
	LHMM[8]
	DKT[12]
	IRT[16]
	Martin[20]
	DIR[19]
	TIRT[22]

各学習データでの学習者全体の正解率を示した。表 2 より，プログラミング基礎 1 は TIRT の予測精度が最も高く，他の学習データでは HMIRT が最も高い予測精度を示した。予測正答率の誤差についても予測精度と同様の結果を示しており，HMIRT はより正確な反応予測が行われていると考えられる。特に，オンライン教育システムによる大規模な学習データ Assistments2009-2010 において DKT,TIRT より高い予測精度を示すことから，HIRT は出題順序が固定されていない学習にも適応できていることがわかる。

HMIRT では学習データに最適なウィンドウサイズ L は 2~4 の値が多く，能力推定時に学習データを徐々に忘却する TIRT も同様に高い予測精度を示していることから，時間経過によって学習データへの依存度を減少させる方法は能力推定の精度の向上に有効であることがわかる。学習データへのフィッティングを目的とした DKT に対して，HMIRT や TIRT は確率モデルであり，予測精度を最適化するための学習データへの依存度パラメータを容易に推定できることが優れた点である。Martin ら [20] の時系列 IRT,DIR 手法はチューニングパラメータの設定が困難であり，様々な学習データに対して適応させることができなかった。また，BKT, IBKT,LHMM は IRT や時系列 IRT より推定するパラメータ数が少ないため比較的高速に予測することが可能だが，モデルが単純であるために他の手法と比べて予測精度が低下することがわかった。

表 2: 反応予測精度比較

学習データ	正解率	予測精度									
		HMIRT (L, σ)	BKT	IBKT	LHMM	DKT	IRT	Martin	DIR	TIRT	
プログラミング基礎 1	60.4%	Accuracy	0.747	0.647	0.641	0.642	0.702	0.696	0.656	0.688	0.758
		error	0.404	0.469	0.495	0.474	0.379	0.433	0.434	0.440	0.388
プログラミング基礎 2	65.8%	Accuracy	0.773	0.696	0.712	0.696	0.645	0.712	0.707	0.725	0.736
		error	0.375	0.452	0.477	0.452	0.395	0.489	0.398	0.405	0.375
情報社会と情報倫理	81.2%	Accuracy	0.875	0.836	0.813	0.831	0.833	0.846	0.854	0.854	0.850
		error	0.242	0.373	0.391	0.373	0.250	0.276	0.270	0.264	0.264
離散数学	45.3%	Accuracy	0.746	0.619	0.624	0.624	0.516	0.732	0.734	0.738	0.682
		error	0.380	0.484	0.510	0.494	0.441	0.412	0.404	0.401	0.771
Assistment (2009-2010)	62.8%	Accuracy	0.753	0.686	0.688	0.661	0.687	0.701	0.694	0.650	0.707
		error	0.391	0.445	0.443	0.460	0.408	0.430	0.433	0.461	0.419

さらに各実験において、正解予測と誤答予測についての適合率, 再現率, F 値を算出した。結果を表 3 に示す。表 3 より、HMIRT と TIRT が比較的高い F 値を示していることがわかる。反応予測では学習者への支援を行うために学習者が誤答する場合を正しく予測できる方が重要となる。HMIRT は情報社会と情報倫理は以外のデータで誤答予測の F 値が高い値を示しており、学習支援システムなどへの応用も有効であると考えられる。情報倫理と情報社会は正解率の高い学習データであるため、どの手法でも誤答の予測がうまくできていないことがわかった。

