

4. ベイズ的意思決定

植野真臣

電気通信大学大学院

情報理工学研究科

4月15日 ベイズの定理とは？
4月22日 ベイズはどのようにして世に出たのか？
5月6日【休日出勤】 ベイズはコンピュータの父
5月13日 ベイズの躍進と人工知能の誕生
5月20日 ビリーフとベイズの定理
5月27日 尤度推定と機械学習
6月3日 ベイズ推定と機械学習(1)
6月10日 ベイズ推定と機械学習(2)
6月17日 ベイズ意思決定
7月8日 確率的グラフィカルモデルベイジアンネットワーク
7月22日 ベイジアンネットワークの推論
7月29,30日 ベイジアンネットワークと他の機械学習との関係
8月5日 テスト(※場所:西5-109)

本日の目標

1. ベイズbeliefと意思決定理論
2. 期待効用、期待損失による意思決定
3. 意思決定理論からの情報理論
4. 人間の直感的推論と意思決定理論の比較

主観確率としてのビリーフ(信念)

例えば, 以下のような主観確率の例がある.

1. 第三次世界大戦が20XX 年までに起こる確率が0.01
2. 明日, 会社の株式の価格が上がる確率が0.35
3. 来年の今日, 東京で雨が降る確率が0.5

ベイズ統計では, これらの主観確率は個人の意思決定のための信念として定義され, ビリーフ(belief)と呼ばれる. 当然, 頻度論的確率を主観確率の一種とみなすことができるが, その逆は成り立たない.

ビリーフ(信念)

つぎの二つの賭けを考えよう.

1. もしキリストが復活していれば1万円もらえる.
2. 赤玉 n 個, 白玉 $100-n$ 個が入っている合計100個の玉が入っている壺の中から一つ玉を抜き出し, それが赤玉なら1万円もらえる.

どちらの賭けを選ぶかといわれれば, 2番目の賭けで赤玉が100個ならば, 誰もが迷わず2番目の賭けを選ぶだろうし, 逆に $n=0$ ならば, 1番目の賭けを選ぶだろう. この二つの賭けがちょうど同等になるように n を設定することができれば, $\frac{n}{100}$ があなたの「キリストが復活した」ビリーフになる. このように, ベイズ統計における確率の解釈「ビリーフ」は頻度主義の確率で扱える対象を拡張でき, 個人的な信念やそれに基づく意思決定をも合理的に扱えるツールとなる.

期待効用

$u(a, \theta)$: 行動 a , 変数 θ のときの効用関数

期待効用

$$E[u(a, \theta)] = \int u(a, \theta)p(\theta)d\theta$$

データ x を所与としたとき, 予測分布 $p(y|x) = \int p(y|\theta)p(\theta|x)d\theta$ を用いて

$$E[u(a, y)] = \int u(a, y)p(y|x)dy$$

が得られる.

期待効用

$u(a, \theta)$: 行動 a , 変数 θ のときの効用関数
期待効用

$$E[u(a, \theta)] = \int u(a, \theta)p(\theta)d\theta$$

例 コインを投げて表が出れば1万円もらえて、裏が出れば2万円支払うというかけの期待効用は、
 a : かけに参加する, θ : コインの表か裏, となり,
 $u(a, \text{表}) = 1\text{万円}$, $u(a, \text{裏}) = -2\text{万円}$, $p(\text{表}) = \frac{1}{2}$,
 $p(\text{裏}) = \frac{1}{2}$ となる.

$$E[u(a, \theta)] = 10000 \times \frac{1}{2} - 20000 \times \frac{1}{2} = -5000$$

