5.　述語と集合

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

10月 7日：第1回 命題と証明
10月14日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
10月21日：第3回 命題論理
10月28日：第4回 述語論理
11月11日：第5回 述語と集合
11月18日：第6回 直積と冪集合
12月 2日：第7回 様々な証明法 (1)
12月 9日：第8回 様々な証明法 (2)
12月16日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
12月23日：第10回 写像（関数） (1)
1月 6日：第11回 写像 (関数) (2)
1月20日：第12回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
1月27日：第13回 同値関係
2月 3日：第14回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
2月10日：第15回 期末試験（補講があればずれていきます。）

2

1．本日の目標

1．先週までの復習
2. 述語論理と集合
3. 集合演算の述語論理による証明
4. 集合のもう一つの内包的記法

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

4

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$A \cap B$の述語表現はどのようになるのか？

5

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x) \Rightarrow \{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

6

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x)$⇒$\{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

$A \cup B$の述語表現はどのようになるのか？

7

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x)$⇒$\{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$

8

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x)$⇒$\{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$

A^Cの述語表現はどのようになるのか？

9

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x)$⇒$\{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$

$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$

$A \subseteq B$の述語表現はどのようになるのか？

10

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x)$⇒$\{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$

$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \{x|x \in A \longrightarrow x \in B\}$

$A = B$の述語表現は？

11

2.　先週の復習：　述語と集合は等価

述語⇒真理集合

$P(x)$⇒$\{x|P(x)\}$

集合演算⇒述語の真理集合

$A \cap B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \land (x \in B)\}$

$A \cup B \Leftrightarrow \{x|(x \in A) \lor (x \in B)\}$

$A^C \Leftrightarrow \{x|\neg(x \in A)\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \{x|x \in A \longrightarrow x \in B\}$

$A = B \Leftrightarrow \{x|x \in A \leftrightarrow x \in B\}$

12

2.　先週の復習：

空ゆえに真

(vacuously true, vacuous truth)」

例題

自由変数$x \in \mathbb{R}$について，条件$P(x)$を満たす要素が存在しなければ，$P(x) \longrightarrow Q(x)$は「空ゆえに真」を証明せよ。

例題　自由変数$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$について，条件$\boldsymbol{P(x)}$を満たす要素が存在しなければ，$\boldsymbol{P(x)} \longrightarrow \boldsymbol{Q(x)}$は「空ゆえに真」を証明せよ。

証明　$\forall x \in \mathbb{R}[P(x) \longrightarrow Q(x)]$

$\equiv \forall x \in \mathbb{R}[\neg P(x) \vee Q(x)]$

$\{x|\neg P(x)\} = \{x|P(x)\}^c$より，

$\forall x \in \mathbb{R}[P(x) \longrightarrow Q(x)]$の真理集合は

$\{x|P(x)\}^c \cup \{x|Q(x)\}$

ここで，$\{x|P(x)\} = \emptyset$より，$\{x|P(x)\}^c = \mathbb{R}$

$\{x|P(x)\}^c \cup \{x|Q(x)\} = \mathbb{R} \cup \{x|Q(x)\} = \mathbb{R}$

$Q(x)$に関わらず，真理集合が$\mathbb{R}$となり，

$\forall x \in \mathbb{R}[P(x) \longrightarrow Q(x)]$は真　■

問題 1

$\neg(\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)])$

$\equiv \exists x\,[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

は真である．

解答

$\neg(\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)])$

$\equiv \exists x\,[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

は真である．

解答

$\exists x\,[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$

$\equiv \exists x\,[\neg P(x) \vee \neg Q(x)]$

述語$P(x)Q(x)$のどちらかが偽であるxがある

→$P(x)Q(x)$の真理集合以外からxを選べばよいので絶えず真

解答

$$\neg(\forall x[P(x) \to Q(x)])$$
$$\equiv \neg(\forall x[\neg P(x) \vee Q(x)])$$
$$\equiv \exists x[\neg(\neg P(x) \vee Q(x))]$$
$$\equiv \exists x\ [\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)]$$
$$\equiv \exists x\ [P(x) \wedge \neg Q(x)]$$

2.命題論理の復習問題

$A \subseteq B$の定義を述べよ.