表 3: 適合率, 再現率, F 値

学習データ	比較手法	正答の予測			誤答の予測			F 値平均
		適合率	再現率	F 値	適合率	再現率	F 値	
プログラミング基礎 1	HMIRT	0.761	0.830	0.793	0.699	0.605	0.646	0.720
	BKT	0.660	0.790	0.718	0.031	0.029	0.030	0.374
	IBKT	0.667	0.844	0.745	0.355	0.598	0.444	0.595
	LHMM	0.661	0.777	0.711	0.392	0.540	0.448	0.580
	DKT	0.759	0.749	0.752	0.632	0.639	0.631	0.691
	IRT	0.715	0.845	0.773	0.672	0.487	0.561	0.667
	Martin	0.764	0.654	0.702	0.693	0.566	0.619	0.660
	DIR	0.749	0.733	0.739	0.608	0.628	0.615	0.677
	TIRT	0.731	0.941	0.821	0.847	0.457	0.580	0.700
プログラミング基礎 2	HMIRT	0.795	0.863	0.827	0.554	0.686	0.607	0.717
	BKT	0.716	0.907	0.799	0.000	0.000	NA	NA
	IBKT	0.710	0.929	0.802	0.518	0.216	0.303	0.553
	LHMM	0.715	0.901	0.797	0.490	0.248	0.325	0.561
	DKT	0.707	0.897	0.790	0.501	0.262	0.338	0.564
	IRT	0.746	0.826	0.782	0.438	0.569	0.485	0.634
	Martin	0.754	0.837	0.793	0.579	0.460	0.510	0.651
	DIR	0.762	0.807	0.783	0.574	0.505	0.534	0.658
	TIRT	0.718	0.978	0.827	0.223	0.871	0.321	0.574
情報社会と情報倫理	HMIRT	0.887	0.974	0.927	0.240	0.357	0.283	0.605
	BKT	0.841	1.000	0.911	NA	0.000	NA	NA
	IBKT	0.841	1.000	0.911	NA	0.000	NA	NA
	LHMM	0.841	0.989	0.908	0.100	0.011	0.020	0.464
	DKT	0.851	0.947	0.896	0.259	0.111	0.150	0.523
	IRT	0.856	0.985	0.914	0.079	0.250	0.116	0.515
	Martin	0.874	0.973	0.920	0.560	0.185	0.521	0.721
	DIR	0.883	0.960	0.919	0.598	0.269	0.518	0.719
	TIRT	0.901	0.921	0.908	0.344	0.418	0.364	0.636
離散数学	HMIRT	0.745	0.802	0.772	0.664	0.730	0.695	0.733
	BKT	0.654	0.905	0.758	0.077	0.049	0.060	0.409
	IBKT	0.662	0.885	0.755	0.567	0.276	0.352	0.553
	LHMM	0.650	0.914	0.758	0.571	0.222	0.304	0.531
	DKT	0.655	0.738	0.693	0.612	0.512	0.556	0.625
	IRT	0.742	0.778	0.759	0.662	0.705	0.683	0.721
	Martin	0.745	0.779	0.761	0.708	0.666	0.686	0.724
	DIR	0.747	0.789	0.767	0.718	0.665	0.690	0.729
	TIRT	0.772	0.598	0.672	0.781	0.612	0.685	0.679
ASSISTmensts 2009-2010	HMIRT	0.784	0.779	0.775	0.608	0.558	0.566	0.671
	BKT	0.670	0.834	0.728	0.236	0.222	0.217	0.472
	IBKT	0.675	0.819	0.726	0.420	0.322	0.332	0.529
	LHMM	0.685	0.827	0.736	0.423	0.320	0.339	0.408
	DKT	0.680	0.864	0.761	0.638	0.371	0.461	0.611
	IRT	0.744	0.679	0.699	0.514	0.558	0.518	0.608
	Martin	0.726	0.697	0.700	0.520	0.526	0.505	0.602
	DIR	0.703	0.669	0.678	0.486	0.521	0.491	0.585
	TIRT	0.770	0.699	0.717	0.522	0.563	0.525	0.621

