

## 12. 関係と写像

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

### 本授業の構成

10月 7日：第1回 命題と証明

10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号

10月21日：第3回 命題論理

10月28日：第4回 述語論理

11月11日：第5回 述語と集合

11月18日：第6回 直積と冪集合

12月 2日：第7回 様々な証明法 (1)

12月 9日：第8回 様々な証明法 (2)

12月16日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)

12月23日：第10回 写像 (関数) (1)

1月 6日：第11回 写像 (関数) (2)

1月20日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現

1月27日：第13回 同値関係

2月 3日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界

2月10日：第15回 期末試験 (補講があればずれていきます。)

### 1. 本日の目標

- ① 関係（二項関係）
- ② 関係と写像
- ③ グラフによる表現
- ④ 関係行列
- ⑤ 有向グラフと無向グラフ
- ⑥ 隣接集合と隣接行列
- ⑦ 木、完全グラフ、クリーク
- ⑧ 2部グラフ

### 1. 関係（二項関係）

再掲 5章：

Def 1.

二つの集合 $U, V$ の直積集合 $U \times V$ の部分集合 $R$ を $U$ から $V$ への「（二項）関係」という。

また， $R \ni (a, b)$ のとき  $aRb : a$ と $b$ は関係ある  
 $R \not\ni (a, b)$ のとき  $a \not R b : a$ と $b$ は関係なし  
と書く。

### 例題

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき， $U$ から $V$ への関係 $R$ は以下のうちどれか？

$$\begin{aligned} R &= \{(a, S)\} \\ R &= \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \\ R &= \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \\ R &= \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), \\ &\quad (c, T), (d, S), (d, T)\} \\ R &= \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \end{aligned}$$

### 例題

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき， $U$ から $V$ への関係 $R$ は以下のうちどれか？

$$\begin{aligned} R &= \{(a, S)\} & \circ \\ R &= \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \\ R &= \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \\ R &= \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), \\ &\quad (c, T), (d, S), (d, T)\} \\ R &= \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \end{aligned}$$

### 例題

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への関係 $R$ は以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

### 例題

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への関係 $R$ は以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

### 例題

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への関係 $R$ は以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\} \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

### 例題

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への関係 $R$ は以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \quad \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\} \times$$

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\} \bigcirc$$

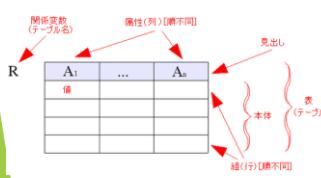
$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\} \bigcirc$$

$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\} \times$$

### 参考：データベースとn項関係

データベース理論における関係モデルでは、関係の概念を  $n$  項に拡張している。

すなわち、 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  の部分集合として定義される。関係モデルの基礎的な要素は定義域、 instance ドメインである。



## 2. 関係の述語による内包的記述による定義

Def2.

自由変数 $(a, b) \in U \times V$ についての**2変数述語**

$P(a, b): R \ni (a, b)$  の真理集合  
 $\{(a, b)|P(a, b)\}$

または

$aRb$ の**真理集合**  $\{(a, b)|aRb\}$   
 を $U$ から $V$ への「関係」、もしくは「二項関係」という。

### 3. 関係による写像の定義

Def 3.

自由変数 $(a, b) \in U \times V$ についての述語  
 $aRb$ が各 $a$ に対して一つの $b$ が対応するとき,

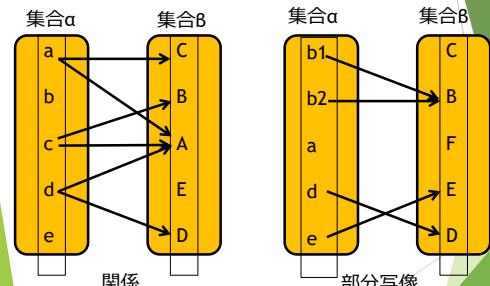
$$\{(a, b) | aRb\}$$

を $U$ から $V$ への「写像」と呼ぶ。

写像の中で対応する $b$ がない $a$ を許す場合、 $U$ から $V$ への「部分写像」と呼ぶ。

**写像は、関係の特殊なケース。**

「関係」の図示表現  
(関係を→で示す)