2.命題論理の復習問題

$A \subseteq B$の定義を述べよ.

$A \subseteq B$

$\Leftrightarrow \forall x[x \in A \to x \in B]$

問題２

$A \subseteq B$の否定は？

$A \nsubseteq B$

問題２

$A \subseteq B$の否定は？

$A \nsubseteq B$

$\Leftrightarrow \exists x[x \in A \to x \notin B]$

解答

$A \subseteq B$の定義を述べよ.

$A \nsubseteq B$

$\Leftrightarrow \exists x[x \in A \to x \notin B]$

解答

$A \subseteq B$の定義を述べよ.

$A \not\subseteq B$

$\Leftrightarrow \exists x[x \in A \rightarrow x \notin B]$

$x \notin A$を選べば真

$\exists x \in A[x \notin B]$ならばよい

解答

定義に戻れ！！

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow \exists x\neg[x \in A \rightarrow x \in B]$

$\Leftrightarrow \exists x\neg[\neg x \in A \vee x \in B]$

$\Leftrightarrow \exists x[x \in A \wedge \neg x \in B]$

■

問題3

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$

は真か偽か？証明もせよ。

問題3

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$

は真か偽か？証明もせよ。

解答

偽

反例を示せばよい

$x = 5$　のとき$(5-4)^2 = 1 > 0$となり

$\exists x \in \mathbb{R}[(x-4)^2 < 0 \nrightarrow x = 5]$

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$は偽

■

問題3

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$

は真か偽か？

解答

偽

反例を示せばよい

$x = 5$　のとき$(5-4)^2 = 1 > 0$となり

$\exists x \in \mathbb{R}[(x-4)^2 < 0 \nrightarrow x = 5]$

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$は偽

■

問題3

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$

は真か偽か？

解答　　真

証明

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5 \Leftrightarrow \neg[(x-4)^2 < 0] \vee [x = 5]$

$\Leftrightarrow [(x-4)^2 \geq 0] \vee [x = 5]$

$(x-4)^2 \geq 0$ は真であり、右辺は真.

従って　　$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$　は真

■

問題4

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$$

を集合演算を用いて証明せよ.

問題4

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$$

を集合演算を用いて証明せよ.

解答

$$\{x \mid (x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5\}$$

$$\Leftrightarrow \{x \mid (x-4)^2 < 0\}^C \cup \{x \mid x = 5\}$$

$\Leftrightarrow \{x \mid (x-4)^2 \geq 0\} \cup \{x \mid x = 5\}$

$$\mathbb{R} = \{x \mid (x-4)^2 \geq 0\}$$

より$\{x \mid (x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5\} = \mathbb{R}$

自由変数$x \in \mathbb{R}$について

$(x-4)^2 < 0 \longrightarrow x = 5$　■

問題5

普遍集合Uに対し，$\forall B[\emptyset \subseteq B]$ を証明せよ。

問題5

普遍集合Uに対し，$\forall B[\emptyset \subseteq B]$を証明せよ。

[証明]定義に戻れ

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \longrightarrow x \in B]$$

$$\forall x \forall B[x \in \emptyset \longrightarrow x \in B]$$

空ならば真が示せればよい。

$$\forall x \forall B[x \in \emptyset \longrightarrow x \in B]$$

$\Leftrightarrow \forall x \forall B[x \in \{\emptyset^C \cup \mathrm{B}\}]$

$\Leftrightarrow \forall x \forall B[x \in \{U \cup \mathrm{B}\}]$

$\Leftrightarrow \forall x[x \in U]$ は常に真。したがって

普遍集合Uに対し，$\forall B[\emptyset \subseteq B]$　■

問題6　以下を述語論理を用いて証明せよ。

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

[証明]