6.4 学習者の能力値推移

本節では HMIRT と IRT を用いて推定した学習者の能力値を比較し，HMIRT の特徴を分析する．図 4~6 はプログラミング基礎 2 の学習データについて 3 人の学習者の能力値推移を表す．図の右上は各学習者の反応データを示しており，-1 は未解答データを表す．学習データに最適な HMIRT ($L = 3, \sigma = 0.5$) はウィンドウサイズと能力の変動幅が小さいため，能力推定に直近の反応データよく反映するが，能力値の急激な変動を抑制するモデルとなっている．図 4 より，学習者 1 のように正答と誤答と繰り返す学習者は，IRT を用いた能力推定では推定値が安定せず過剰評価する傾向がある．HMIRT では能力値の変動幅を推定することで能力値の急激な変動を避け，比較的安定した推定値となる．また，図 5,6 は能力値に反応データが強く反映されている例であり，直近の学習データを用いて推定を行うことで学習者の能力変化により早く対応することができる．このように，HMIRT は能力値推定に利用するデータ数と能力変動幅の最適値を推定することで，より学習データに適応したモデルを実現できる．

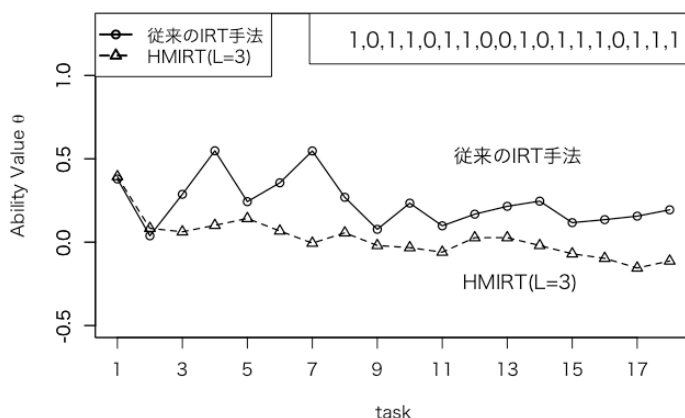


図 4: 学習者 1 の能力値推移

7 まとめ

近年，人工知能分野ではコンピュータやタブレット端末から得られる教育ビッグデータを分析することにより，学習過程における学習者の知識への習熟度や理解度を把握することが課題となっている．本論文では学習データから学習者の知識状態を推定し，未知の課題への反応を正確に予測することを目的とした．具体的には，文献 [18] のアイデアをより一般化し，ヒントを含まない学習過程において IRT の時系列モデルとし