### 例題

以下は関係か？関係の場合、部分写像か？

関係      写像

- (1)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$
- (2)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$
- (3)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$
- (4)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$
- (5)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x$ は $y$ の約数

### 例題

以下は関係か？関係の場合、部分写像か？

関係      写像

- (1)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$  ○
- (2)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$  ○
- (3)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$  ○
- (4)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$  ○
- (5)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x$ は $y$ の約数 ○

### 例題

以下は関係か？関係の場合、部分写像か？

関係      写像

- (1)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$  ○ ○
- (2)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$  ○ ○
- (3)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$  ○ ×
- (4)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$  ○
- (5)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x$ は $y$ の約数 ○

### 例題

以下は関係か？関係の場合、部分写像か？

関係      写像

- (1)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$  ○ ○
- (2)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$  ○ ○
- (3)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$  ○ ×
- (4)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$  ○
- (5)  $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x$ は $y$ の約数 ○

## 例題

以下は関係か？関係の場合、部分写像か？

- |  | 関係 | 写像 |
|--|----|----|
| (1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$         | ○  | ○  |
| (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$  | ○  | ○  |
| (3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$ | ○  | ×  |
| (4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$         | ○  | ×  |
| (5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x$ は $y$ の約数   |    |    |

20

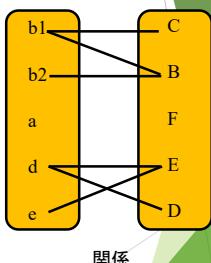
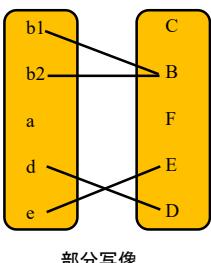
## 例題

以下は関係か？関係の場合、部分写像か？

- |  | 関係 | 写像 |
|--|----|----|
| (1) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x$         | ○  | ○  |
| (2) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$  | ○  | ○  |
| (3) $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$ | ○  | ×  |
| (4) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, y > x$         | ○  | ×  |
| (5) $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x$ は $y$ の約数   | ○  | ×  |

21

## 関係は部分写像の一般化



22

## 4. 関係行列

### Def 4

二つの集合を  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$  として、  $A$ から $B$ への関係行列は  $R = \{r_{ij}\}$ , ( $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ )

⋮

23

## 例題 1

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$  のとき、  $U$ から $V$ への次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

24

## 例題 1

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$  のとき、  $U$ から $V$ への次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

25

### 例題 2

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への次の関係行列を書け。  
 $R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$

26

### 例題 2

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への次の関係行列を書け。  
 $R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$   
解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

27

### 例題 3

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への次の関係行列を書け。  
 $R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$

28

### 例題 3

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$   
のとき、 $U$ から $V$ への次の関係行列を書け。  
 $R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$   
解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

29

## 5. 上への関係

### Def 5

集合 $A$ から $A$ の関係を、「 $A$ 上の関係」  
(または「中の関係」)と呼ぶ。

30

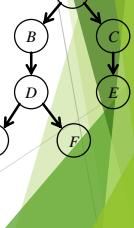
## グラフによる関係の表現

### Def 6

グラフ  $G = (V, E)$  は二つの集合  $V$  と  $E$  によって定義され、 $V$  は頂点 (Vertex) (または、節点・ノード) の有限集合  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_N\}$  で、 $E$  は辺(edge) (または枝、アーチ) 集合である。さらに、グラフは個々の頂点における二つの組をで結合したすべての可能性のある集合の部分集合である。

