

# 11.写像 (関数) (2)

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

1

## 本授業の構成

- 10月7日：第1回 命題と証明
- 10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
- 10月21日：第3回 命題論理
- 10月28日：第4回 述語論理
- 11月11日：第5回 述語と集合
- 11月18日：第6回 直積と冪集合
- 12月2日：第7回 様々な証明法 (1)
- 12月9日：第8回 様々な証明法 (2)
- 12月16日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
- 12月23日：第10回 写像 (関数) (1)
- 1月6日：第11回 写像 (関数) (2)
- 1月20日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
- 1月27日：第13回 同値関係
- 2月3日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
- 2月10日：第15回 期末試験 (補講があればずれていきます。)

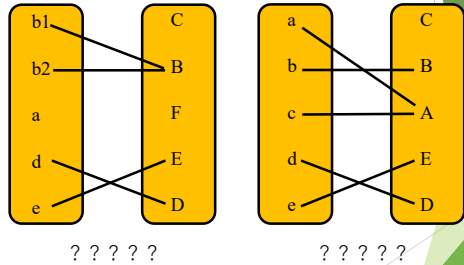
2

### 1. 本日の目標

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

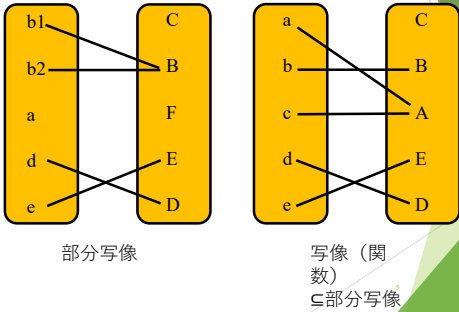
3

復習 以下はどのような写像か？



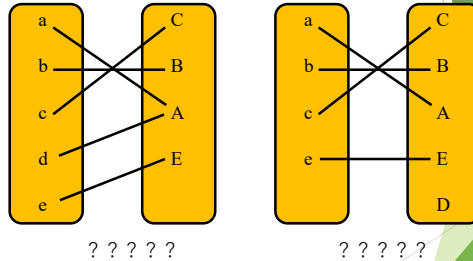
4

復習 以下はどのような写像か？



5

復習 以下はどのような写像か？



6

復習 以下はどのような写像か？

全射  $\subseteq$   
写像  $\subseteq$  部分  
写像

単射  $\subseteq$   
写像  $\subseteq$  部分  
写像

7

復習 以下はどのような写像か？

?????

8

復習 以下はどのような写像か？

全単射 ( $\subseteq$  全射または  $\subseteq$  単射)  $\subseteq$   
写像  $\subseteq$  部分写像

9

1. 像と原像

Def 1.  
 $f: U \mapsto V; f(x)$  について  
 $y = f(x) \in V$  を  $x \in U$  の像,  
 $x \in U$  を  $y \in V$  の原像という。

原像  $x$        $x$  の像  $y$

10

1. 像と原像

像の概念を部分集合に拡張：  
 $f: U \mapsto V; f(x)$  について 部分集合  $A \subseteq U, B \subseteq V$  を考える。  
 $V$  の要素のうち、 $A$  の要素の  $f$  による値になっているものを集めて、写像  $f$  による集合  $A$  の像という。  
 $B = f(A)$  と書く。

$B = f(A)$   
A の像

11

1. 像と原像

数学的に定義しよう。  
 内包的記述を用いると

Def 2.  
 写像  $f: U \mapsto V; f(x)$ ,  $A \subseteq U, B \subseteq V$  について  
 $B = f(A) = \{y | \text{????????????}\}$   
 を  $A$  の像という。

12

## 1. 像と原像

数学的に定義しよう。  
内包的記述を用いると

Def 2.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$ ,  $A \subseteq U, B \subseteq V$  について

$B = f(A) = \{y | \exists x \in A [f(x) = y]\}$   
を  $A$  の像という。

13

## 1. 像と原像

数学的に定義しよう。  
もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$ ,  $A \subseteq U, B \subseteq V$  について

$B = f(A) = \{????\}$   
を  $A$  の像という。

14

## 1. 像と原像

数学的に定義しよう。  
もうひとつの内包的記述を用いると

Def 2.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$ ,  $A \subseteq U, B \subseteq V$  について

$B = f(A) = \{f(x) | x \in A\}$   
を  $A$  の像という。

15

## 例題 1.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  の  $f$  の値域を像を用いて示せ。

16

## 例題 1.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  の  $f$  の値域を像を用いて示せ。

正答

$$\text{ran}(f) = f(U)$$

17

## 例題 2.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について  $f$  は  $U$  から  $V$  への全射であるときの必要十分条件は

$$f(U) = \{????\}$$

18

### 例題 2 .

写像  $f: U \rightarrow V; f(x)$  について  $f$  は  $U$  から  $V$  への全射であるときの必要十分条件は

正答

$$f(U) = V$$

19

### 例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$   
 $f(4) = 5, f(5) = 1$  とする。

このとき,

- (1)  $f$  の値域を求めよ。
- (2)  $\{1,2,3\}$  の像  $f[\{1,2,3\}]$  を求めよ。
- (3)  $\{1,3,5\}$  の像  $f[\{1,3,5\}]$  を求めよ。