$A - (B \cup C) \Leftrightarrow \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \notin (B \cup C)\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \in (B \cup C)^C\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \in (B^c \cap C^c)\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A\} \cap \{x \mid x \notin B \wedge x \notin C\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \cap \{x \mid x \in A \wedge x \notin C\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in (A - B)\} \cap \{x \mid x \in (A - C)\}$

$\Leftrightarrow \{x \mid x \in (A - B) \cap (A - C)\}$

$\Leftrightarrow (A - B) \cap (A - C)$　■

問題７

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$を述語論理を用いて証明せよ。

37

問題７

集合演算分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$を述語論理を用いて証明せよ。

[証明]

$A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow \{x | (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))\}$

$\Leftrightarrow \{x | (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$

命題演算の分配律を用いると

$\Leftrightarrow \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$

$\Leftrightarrow \{x | (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)\}$

$\Leftrightarrow \{x | x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\}$

■

38

なぜ、命題論理の分配律を用いてよいのか？

$(x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

この分配律の命題論理は真理値表で証明できるので集合の分配律の基底をなすものである。命題論理が数学の基底である。

39

注意！！
次の文は命題か？述語か？

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

40

注意！！
次の文は命題か？述語か？

$\forall x \in \mathbb{R}$について

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow$全称命題

恒等式では「$\forall x \in \mathbb{R}$について」が隠れている！！

41

以下を証明せよ。

$(x+1)^2 \neq x^2 + 4x + 1$

42

解答

$$(x+1)^2 \neq x^2+4x+1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}[(x+1)^2 = x^2+4x+1])$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists x \in \mathbb{R}[(x+1)^2 \neq x^2+4x+1]$$

を示せばよい.

$x=1$について$(x+1)^2=4$

$x^2+4x+1=6$

となり$\exists x \in \mathbb{R}[(x+1)^2 \neq x^2+4x+1]$ ■

43

再掲

述語「$x+1=2$」を $P(x)$と書く。
このとき，以下の真偽は？

(1) $x \in \mathbb{N}[P(x)]$

(2) $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$

(3) $\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$

44

再掲

述語「$x+1=2$」を $P(x)$と書く。
このとき，以下の真偽は？

(1) $x \in \mathbb{N}[P(x)]$は命題ではない

(2) $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$

(3) $\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$

45

再掲

述語「$x+1=2$」を $P(x)$と書く。
このとき，以下の真偽は？

(1) $x \in \mathbb{N}[P(x)]$は命題ではない

(2) $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$は偽

(3) $\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$

46

再掲

述語「$x+1=2$」を $P(x)$と書く。
このとき，以下の真偽は？

(1) $x \in \mathbb{N}[P(x)]$は命題ではない

(2) $\forall x \in \mathbb{N}[P(x)]$は偽

(3) $\exists x \in \mathbb{N}[P(x)]$は真

47

3．集合の記法

再掲（２章の３．集合の「要素」の記法）

外延的記法：$A=\{1,2,3,4,5\}=\{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A=\{1,3,5,7\cdots\}$　（無限集合）

内包的記法：$A=\{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$

$A=\{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5, n\text{は奇数}\}$

48

これまで習ってきた内包的記法と述語

これまで習ってきた内包的記法は

$$A = \{x | P(x)\}$$

述語の真理集合

49

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。

どのように表せるか？

50

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

ヒント　述語での記述では

$$A = \{n | n\text{の条件}1, n\text{の条件}2, \cdots\}$$

ここで　nの条件は「論理積、かつ」
「∧」の場合，「,」で連ねる。

$$A = \{n | n\text{の条件}1\} \cap \{n | n\text{の条件}2\} \cap \cdots$$

51

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$$

52

問題

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$$

どのようなkを表しているのかがわからない！！

53

集合の積集合で示すと

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\} = \{n | n \in \mathbb{N}\} \cap \{n | n = 2k + 1\} \cap \{n | k \in \mathbb{N}\}$