デシジョンツリー



ライファとシュレイファー

ベイズ意思決定理論

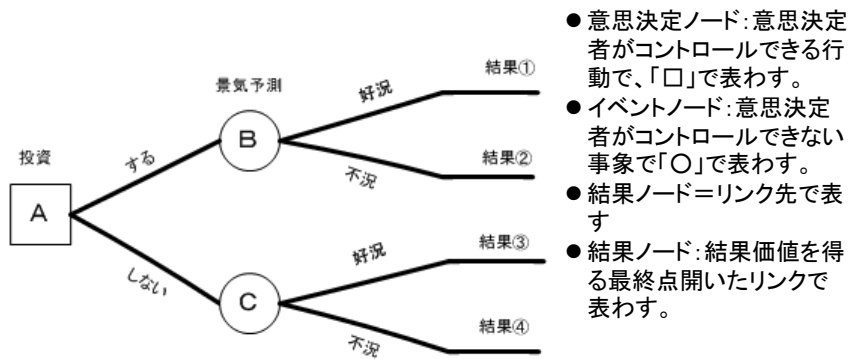
期待効用最大化 $\sum P(X_i)P(U_i)$

デシジョンツリーの開発

経済学や経営学の分野で大ブ
レーク



デシジョンツリー



例題

研究投資には100億円が必要

研究が成功すると利益が200億円見込める

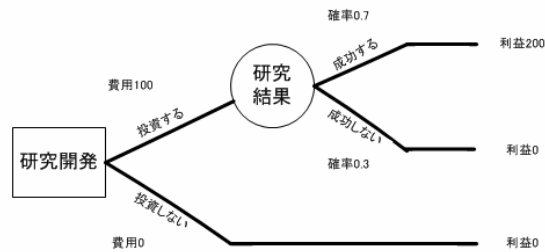
研究が成功する割合は70%である

例題

研究投資には100億円が必要

研究が成功すると利益が200億円見込める

研究が成功する割合は70%である

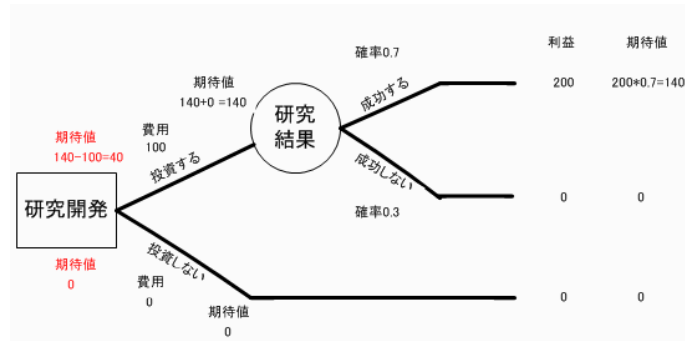


例題

研究投資には100億円が必要

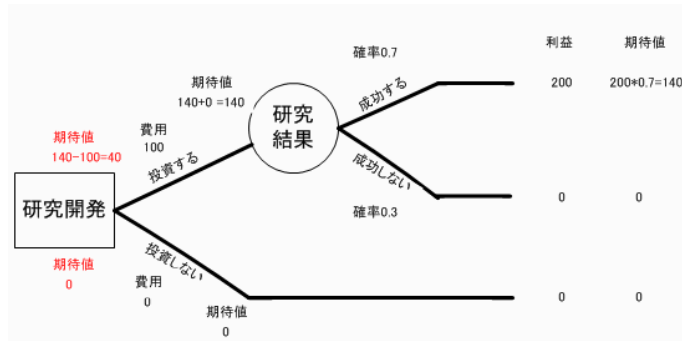
研究が成功すると利益が200億円見込める

研究が成功する割合は70%である



結論

投資したほうが40億円期待値が高いため投資せよ。



演習問題1

A社を100億で買収するかどうかを検討する。
 A社は確率 0.6で10年で150億が見込まれるが、
 確率0.1で100億、確率0.3で倒産し利益0となる。
 買収するのがよいか？ それともしないことがよいか？

演習問題2

100億の投資資金がある.

A社かB社に投資するかどうかを考えている.

A社に投資するには50億必要であり、その年の景気がよくなれば60億利益が出る. 景気が悪くなれば30億利益が出る. 一方、B社に投資するには100億必要であり、その年の景気がよくなれば160億利益が出る. 景気が悪くなれば80億利益が出る. 投資資金の余った分は、銀行に預け、確実に10%の利子がつく. 景気が良くなる確率を0.5とし、A社、B社に投資するか、もしくはどちらにも投資しない場合のどれが良いかを考えよ。