### Def 7

$G = (V, E)$  をグラフとする。 $E_{ij} \in E$ かつ  $E_{ji} \notin E$  のとき、枝  $E_{ij}$  を有向辺 (directed edge) と呼ぶ。 $V_i$  と  $V_j$  の有向辺は  $V_i \rightarrow V_j$  と書く。



## 有向グラフと無向グラフ

### Def 8

$G = (V, E)$  をグラフとする。  $E_{ij} \in E$

かつ  $E_{ji} \in E$  のとき、辺  $E_{ij}$  を**無向辺**

(undirected edge) と呼ぶ。  $V_i$  と  $V_j$  の無向辺は  $V_i - V_j$  または  $V_j - V_i$  と書く。

### Def 9

すべての辺が有向辺のグラフを**有向グラフ**

(directed graph) と呼び、すべて

の辺が無向辺のグラフを**無向グラフ**

(undirected graph) と呼ぶ。

## 例

有向グラフと無向グラフの例を図(a), (b)にそれぞれ示している。

有向グラフ(a)では、グラフは以下で与えられ、

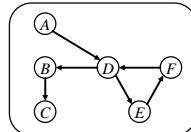
$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{A \rightarrow D, B \rightarrow C, D \rightarrow B, F \rightarrow D, D \rightarrow E, E \rightarrow F\}$$

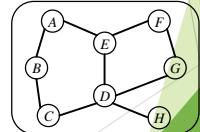
無向グラフ(b)では、グラフは以下で与えられる。

$$V = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$E = \{A - B, B - C, C - D, D - E, E - A, E - F, F - G, G - D, D - H\}$$



(a)



(b)

## 二項関係とグラフは同値

有向グラフ  $G = (V, E)$ において、  
 $E \subseteq V^2$ であり、 $E$ は  $V$  上の二項関係

↔

有限集合上の二項関係が定義されていると、二項関係を普遍集合の部分集合とみなせるので、有向グラフで表現できる

↔ 「有限集合上の二項関係」

↔ 「有向グラフ」

## A上の関係Rのグラフ表現

$A$ 上の関係  $R$  のグラフ表現を

頂点集合を  $A$  として、

$aRb$  であるときのみ、 $a \rightarrow b$  という有向辺による有向グラフで表現する。

## 上への関係の有向グラフによる表現

### 例題1

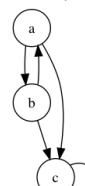
集合  $A = \{a, b, c\}$  上の関係  $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$  を有向グラフで示せ。

## 上への関係の有向グラフによる表現

### 例題1

集合  $A = \{a, b, c\}$  上の関係  $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$  を有向グラフで示せ。

[解答]



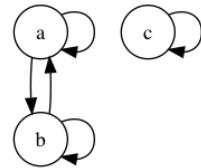
### 例題2

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ を有向グラフで示せ。

### 例題2

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ を有向グラフで示せ。

[解答]



### 6. $A$ 上の関係の関係行列

Def 10

集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ 上の関係の関係行列は  $R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \dots, m, j =$

### 例題1

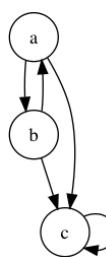
集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

### 例題1

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### 例題2

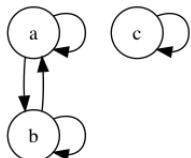
集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

### 例題2

集合 $A = \{a, b, c\}$ 上の関係 $R_2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$ の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### 例題3

$A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 $R$ について、次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (d, a), (d, d)\}$$

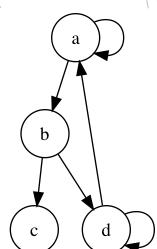
### 例題3

$A = \{a, b, c, d\}$ 上の関係 $R$ について、次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (d, a), (d, d)\}$$