20

### 例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$   
 $f(4) = 5, f(5) = 1$  とする。

このとき,

- (1)  $f$  の値域を求めよ。  **$\{1,2,5\}$**
- (2)  $\{1,2,3\}$  の像  $f[\{1,2,3\}]$  を求めよ。
- (3)  $\{1,3,5\}$  の像  $f[\{1,3,5\}]$  を求めよ。

21

### 例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$   
 $f(4) = 5, f(5) = 1$  とする。

このとき,

- (1)  $f$  の値域を求めよ。  **$\{1,2,5\}$**
- (2)  $\{1,2,3\}$  の像  $f[\{1,2,3\}]$  を求めよ。  
 **$\{2,5\}$**
- (3)  $\{1,3,5\}$  の像  $f[\{1,3,5\}]$  を求めよ。

22

### 例題 3

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5,$   
 $f(4) = 5, f(5) = 1$  とする。

このとき,

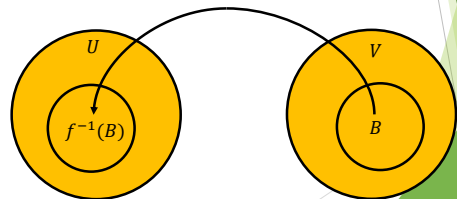
- (1)  $f$  の値域を求めよ。  **$\{1,2,5\}$**
- (2)  $\{1,2,3\}$  の像  $f[\{1,2,3\}]$  を求めよ。  
 **$\{2,5\}$**
- (3)  $\{1,3,5\}$  の像  $f[\{1,3,5\}]$  を求めよ。  
 **$\{1,2,5\}$**

23

## 2. 逆像

写像  $f: U \rightarrow V; f(x)$  について

$U$  の要素のうち  $f$  による値が  $B$  に属する要素を集めてできる集合を、写像  $f$  による  $B$  の逆像といい、 $f^{-1}(B)$  と書く。



24

## 2. 逆像

Def 3

写像  $f: U \rightarrow V; f(x)$  について,  
以下の集合  $f^{-1}(B)$  を写像  $f$  による  
 $B$  の逆像とよぶ。

$$f^{-1}(B) = \{x | f(x) \in B\} .$$

25

### 例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$   
とする。

このとき,

- (1)  $\{1\}$  の逆像  $f^{-1}[\{1\}]$  を求めよ。
- (2)  $\{2,5\}$  の像  $f^{-1}[\{2,5\}]$  を求めよ。

26

### 例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$   
とする。

このとき,

- (1)  $\{1\}$  の逆像  $f^{-1}[\{1\}]$  を求めよ。{5}
- (2)  $\{2,5\}$  の像  $f^{-1}[\{2,5\}]$  を求めよ。

27

### 例題 1

$U = \{1,2,3,4,5\}, f: U \rightarrow U; f(x)$  について  
 $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 5, f(4) = 5, f(5) = 1$   
とする。

このとき,

- (1)  $\{1\}$  の逆像  $f^{-1}[\{1\}]$  を求めよ。{5}
- (2)  $\{2,5\}$  の像  $f^{-1}[\{2,5\}]$  を求めよ。{1,2,3,4}

28

### 例題 2.

写像  $f: U \rightarrow V; f(x)$  について,  $A \subseteq U$  を  
考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$  を証明せよ。

29

### 例題 2.

写像  $f: U \rightarrow V; f(x)$  について,  $A \subseteq U$  を考える。

$A \subseteq f^{-1}[f(A)]$  を証明せよ。

[証明] 定義に戻れ:  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x [x \in A \rightarrow x \in B]$

全称含意命題の証明では  $\forall$  をとって束縛変数 (ある  
値)  $x \in A$  と仮定して右辺を導く。

$x \in A$  と仮定すると,  $f(x) \in f(A)$ . このとき逆  
像の定義より  $f^{-1}[f(A)] = \{x | f(x) \in f(A)\}$

より  $x \in f^{-1}[f(A)]$ . 従って  $A \subseteq f^{-1}[f(A)]$

■

30

### 例題3.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について,  $B \subseteq V$  を考える。  
 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$  を証明せよ。

31

### 例題3.

写像  $f: U \mapsto V; f(x)$  について,  $B \subseteq V$  を考える。  
 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$  を証明せよ。

[証明] 定義に戻れ:  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$   
全称含意命題の証明では  $\forall$  をとり束縛変数 (ある値)  $x \in A$  と仮定して右辺を導く。

$y \in f[f^{-1}(B)]$  と仮定すると,  $x \in f^{-1}(B)$   
かつ  $f(x) = y$  を満たす  $x$  が存在する。このとき,  
 $x \in f^{-1}(B)$  なので  $f(x) \in B$ . 従って,  $y \in B$ .

$f[f^{-1}(B)] \subseteq B$  ■

32

### 3. 写像の合成

Def 4.