情報を考える

1. 昨日、親友に会いました。
2. 昨日、錦織圭に会いました。

どちらがニュースバリューが高い？

効用関数

$$u(a, \theta) = -\log P(\theta)$$

θ の生起確率が低いほど、 θ の起こったという情報（ニュース価値）が大きくなる。

期待効用関数

$$-\sum_{\theta} P(\theta) \log P(\theta)$$

エントロピーと等価。

どちらが情報量が高い？

1. 昨日、親友に会いました。
2. 昨日、錦織圭に会いました。

明日親友にあう確率=1/2

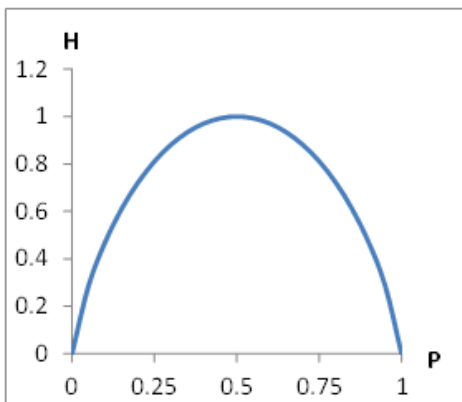
明日錦織圭にあう確率1/10000

$$\begin{aligned} & -P(\text{親友に会う})\log P(\text{親友に会う}) \\ & -P(\text{親友に会わない})\log P(\text{親友に会わない}) \\ & = -\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} = 1.0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -P(\text{錦織圭に会う})\log P(\text{錦織圭に会う}) \\ & -P(\text{錦織圭に会わない})\log P(\text{錦織圭に会わない}) \\ & = -\frac{1}{10000}\log_2 \frac{1}{10000} - \frac{9999}{10000}\log_2 \frac{9999}{10000} = 0.00173 \end{aligned}$$

二値の変数Aの情報量

$$H(A) = -\sum_{A=0,1} P(A)\log P(A)$$



不確かさ
わからなさ
の指標

問

赤玉と白玉が合わせて100個入ったツボがある。一つ玉を引いて赤玉か白玉が出る情報量 $H(A)$ はいくらか？

回答

$$\begin{aligned} H(A) &= -P(\text{赤玉})\log P(\text{赤玉}) \\ &\quad -P(\text{白玉})\log P(\text{白玉}) \\ &= -\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} = 1.0 \end{aligned}$$

問

ランダムに壺から20個の玉を取り出した。
このとき、赤玉が15個、白玉が5個取り出された。

赤玉の出る確率をベイズ推定せよ。ただし、
ベータ分布を事前分布とし、ハイパーパラメータ
を1/2としてEAP推定せよ。

回答

赤玉が15個、白玉が5個取り出されたデータを
 X とすると

$$\hat{P}(\text{赤玉}|X) = \frac{15 + 1/2}{20 + 1} = 0.7381$$

$$\hat{P}(\text{白玉}|X) = \frac{5 + 1/2}{20 + 1} = 0.2619$$

問

データが得られた後の赤玉か白玉が出る情報量はいくらか？

回答

$$\begin{aligned} H(A|X) &= -P(\text{赤玉}|X)\log P(\text{赤玉}|X) \\ &\quad -P(\text{白玉}|X)\log P(\text{白玉}|X) \\ &= -0.7381 \log_2 0.7381 - 0.2619 \\ &\quad \log_2 0.2619 = 0.8296 \end{aligned}$$

利得情報量

θ の確率分布が $Q(\theta)$ から $P(\theta)$ に変化したときの変化量を効用とする効用関数は

$$u(a, \theta) = (-\log Q(\theta)) - (-\log P(\theta))$$

期待効用は

$$\sum_{\theta} P(\theta) [(-\log Q(\theta)) - (-\log P(\theta))]$$

$$= \sum_{\theta} P(\theta) \log \frac{P(\theta)}{Q(\theta)} \quad Q(\theta) \text{と} P(\theta) \text{の差を示}$$

す。 θ が連続量の場合は

$$= \int_{\theta} P(\theta) \log \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}$$

利得情報量

θ の確率分布が $Q(\theta)$ から $P(\theta)$ に変化したときの変化量を効用とする効用関数は

$$u(a, \theta) = (-\log Q(\theta)) - (-\log P(\theta))$$

期待効用は

$$\sum_{\theta} P(\theta) [(-\log Q(\theta)) - (-\log P(\theta))]$$

$$= \sum_{\theta} P(\theta) \log \frac{P(\theta)}{Q(\theta)} \quad Q(\theta) \text{と} P(\theta) \text{の差を示す。}$$

θ が連続量の場合は

$$= \int_{\theta} P(\theta) \log \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}$$

情報理論では、カルバックライブラー情報量と呼ぶ。

EVSIとは

$$EVSI = E[u(a, \theta)P(\theta|X)] - E[u(a, \theta)P(\theta)]$$

データがあるときとないときの期待効用の差 つまり データの予想価値

Expected value of sample information(EVSI)と呼ばれる.