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 7. 具体的な関係

### 例題 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 $R$ について

$R \ni (a, b)$ のとき  $aRb : a$ は $b$ の約数であるとすると、関係行列と有向グラフを書け。

## 7. 具体的な関係

### 例題 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 $R$ について

$R \ni (a, b)$ のとき  $aRb : a$ は $b$ の約数であるとすると、関係行列と有向グラフを書け。

[ヒント] Def

$(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ に対して、  
 $\exists m \in \mathbb{N}^+, s.t. a = bm$   
 のとき、 $a$ は $b$ の約数であるという。

## 7. 具体的な関係

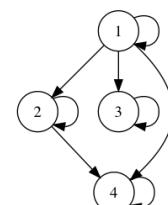
### 例題 1

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 $R$ について

$R \ni (a, b)$ のとき  $aRb : a$ は $b$ の約数であるとすると、関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### 例題2

$A = \{a, b\}$ の幂集合 $2^A$ 上の関係 $R$ について  
 $X, Y \in 2^A$ のとき  $XRY : X \subseteq Y$  とすると,  
関係行列と有向グラフを書け。

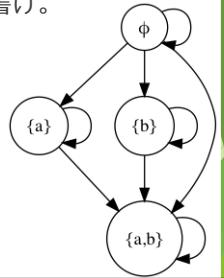
### 例題2

$A = \{a, b\}$ の幂集合 $2^A$ 上の関係 $R$ について  
 $X, Y \in 2^A$ のとき  $XRY : X \subseteq Y$  とすると,  
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



### 例題3

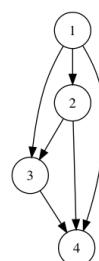
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 $R$ について  
 $x, y \in A$ のとき  $xRy : x < y$  とすると,  
関係行列と有向グラフを書け。

### 例題3

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の関係 $R$ について  
 $x, y \in A$ のとき  $xRy : x < y$  とすると,  
関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



ここから  
グラフ理論の基礎を学びます

54

### 9. 隣接頂点集合

Def 11

$G = (V, E)$  について,  $V_i$ の隣接頂点集合  
(adjacency vertexes set) は,  $V_i$ から直接  
辺が引かれた頂点集合

$Adj(V_i) = \{V_j \in V | E_{ij} \in E\}$ を示す.

Def 12

グラフ $G$ で $V_i$ に接続する辺の数を $V_i$ の次  
数といい,  $d(V_i)$ と書く.

### Th. 1

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  について、  
 $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N\}$  で辺の数が  $q$  のとき、  
$$\sum_{i=1}^N d(V_i) = 2q$$

### Th. 1

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  について、 $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N\}$  で辺の数が  $q$  のとき、  
$$\sum_{i=1}^N d(V_i) = 2q$$

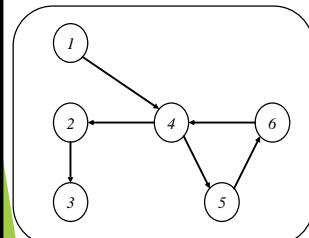
[証明] 一つの辺は次数としてはかならず両端を含めて2と数えられるので、 $\sum_{i=1}^N d(V_i) = 2q$

### 隣接行列

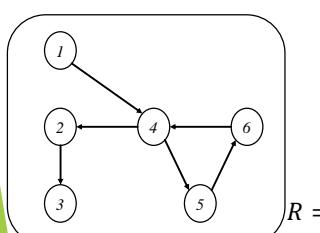
#### Def 12

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  について、 $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_N\}$  のとき、以下の行列  
 $R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N)$   
 $r_{ij} = V_i$  と  $V_j$  を結ぶ辺数  
を  $G$  の隣接行列と呼ぶ。