$\{n | n = 2k + 1\}$, $\{n | k \in \mathbb{N}\}$
が意味をなさない
条件部にn以外の変数が来る場合には注意が必要

54

問題

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n$は奇数$\}$
の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 1\}$

55

問題

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n$は奇数$\}$
の「nは奇数」を数式で表したい。
どのように表せるか？

$A = \{n | n \in \mathbb{N}, n \bmod 2 = 1\} = \{n | n \in \mathbb{N}\} \cap \{n | n \bmod 2 = 1\}$

56

もう一つの内包的記法

$\{F(t) | t \in \mathbf{U}\}$

「$\mathbf{U}$のひとつひとつの要素tについて，$F(t)$で表される要素を考え，それらをすべて集めてできる集合」

57

もう一つの内包的記法

$\{F(t) | t \in \mathbf{U}\}$

「$\mathbf{U}$のひとつひとつの要素tについて，$F(t)$で表される要素を考え，それらをすべて集めてできる集合」

例　$\{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$

「$\mathbb{N}$のひとつひとつの要素nについて，$2n + 1$で表される要素を考え，それらをすべて集めてできる集合」

⇒　「正の奇数集合」

58

もう一つの内容的記法は

実は「2.集合の基礎と全称記号・存在記号」の授業で何度か使ってます！！

59

再掲載　2.集合の基礎と全称記号・存在記号 P36
例題

$A = \{4n + 3 | n \in \mathbb{Z}\}$,
$B = \{4m - 1 | m \in \mathbb{Z}\}$のとき，
$A = B$を証明せよ.

60

再掲載　2.集合の基礎と全称記号・存在記号 P67 例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$について
$A = \{2k | k \in \mathbb{N}\}, B = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$,
とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

61

再掲載　2 集合の基礎 P76 演習問題7

$A = \{5n + 2m \ | n, m \in \mathbb{Z}\}$のとき，$A = \mathbb{Z}$を証明せよ.

62

再掲載 2.集合の基礎と全称記号・存在記号 P81 演習問題12

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 100,\ m \in \mathbb{N}\}$について

$A = \{3k | k \in \mathbb{N}\}$,
$B = \{5k | k \in \mathbb{N}\}$,

とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B),$$
$$n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$

63

もう一つの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$を用いて述語表現による内包的記法で表現せよ。

64

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$を用いて述語表現による内包的記法で表現せよ。

ヒント１

$$E = \{x | P(x)\}$$

xの条件をどのようにnで表現するか？

65

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法で表現せよ。

[解答]

$$E = \{x | n \in \mathbb{N} [x = 2n+1]\}$$

66

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を xとnのみの述語表現による内包的記法で表現せよ。

[解答]

$$E = \{x | n \in \mathbb{N}[x = 2n+1]\}$$

67

意味：(述語（条件）：xは自然数nについて$x = 2n+1$を満たす

→

自然数n　がどのようなnかがわからないので命題として意味をなさない。

68

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法で表現せよ。

[解答]

$$E = \{x | \forall n \in \mathbb{N}[x = 2n+1]\}$$

69

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法で表現せよ。
[解答]

$$E = \{x | \forall n \in \mathbb{N}[x = 2n+1]\}$$

70

なぜ∀でないのか？

$$E = \{x | \forall n \in \mathbb{N}[x = 2n+1]\}$$

意味：(述語（条件）：xはすべての自然数nについて$x = 2n+1$を満たす
→　∅

内包的記述での
$\{x | \forall n(P(x))\}$は　すべてのnについて条件$P(x)$を満たす共通集合$\cap_n \{x | P(x)\}$ という意味

71

もうひとつの内包的記法と述語

集合と述語は等価である。
では,
$E = \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$を$x$と$n$のみの述語表現による内包的記法で表現せよ。