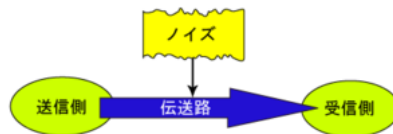
情報理論では、相互情報量に一致する

$$EVSI = H(A) - H(A|X)$$

情報理論では

$$H(A) - H(A|X)$$

相互情報量 (mutual information)
と呼ぶ



通信路容量 (Channel capacity)とは通信路の相互情報量の上限

ベイズでは データXを得ることにより期待される情報

フィッシャー情報量

事後分布 $P(\theta|X)$ の θ を少しだけ変化させて $\theta + h$ にする。

このときの情報量利得の効用関数は

$$u(a, \theta) = (-\log P(\theta|X)) - (-\log P(\theta + h|X))$$

期待効用関数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\theta} P(\theta + h|X) \log \frac{P(\theta + h|X)}{P(\theta|X)}$$

は フィッシャー情報量に一致する。

証明は 上の期待効用関数を二次の項までテイラー展開すればよい

人間の直感的意思決定

問題

夜、一台のタクシーがひき逃げをしました。この市では、緑タクシーと青タクシーの二社が営業しています。事件とタクシー会社については次の情報が考えられています。

- 目撃者は、タクシーが青だったと証言している。事件当夜と同じ状況で目撃者の信頼性をテストした結果、この目撃者は青か緑かを80%の確率で正しく識別した。
- 市内を走るタクシーの85%は緑タクシーで15%が青タクシーである。

青タクシーがひき逃げした確率はいくらでしょうか？

解答

犯人が緑タクシーの場合をG, 青タクシーの場合をBとする。目撃者のタクシーが青だったという証言をEとする。

$$\begin{aligned}
 P(B|E) &= \frac{P(E|B)P(B)}{P(E|G)P(G) + P(E|B)P(B)} \\
 &= \frac{0.8 \times 0.15}{0.2 \times 0.85 + 0.8 \times 0.15} \\
 &\approx 0.41
 \end{aligned}$$

人間の直感的予測

ハーバードなど有名文科系の大学生の大半が80%と回答した。

人間の直感的予測では、事前分布が無視されやすい。

問題

二つの商品がデパートのバーゲンで売っています。どちらが高く売っているでしょうか？

1. 5万円のブランドディナーセット
2. 5万2千円のブランドディナーセット＋キューピー人形

問題

二つの商品がデパートのバーゲンで売っています。それぞれの価格を見積もってください。

1. 5万円のブランドディナーセット
2. 5万2千円のブランドディナーセット＋キューピー人形



実験結果

5万円のブランドディナーセットの平均見積もり
価格>5万2千円のブランドディナーセット＋
キューピー人形 平均見積もり価格

効用関数の難しさ

効用の価値は線形的に増加しない

問題

リンダは31歳の独身女性。外交的で大変聡明である。専攻は哲学だった。学生時代には、差別の問題に強い関心を持っていた。また、反核運動に参加したことがある。

次のうちどちらの可能性が高いですか？

リンダは 銀行員である。

リンダは、銀行員でフェミニスト運動に熱心である。

文系学生のほとんどが「リンダは、銀行員でフェミニスト運動に熱心である。」と答えた。

理系学生は「リンダは、銀行員である。」と答える人が多かった。

人間の直感的予測

人間の直感的予測は確率計算ではなく
典型性との類似性に基づくようだ。

典型性が高いカテゴリはより高い可能性として
推論される。

専門家の予測の怪しさ

Paul E Meehl (1986) Causes and effects of my disturbing little book, Journal of personality assessment 50 , 370-375

Paul E Meehl (2013) Clinical vs. Statistical Prediction:A theoretical analysis and a review of the Evidence. Echo Point Books & Media

臨床医の予測は単純な重回帰分析の予測に勝つことはない。

James Shanteu (1988) Psychological characteristics and strategies of expert decision makers, Acta psychologica 68, 203-215

裁判官、監査人、病理学者、心理学者、ファイナンシャルプランナーの予測も同様の結果であった。

John D. Dawes and Robyn M. Dawes (2004) The superiority of simple alternatives to regression for social science predictions, Journal of educational and behavioral science 29 317-331