例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Th. 2

関係行列は、二頂点間の辺があるかないかを示した隣接行列である。

## 10.経路

**Def.13**  $V_i$  から  $V_j$  への経路は、 $V_{i_1} = V_i$  で始まり、 $V_{i_r} = V_j$  で終わるような以下の満たす順序化された頂点集合  $(V_{i_1}, \dots, V_{i_r})$  を示す。

$$V_{i_{k+1}} \in \text{Adj}(V_{i_k}), \quad (k = 1, \dots, r - 1)$$

## 10.道と路、閉路

**Def.14** すべての頂点が異なる経路を道(path)と呼ぶ。

すべての辺が異なる経路を路(trail)と呼ぶ。

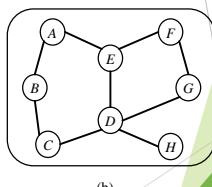
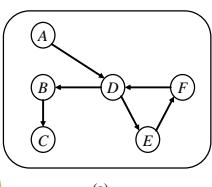
**Def.15** 始点と終点が同じ頂点となる場合

(すなわち、 $V_{i_1} = V_{i_r}$ )、路  $(V_{i_1}, \dots, V_{i_r})$  は閉路(closed path)と呼ばれる。

## 例

有向グラフ(a)の経路  $D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$  は閉路である。

無向グラフ(b)の経路  $A - B - C - D - E - A$  は閉路である。



## Th. 3

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  について、  
 $\forall V_i \in \mathbf{V}, d(V_i) \geq 2$  のとき、必ず  $G$  は閉路を含む。

## Th. 4

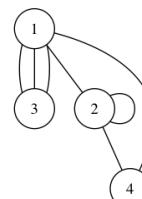
$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  について、隣接行列を  $R$  とする。

$R^n$  の  $(i,j)$  成分は長さ  $n$  の  $V_i - V_j$  の経路の数に等しい。

## 例題

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  について、以下の隣接行列  $R$  を持つ。長さ 3 の  $V_1 - V_4$  の経路の数を求めよ。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## 例題

$G = (V, E)$  について、以下の隣接行列  $R$  を持つ。

長さ3の  $V_1 - V_4$  の経路の数を求めるよ。

$$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^3(1,4) = 11 \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 13. \quad 13\text{個}$$

68

## Def 16 同型

二つのグラフ  $G = (V, E)$  と  $G' = (V', E')$  について、

$$V = V' \wedge E = E'$$

のとき、二つのグラフは同型であるいふ。

$$G \cong G'$$

と書く。

69

## 11. 完全グラフと完全集合

### Def 17

すべての頂点間に辺が張られた無向グラフを**完全グラフ** (complete graph) と呼ぶ。 $N$  頂点の完全グラフを  $K_N$  と示す。

### Def 18

グラフ  $G$  の部分頂点集合  $S$  が、すべての頂点間に辺が張られている場合、 $S$  を**完全集合** (complete set) と呼ぶ。

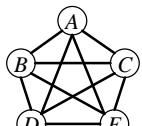


図 完全グラフ  $K_5$

## 12. クリーク

### Def 19

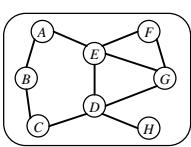
完全集合  $C$  が他のどの完全集合の部分集合にもなっていない場合、すなわち、最大の完全集合である場合、 $C$  を**クリーク** (clique) と呼ぶ。

## 例

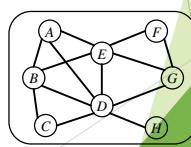
図は、二つの異なるグラフのクリークを示している。

グラフ (a) は、クリーク  $C_1 = \{A, B\}$ ,  $C_2 = \{B, C\}$ ,  $C_3 = \{C, D\}$ ,  $C_4 = \{D, H\}$ ,  $C_5 = \{A, E\}$ ,  $C_6 = \{D, E, G\}$ ,  $C_7 = \{F, E, G\}$  を含む。

グラフ (b) は、クリーク  $C_1 = \{A, B, D, E\}$ ,  $C_2 = \{B, C, D\}$ ,  $C_3 = \{D, H\}$ ,  $C_4 = \{D, E, G\}$ ,  $C_5 = \{E, F, G\}$  を含む。