$f: U \mapsto V; f(x)$  と  $g: V \mapsto W; g(x)$  に対し,  
 $h: U \mapsto W; h(x) = g(f(x))$   
を合成写像  $h = g \circ f$  と表す。

33

### 例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$  とする。

このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像  $h = g \circ f$  の列を求めよ。

34

### 例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$  とする。  
このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像  $h = g \circ f$  の列を求めよ。

正答:  $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$

35

### 例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$  とする。  
このとき,

$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$

$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$

である。合成写像  $h = g \circ f$  の列を求めよ。

正答:  $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$   
 $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$

36

### 例題1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}, W = \{p, q\}$  とする。  
このとき、

$$f: U \mapsto V; f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 0$$

$$g: V \mapsto W; g(0) = p, g(1) = p, g(2) = q$$

である。合成写像  $h = g \circ f$  の列を求めよ。

$$\text{正答: } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = p$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = q$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(0) = p$$

37

### 例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像  $g \circ f$  を求めよ。

38

### 例題2

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像  $g \circ f$  を求めよ。

正答

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) \\ = 2(x + 1) - 3 = 2x - 1$$

従って

$$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1 .$$

39

### 例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像  $f \circ g$  を求めよ。

40

### 例題3

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像  $f \circ g$  を求めよ。

正答

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3) \\ = (2x - 3) + 1 = 2x - 2$$

従って

$$f \circ g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 2 .$$

$$g \circ f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x - 1 \text{ とは異なる}$$

41

### 例題3の補題

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$$

$$g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$$

のとき、合成写像  $f \circ g$  を求めよ。

42

### 例題3の補題

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto x + 1,$   
 $g: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto 2x - 3,$   
のとき, 合成写像  $f \circ g$  を求めよ。

正答

$g$  は写像ではないので解なし  
 $x = 1$  のとき,  $g(x) = -1$  で  $\mathbb{N}$  でない。

43

### 例題4

$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$   
のとき,  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  を証明せよ。

44

### 例題4

$f: U \mapsto V, g: V \mapsto W, h: W \mapsto X,$   
のとき,  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  を証明せよ。

[証明]

全称記号  $\forall x \in U$  が隠れている全称記号についての証明。 $\forall$  をとって束縛変数として扱う。

$x \in U$  とする。

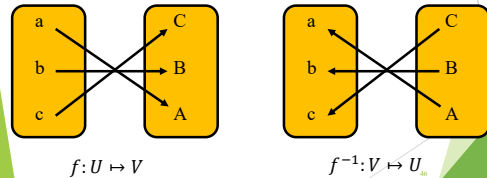
$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = \\ &= h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

45

### 4. 逆写像

Def 5

$f: U \mapsto V$  が全単射のとき,  
 $f^{-1}: V \mapsto U$  を  $f$  の逆写像と呼ぶ。



46

### 例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$   
 $f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$  のとき,  
逆写像を求めよ。

47

### 例題 1

$U = \{a, b, c\}, V = \{0, 1, 2\}$   
 $f: U \mapsto V; a \mapsto 2, b \mapsto 0, c \mapsto 1$  のとき,  
逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: V \mapsto U; 0 \mapsto b, 1 \mapsto c, 2 \mapsto a$$

48



### 例題2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x) = y$   
の逆写像を求めよ。

49

### 例題2

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+; f(x) = \exp(x) = y$   
の逆写像を求めよ。

[回答]

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; f^{-1}(x) = \ln(y)$$

50

### 例題3

恒等写像  $\text{id}_U: U \mapsto U; \text{id}_U(x) = x$   
の逆写像  $\text{id}_U^{-1}$  を求めよ。

51

### 例題3

恒等写像  $\text{id}_U: U \mapsto U; \text{id}_U(x) = x$   
の逆写像  $\text{id}_U^{-1}$  を求めよ。

[回答]

$$\text{id}_U^{-1}(x) = \text{id}_U(x)$$

52

### 例題4

$f: U \mapsto V$  が全単射のとき,  
 $f^{-1} \circ f$  はどのような写像か?

53

### 例題4

$f: U \mapsto V$  が全単射のとき,  
 $f^{-1} \circ f$  はどのような写像か?

[回答]

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_U(x)$$

54

## まとめ

- ① 像と原像
- ② 逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 逆写像

55

## 演習問題

56

### 問題1

$f: U \mapsto V$ ,  $A_1, A_2 \subseteq U$ のとき,  
以下を証明せよ.

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2).$$

57

### 問題2

$f: U \mapsto V$ ,  $B_1, B_2 \subseteq V$ のとき,  
以下を証明せよ.

$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2).$$

58

### 問題3

$f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto W$ とする.  
以下を証明せよ.

- (1)  $f$ と $g$ が単射ならば $g \circ f$ も単射である.
- (2)  $f$ と $g$ が全射ならば $g \circ f$ も全射である.

59

### 問題4

$U = \{a\}, V = \{a, b\}$   
 $f: U \mapsto V$ と $g: V \mapsto U$ を $f(a) = a, g(a) = a, g(b) = a$ とする.  
このとき,  $g \circ f$ と $f \circ g$ はそれぞれ恒等写像となるか?

60