多くの場面で面接試験の将来予測はほとんど当たらない。

ダニエル カーネマン ファスト アンド スロー 早川書房
株の専門家の将来予測は ほとんど当たっていない。

ベイズ選好モデル:Luce モデル

$T = \{x, y, \dots\}$ 代替案の全体を示す集合

$A, B, \dots \subset T$ 代替案の集合

z 属性あるいは属性の値

$P(x|A)$ 集合 A のうち x を選択する確率

$u(x)$ x の効用

$$P(x|A) = \frac{u(x)}{\sum_{y \in A} u(y)}$$

多項ロジットモデル

$T = \{x, y, \dots\}$ 代替案の全体を示す集合

$A, B, \dots \subset T$ 代替案の集合

$z_{x1}, z_{x2}, \dots, z_{xi}, \dots, z_{xm}$ x の m 個の属性の値

$P(x|A)$ 集合 A のうち x を選択する確率

$u(x) = \exp(\sum_{i=1}^m \beta_i z_{xi})$ x の効用

β_i 属性 z_i の重み

$$P(x|A) = \frac{\exp(\sum_{i=1}^m \beta_i z_{xi})}{\sum_{y \in A} \exp(\sum_{i=1}^m \beta_i z_{yi})}$$

例題

3つのレコードから1つを選択する。1つはドビュッシー作曲の交響曲、他の二つはベートーベン作の弦楽四重奏曲である。3つの代替案 x, y, z を $x = D, y = B_1, z = B_2$ と置いて $T = \{D, B_1, B_2\}$ とする。このレコードはそれぞれの対にしたとき効用（好み）の差はない。このとき、Luceのモデル、多項ロジットモデルでは、

$$P(D|T) = \frac{1}{3}, P(B_1|T) = \frac{1}{3}, P(B_2|T) = \frac{1}{3}$$

先の3つのレコードの中のそれぞれ二つの対の効用が等しくても3つの代替案になったら選好確率は変わることもあるのでは？

従来の選好モデルは、各代替案が独立であると仮定していたが、その類似性が関係しているのではないだろうか？

EBA: Elimination by Aspect Tversky 1972

代替案 D のみに固有の属性を z_D , B_1 のみに固有の属性を z_{B_1} , B_2 のみに固有の属性を z_{B_2} とする。 B_1 と B_2 に共通する属性を $z_{B_{12}}$ とする。他の対では共通する属性がないので考慮しない。

$$P(D|T)$$

$$= \frac{u(z_D)}{u(z_D) + u(z_{B_1}) + u(z_{B_2}) + u(z_{B_{12}})}$$

$u(z_{B_1}) = u(z_{B_2}) = a, u(z_{B_{12}}) = b$ とするとそれぞれの対にしたとき効用（好み）の差はないので $u(z_D) = a + b$

EBA: Elimination by Aspect

Tversky 1972

$$P(D|T)$$

$$= \frac{u(z_D)}{u(z_D) + u(z_{B_1}) + u(z_{B_2}) + u(z_{B_{12}})}$$

$u(z_{B_1}) = u(z_{B_2}) = a, u(z_{B_{12}}) = b$ とすると
それぞれの対にしたとき効用（好み）の差はないので $u(z_D) = a + b$

$$P(D|T) = \frac{a + b}{3a + 2b}$$

$$P(B_1|T) = P(B_2|T) = \frac{\left(1 - \frac{a + b}{3a + 2b}\right)}{2} = \frac{a + b/2}{3a + 2b}$$

$$P(D|T) = \frac{a + b}{3a + 2b}$$

$$P(B_1|T) = P(B_2|T) = \frac{a + b/2}{3a + 2b}$$

ベートーベンの二枚のレコードの類似性が高いとき、 $a \rightarrow 0$

$$P(D|T) \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$P(B_1|T) = P(B_2|T) \rightarrow \frac{1}{4}$$

ベートーベンの二枚のレコードの類似性が低いとき、 $b \rightarrow 0$

$$P(D|T) = P(B_1|T) = P(B_2|T) = \frac{1}{2}$$

選好プロセスでは、類似性の高いものとそれ以外を選択していくプロセスになる。

1990年以来、ベイジアンネットワークによって変数間の相関を考慮すれば 同様の推論が可能になった。

問題 Kahneman and Tversky 1979

あるくじがある。確率 π で賞金 x があたり、確率 $1-\pi$ で賞金 y が当たるくじを $\langle x, y, \pi \rangle$ とかく。

1. くじ $a_1 \langle 100\text{万円}, 0, 0.45 \rangle$
2. くじ $a_2 \langle 50\text{万円}, 0, 0.9 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

問題 Kahneman and Tversky 1979

あるくじがある。確率 π で賞金 x があたり、確率 $1-\pi$ で賞金 y が当たるくじを $\langle x, y, \pi \rangle$ とかく。