(a)



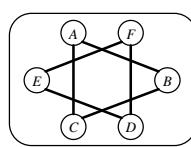
(b)

### Def . 20 連結グラフと非連結グラフ

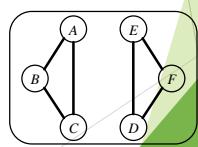
無向グラフのすべての二つの頂点間で少なくとも一つの道が存在するとき、**連結グラフ** (connected graph) と呼ぶ。それ以外を**非連結グラフ** (disconnected graph) と呼ぶ。

### 例18

図は、同じ構造をもつ非連結グラフの異なる二つの表現である。図(a)はエッジが交差しており、非連結には見えないが、図(b)のように交差を外し、分離すればより非連結性が強調される。



(a)



(b)

### Def. 21 木

閉路を持たない連結グラフ $T$ を木(tree)とよぶ。

### Th. 5 木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  の  $\forall V_i \forall V_j \in \mathbf{V}$  について,  $V_i$  と  $V_j$  を結ぶただ 1 つの道が存在する。

### Th. 6 木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  は連結であり, どの辺を除いても連結ではなくなる。

### Th. 7 木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$  は閉路を持たず、辺をどのように一つ加えても閉路を持つことのないグラフになる。

### Th. 8

$N$  個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は,  $N-1$  個の辺を持つことである。

$N$  個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は,  $N-1$  個の辺を持つことである。

[証明] 数学的帰納法を用いる。

(1) 頂点数が 2 のとき, 辺が 1 つで木である。

(2) 頂点数が  $N$  のとき, 木の必要十分条件は  $N-1$  個の辺であるとする。

頂点数が  $N+1$  のとき, 閉路を持たない連結グラフになるように 1 つの辺を  $N+1$  番目の頂点とそれ以外の 1 つの頂点の間に加えなければならぬ。このとき, 頂点数 - 1 の辺が存在することになる。

79

## Def 22. 2部グラフ

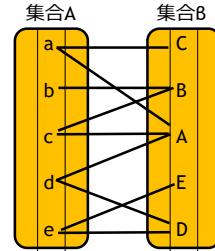
$G = (V, E)$ とし,  $E$ の要素である辺は

$V = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , ( $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ )  
となるような  $V$  の部分集合  $V_1$ ,  $V_2$  の頂点を  
結ぶようにできるとき,  $G$  を2部グラフと  
呼ぶ。

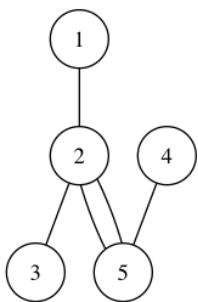
さらに  $V_1$  と  $V_2$  のすべての頂点が互いに  
結ばれてる2部グラフを, 完全2部グラフと  
呼び,  $K(m, n)$  で示す.  $m = |V_1|$ ,  $n = |V_2|$ .

## 2部グラフとは

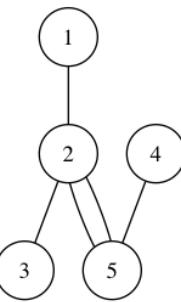
頂点集合を二つの部分集合に分割して各集合内の頂点同士の間には  
辺が無いようにできるグラフ