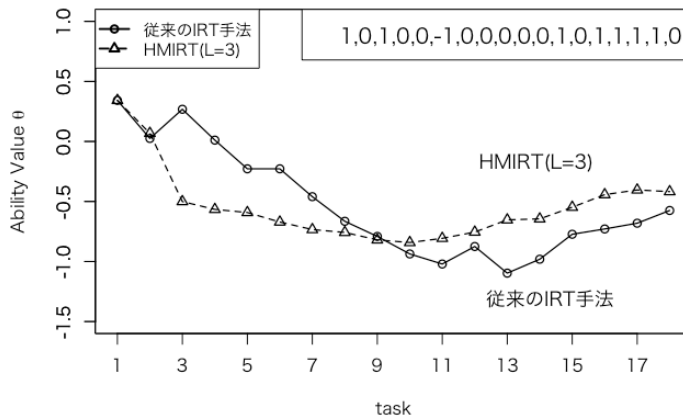


図 5: 学習者 2 の能力値推移

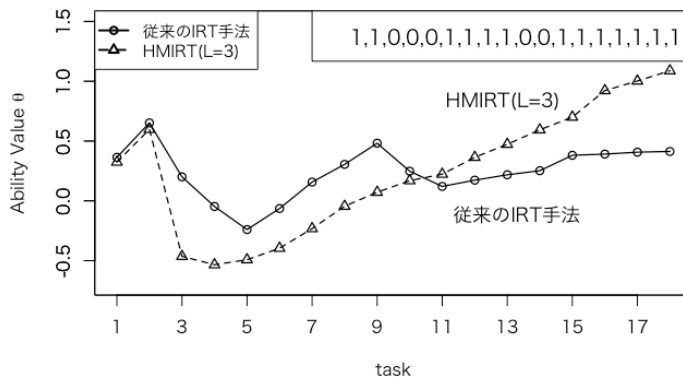


図 6: 学習者 3 の能力値推移

ての一般化, BKT の一般化としての隠れマルコフ IRT モデル (HMIRT) を提案した. HMIRT は学習者ごとに課題の出題順序が異なる場合にもパラメータ推定を可能とし, さらにパラメータの推定効率向上のため能力の変動幅パラメータ σ を MCMC 法で推定した. 評価実験では BKT, DKT, IRT の既存手法と HMIRT を用いて学習者の反応予測精度比較を行い, HMIRT が既存手法の反応予測精度を改善することを示した. また, HMIRT は能力推定に用いる学習データ数と能力の変動幅の最適値を推定することで様々な学習データに適応することを示した. さらに, 実験結果から反応予測精度向上には学習データの忘却を調整することが重要であることがわかった.

IRT や HMIRT は一つの課題につき解決に必要なスキル（知識）が一つあると仮定した上で能力値推定を行い，課題への反応予測を行なっている．しかし，近年，DKT におけるナレッジトレーシングでは一つの課題に複数のスキルが存在すると仮定し，スキルごとの学習者の達成度を予測する研究が行われている．HMIRT は補償型の IRT モデルに拡張することで，あるスキルにおける能力値が別のスキルの能力値の高さによって補償されるモデルになる．今後は，学習者の知識状態をより詳細に把握するため，HMIRT を多次元のスキルに適用するモデルに拡張していきたい．

謝辞

本研究の遂行にあたって、終始ご指導、ご助言を賜りました植野真臣教授、宇都雅輝助教に深く感謝いたします。また、研究についてご助言をいただきました川野秀一准教授、研究に関する議論や論文執筆についてご指摘いただきました先輩方、研究室の皆様感謝いたします。

参考文献

- [1] A.T. Corbett and J.R. Anderson, " Knowledge tracing: Modeling the acquisition of procedural knowledge, " *User Modeling and User-Adapted Interaction*, vol. 4, no. 4, pp. 253-278(1995)
- [2] Beck J, Chang Km, Mostow J, Corbett A," Does help help? introducing the bayesian evaluation and assessment methodology,"*Intelligent Tutoring Systems*, Springer, pp.383-394,(2008)
- [3] Sao Pedro M, Baker R, Gobert J ,"Incorporating scaffolding and tutor context into bayesian knowledge tracing to predict inquiry skill acquisition."*Educational Data Mining* (2013).
- [4] Yudelson.M, Koedinger.K, G.J. Gordon, "Individualized Bayesian Knowledge Tracing Models," *Artificial Intelligence in Education 2013*, Springer, pp. 171-180,(2013)
- [5] Y. Qiu, Y. Qi, H. Lu, Z. A. Pardos, and N. T.Heffernan. "Does time matter? modeling the effect of time with Bayesian knowledge tracing". In M. Pechenizkiy, T. Calders, C. Conati, S. Ventura,C. Romero, and J. C. Stamper, editors, *Educational Data Mining 2011*, pages 139-148,(2011).
- [6] Z. Ghahramani and M. I. Jordan. "Factorial hidden markov models". In D. S. Touretzky, M. C. Mozer, and M. E. Hasselmo, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems 8*, pages 472-478. MIT Press, (1996).
- [7] M. Khajah, R. M. Wing, R. V. Lindsey, and M. C.Mozer. "Incorporating latent factors into knowledge tracing to predict individual differences in learning". In J. Stamper, Z. Pardos, M. Mavrikis, and B. M. McLaren, editors, *Proceedings of the 7th International Conference on Educational Data Mining*, pages 99-106. Educational Data Mining Society Press, (2014).