1. くじ $a_1 \langle 100\text{万円}, 0, 0.45 \rangle$
2. くじ $a_2 \langle 50\text{万円}, 0, 0.9 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

多くの人は $a_1 \prec a_2$

問題 Kahneman and Tversky 1979

あるくじがある。確率 π で賞金 x があたり、確率 $1-\pi$ で賞金 y が当たるくじを $\langle x, y, \pi \rangle$ とかく。

1. くじ $a_3 \langle 100\text{万円}, 0, 0.001 \rangle$
2. くじ $a_4 \langle 50\text{万円}, 0, 0.002 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

問題 Kahneman and Tversky 1979

あるくじがある。確率 π で賞金 x があたり、確率 $1-\pi$ で賞金 y が当たるくじを $\langle x, y, \pi \rangle$ とかく。

1. くじ $a_3 \langle 100\text{万円}, 0, 0.001 \rangle$
2. くじ $a_4 \langle 50\text{万円}, 0, 0.002 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

多くの人は $a_3 > a_4$

問題 Kahneman and Tversky 1979

まず1万円が与えられる。そのうえで以下のどちらのくじを選ぶか？

1. くじ $a_5 \langle 1\text{万円}, 0, 0.5 \rangle$
2. くじ $a_6 \langle 5\text{千円}, 0, 1 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

問題 Kahneman and Tversky 1979

まず1万円が与えられる。そのうえで以下のどちらのくじを選ぶか？

1. くじ a_5 $\langle 1\text{万円}, 0, 0.5 \rangle$
2. くじ a_6 $\langle 5\text{千円}, 0, 1 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

多くの人は $a_5 \prec a_6$

問題 Kahneman and Tversky 1979

まず2万円が与えられる。そのうえで以下のどちらのくじを選ぶか？

1. くじ a_7 $\langle -1\text{万円}, 0, 0.5 \rangle$
2. くじ a_8 $\langle -5\text{千円}, 0, 1 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

問題 Kahneman and Tversky 1979

まず2万円が与えられる。そのうえで以下のどちらのくじを選ぶか？

1. くじ a_7 $\langle -1\text{万円}, 0, 0.5 \rangle$
2. くじ a_8 $\langle -5\text{千円}, 0, 1 \rangle$

どちらのくじを選ぶか？

多くの人は $a_7 > a_8$

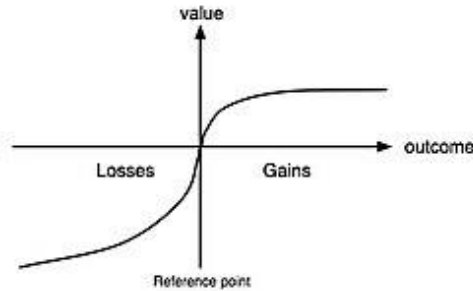
説明

これら一連の結果が意味することは、人間は目の前に利益があると、利益が手に入らないというリスクの回避を優先し、損失を目の前にすると、損失そのものを回避しようとする傾向([損失回避性](#))があるということである。

「価値の大きさは金額に比例しない。金額が2倍になると、価値は2倍にはならず、2倍弱(1.6倍ぐらい)になる」
 こう考えると、「2倍の金額を半分の確率で得るよりも1倍の金額を確実に得る」ことの方が利益になるとわかる。また、「損害額を2倍にしても損害の価値(マイナス値)は2倍にはならない」のであれば、2倍の損害のリスクを半分の確率で負う方が利益になる、とわかる。

このように、「価値の大きさは金額に比例しない」というモデルを取ることで、説明が可能となる。

プロスペクト理論 Kahneman and Tversky 1979



[引用](#)

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%97%E3%83%AD%E3%82%B9%E3%83%9A%E3%82%AF%E3%83%88%E7%90%86%E8%AB%96>

人間の意思決定の基準

1. Simon 1982

満足度基準: 最も満足できる代替案を選ぶ
すなわち妥協してもよいことを意味する

2. Kahneman and Tversky 1982

後悔(regret)しない決定

まとめ

1. ベイズのbeliefは意思決定理論により決定される
2. 期待効用、期待損失により人間の意思決定を支援し、人工知能にも用いられる
3. 情報理論における様々な情報量も意思決定理論である
4. 人間の直感的推論は意思決定理論の効用(損失)関数に金額などの単純な利得を入れただけでは表現できない。より複雑な人間特有の心理的効用(損失)関数を考えなければならない。