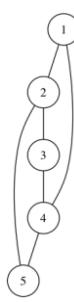
例題 1 以下のグラフは2部  
グラフか。



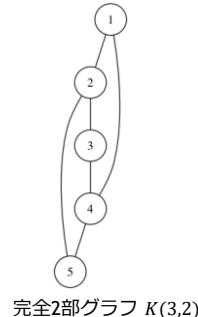
例題 1 以下のグラフは2部  
グラフか。



例題 2 以下のグラフは2部  
グラフか。



例題 2 以下のグラフは2部  
グラフか。



### Def 23 オイラーーグラフ

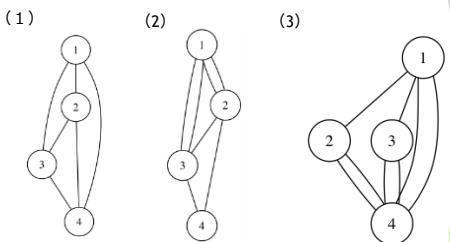
すべての辺を含む路を持つグラフを周遊可能なグラフという。(一筆書きが可能)  
すべての辺を含む閉じた路を持つ連結グラフをオイラーーグラフと呼ぶ。  
(周遊可能なグラフの中で始点と終点が同じもの)

### Th 9

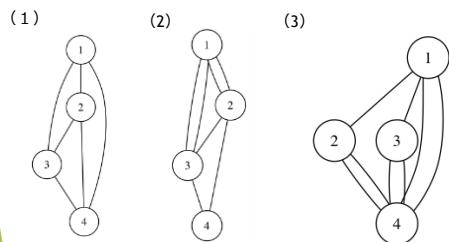
連結グラフ $G$ がオイラーーグラフであるための必要十分条件は、 $G$ の頂点がすべて偶頂点(次数が偶数である頂点)であることである。

周遊可能なグラフの必要十分条件は、 $G$ の頂点がすべて偶頂点か同じ奇頂点が2個存在することである。

### 例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーーグラフか？

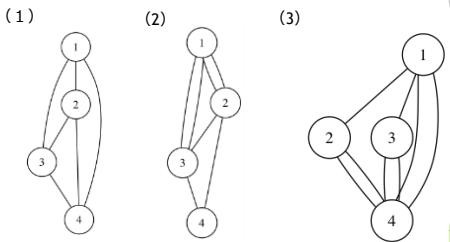


### 例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーーグラフか？



すべて次数が3で周遊可能でなく、オイラーーグラフでない。

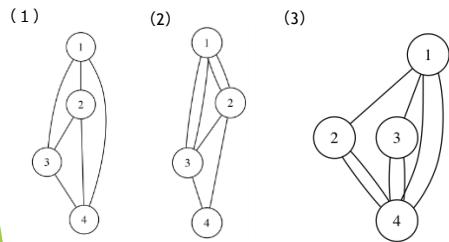
### 例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーーグラフか？



すべて次数が3で周遊可能でなく、オイラーーグラフでない。

すべての次数が偶数なので周遊可能で、オイラーーグラフである。

### 例題1 以下のグラフは周遊可能か、オイラーーグラフか？



すべて次数が3で周遊可能でなく、オイラーーグラフでない。

すべての次数が偶数なので周遊可能で、オイラーーグラフである。

奇頂点がちょうど二つなので周遊可能で、オイラーーグラフでない。

## まとめ

- ① 関係（二項関係）
- ② 関係と写像
- ③ グラフによる表現
- ④ 関係行列
- ⑤ 有向グラフと無向グラフ
- ⑥ 隣接集合と隣接行列
- ⑦ 木、完全グラフ、クリーク
- ⑧ 2部グラフ

## 演習問題

### 問題1

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$  とし、 $A$  上の関係

$$R = \{(a, a), (a, d), (a, e), (b, b), (c, c), (c, f), (d, d), (d, a), (d, e), (e, e), (e, a), (e, d), (f, f), (f, c)\}$$

について、有向グラフを用いて  $R$  を表せ。

### 問題2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  について

$x, y \in A$  のとき  $x R y : x > y$  とする、関係行列と有向グラフを書き。

### 問題3

$A = \{n \mid -2 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{Z}\}$ において、  
関係  $R$  : 「 $\equiv (\text{mod. } 3)$ 」を

$m \equiv n \pmod{3} \Leftrightarrow m - n$  は 3 の倍数  
と定義するとき、この関係を直積  $A^2$  の部分集合  $R$  として表せ。

また、 $R$  を有向グラフで表せ。