- [8] Pelánek,R."Conceptual Issues in Mastery Criteria: Differentiating Uncertainty and Degrees of Knowledge". *Artificial Intelligence in Education*,pp. 450-461 (2018).
- [9] M.M.Khajjah,Y.Huang,J.P.Gonzalez-Brenes,"Integrating Knowledge Tracing and Item Response Theory: A Tale of Two Frameworks"Proceedings of the 4th International Workshop on Personalization Approaches in Learning Environments (2014).
- [10] B.Deonovic, M.Yudelson, M.Bolsinova,M.Attali,G.Mari, "Learning meets Assessment: On the relation between Item Response Theory and Bayesian Knowledge Tracing"*Behaviormetrika* 45, 457-474.(2018)
- [11] Jill-Jênn Vie and Hisashi Kashima.Knowledge tracing machines: "Factorization machines for knowledge tracing". In *The Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI 2019, The Thirty-First Innovative Applications of Artificial Intelligence Conference, IAAI 2019, The Ninth AAAI Symposium on Educational Advances in Artificial Intelligence, EAAI 2019, Honolulu, Hawaii, USA, January 27 - February 1, 2019.*, pages 750-757, (2019).
- [12] Chris Piech, Jonathan Bassen, Jonathan Huang, Surya Ganguli, Mehran Sahami, Leonidas J Guibas, and Jascha Sohl-Dickstein. "Deep knowledge tracing". In C. Cortes, N. D. Lawrence, D. D. Lee, M. Sugiyama, and R. Garnett, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems 28*, pages 505-513. Curran Associates, Inc., (2015).
- [13] M.M.Khajjah, R.V. Lindsey and Mi.C. Mozer,"How Deep is Knowledge Tracing?" *ArXiv*, abs/1604.02416, (2016).
- [14] Y.Mao,C.Lin,M.Chi,"Deep Learning vs. Bayesian Knowledge Tracing: Student Models for Interventions".*Journal of Educational Data Mining*, vol. 10, no. 2, pp. 28-45, (2018).

- [15] Kevin H. Wilson, Yan Karklin, Bojian Han, and Chaitanya Ekanadham. Back to the basics, "Bayesian extensions of irt outperform neural networks for proficiency estimation". Vol 1, pages 539-544, 06 (2016).
- [16] Baker,B,F, and Kim,S.: Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques, Second Edition, NY: Marcel Dekker, Inc,2004(2004)
- [17] Ueno,M and Miyazawa,Y.:IRT-based adaptive hints to scaffold learning in programming, IEEE Transactions on Learning Technologies, Vol.14, No.8(2017)
- [18] 堤 瑛美子, 宇都雅輝, 植野真臣:ダイナミックアセスメントのための隠れマルコフIRT モデル, 電子情報通信学会論文誌 Vol.J102-D, No.2, pp.79-92, (2019)
- [19] Wang Xiaojing, Berger,O,James and Burdick,Donald. :Bayesian analysis of dynamic item response models in educational testing,The Annals of Applied Statistics 2013, Vol. 7, No. 1, 126-153(2013)
- [20] Martin,D,A and Quinn,Kevin.:Dynamic Ideal Point Estimation via Markov Chain Monte Carlo for the U.S.Supreme Court,1953-1999, Political Analysis,Volume 10, Issue 2,pp.134-153(2002)
- [21] Dylan Molenaar, Daniel Oberski, Jeroen Vermunt and Paul De Boeck,"Hidden Markov Item Response Theory Models for Responses and Response Times",Multivariate Behavioral Research, 51, 606-626(2016).
- [22] Ekanadham, C., and Karklin, Y. T-SKIRT: Online estimation of student proficiency in an adaptive learning system. Machine Learning for Education Workshop at ICML (2015).
- [23] M.Uto and M.Ueno,"Item Response Theory for Peer Assessment",IEEE Transactions on Learning Technologies ,vol.9,no.2,pp.157-170,2016.
- [24] M. Ueno and Y. Miyazawa,"IRT-based adaptive hints to scaffold learning in programming", IEEE Transactions on Learning Technologies, vol.14, no.8, Aug, (2017).