$E = \{x | \exists n \in \mathbb{N}[x = 2n+1]\} \rightarrow$
各nごとにxが既定される

意味：(条件：ある一つの自然数nについて$x = 2n+1$)を満たすxを集めた集合
述語では、存在記号∃が補われている。

もうひとつの内包的記法と述語の変換

$$\{F(t)|t \in U\}$$

$\Rightarrow$

$$\{x|\exists t \in U[x = F(t)]\}$$

注）存在量化子∃が隠されている。

内包的記述での

$\{x|\exists n[P(x)]\}$は　すべてのnについて条件(述語)　$P(x)$を満たす和集合

$\bigcup_n \{x|P(x)\}$という意味

73

二つの内包的記述の違い

$\{F(t)|t \in U\}$は$F(t) = 2t + 1$など演算になっている場合に便利。しかし、 tと$F(t)$が同じ普遍集合でない場合は使えない場合もある。

内包型：集合$F(t) = 2t + 1$のような演算の記述が存在量化子や他の変数を導入しなければならず面倒。演算がなく、条件が複数の場合は便利。

$$\{x \in \mathbb{R}| -2 \le x < 3, -1 \le x < 4\}$$

というように集合が実数集合であるなどを規定することができる。

74

例題 1

2以上の偶数集合を二つの内包的記法で示せ。

75

例題 1

2以上の偶数集合を二つの内包的記法で示せ。

$$A = \{2n|n \in \mathbb{N}^+\}$$

$$A = \{x|\exists n \in \mathbb{N}^+[x = 2n]\}$$

76

注意

述語では，普遍集合を前に出してよい。

$$\{x \in \mathbb{N}^+|x \bmod 2 = 0\}$$

利点：自然数の集合であることがすぐにわかる。

$\{2n|n \in \mathbb{N}^+\}$　は自然数の部分集合だとわかる。

しかし　$\{\sqrt{n}|n \in \mathbb{N}^+\}$　は何の集合かがわからない。

77

例題2

$$\mathbf{D} = \{x|x \in \mathbb{R}, -2 \le x < 3\}$$

について内包的記法

$B = \{r^2 + 2r + 1|r \in \mathbf{D}\}$

は簡単な述語による内包的記述に変換できる。それを求めよ。

78

例題2

$\mathbf{D} = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \le x < 3\}$
について内包的記法

$$B = \{r^2 + 2r + 1 | r \in \mathbf{D}\}$$

は簡単な述語による内包的記述に変換できる。それを求めよ。

[正答]

述語（内包的記法）

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, 0 \le x < 16\}$$

例題３

以下はどのような集合か？

1. $\{x \in \mathbb{N} | \forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$

例題３

解答

1. $\{x \in \mathbb{N} | \forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | x > n\} = \emptyset$

2. $\{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | x > n\} =$
$\{x \in \mathbb{N} | x > 0\} = \mathbb{N}^+$

４．まとめ

1．先週までの復習
2. 述語論理と集合
3. 集合演算の述語論理による証明
4. 集合のもう一つの内包的記法

演習問題

問題1

$\forall x \in \mathbb{N}$について
$x < 8$ならば$x < 7$
は真か偽か？
証明せよ。

問題2

自由変数$x \in \mathbb{R}$について　述語

$$2^x < 0 \longrightarrow x = 0$$

は真か偽か？

証明せよ。

85

問題3

以下の集合演算を命題論理を用いて証明せよ。

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $(A \cap B) \subseteq A$
5. $A, B \subseteq C \rightarrow (A \cap B) \subseteq C$

86

問題4

$A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

は真か偽か？

証明せよ。

87

問題5　A，Bの記法を述語による内包的記法に書き換えよ。

(1) $A = \{2^n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$

(2) $B = \{r^2 + 3 | r \in \mathbf{D}\}$

$\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 4\}$

88