

## 修　士　論　文　の　和　文　要　旨

研究科・専攻	大学院 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻 博士前期課程		
氏　名	伊藤 貴俊	学籍番号	1731022
論 文 題 目	ベイジアンネットワーク学習におけるハイパープラメータに関する研究		

### 要　旨

ベイジアンネットワークは確率変数をノードとし、ノード間の条件付き従属関係を非循環有向グラフで表し、同時確率分布が各ノードの親ノード集合を所与とした条件付き確率の積に分解される確率的グラフィカルモデルである。

ベイジアンネットワークの学習は、条件付き確率パラメータ集合をデータから推定するパラメータ学習と変数に対応するノード集合によって構成される非循環有向グラフネットワーク構造をデータから推定する構造学習の二つに分けて考えることができる。構造学習では、候補構造の中から学習スコアを最大化する構造を探索するスコアベースアプローチと、条件付き独立性検定を用いて構造を探索する制約ベースアプローチが主に用いられている。スコアベースアプローチの構造学習では、学習スコアとして BDeu スコアがよく用いられるが、BDeu スコアのハイパープラメータの Equivalent Sample Size (ESS) の値は、ユーザーが自由に設定できる事前知識の重みを示す擬似データであり、ESS の値は構造学習の結果に大きな影響を与えることが知られている。そのため、データから最適な ESS の値を決定することが必要である。

本論文では、Ueno (2010)により数学的に示されたデータ数が十分に大きい場合に ESS の最適値が 1.0 に収束することを実証的に示す。データ数が十分に大きくない場合に一般的に用いられてきた、BDeu スコアを最大化する ESS の値を用いる経験ベイズ手法が、ESS の最適値を求めることができていないことを構造学習の評価実験の結果より示す。

そこで、数学的手法ではなくこれまでベイジアンネットワークで用いられてこなかった交差検証を用いた ESS の決定法として四つの手法を提案する。そして、交差検証を用いた提案手法による構造学習の評価実験の結果について考察する。

実験の結果、様々な条件を変えて最適値を得ることができる手法は残念ながら明らかにはされなかった。しかし、データ数が小さいときに、従来から一般的に用いられてきた経験ベイズ手法が最適値を保証しないことを示したことは意義深い。

平成 30 年度 修士論文

ベイジアンネットワーク学習における  
ハイパーパラメータに関する研究

電気通信大学 大学院情報理工学研究科

情報・ネットワーク工学専攻

情報数理工学プログラム

学籍番号 1731022

伊藤 貴俊

主任指導教員 植野 真臣 教授

指導教員 川野 秀一 准教授

提出年月日 2019 年 3 月 1 日

# 目次

<b>第 1 章 はじめに</b>	6
<b>第 2 章 ベイジアンネットワーク学習</b>	10
<b>2.1 ベイジアンネットワーク</b> . . . . .	10
<b>2.2 ベイジアンネットワーク学習</b> . . . . .	11
<b>第 3 章 ESS 決定の従来手法</b>	19
<b>3.1 ESS の値を固定して学習</b> . . . . .	19
<b>3.2 ESS の値を変化させて BDeu スコアを最大化</b> . . . . .	20
<b>3.3 周辺尤度を最大化する ESS を近似計算</b> . . . . .	21
<b>第 4 章 従来手法を用いた評価実験</b>	23
<b>4.1 実験 1 の手順</b> . . . . .	23
<b>4.2 実験 1 の結果と考察</b> . . . . .	27
<b>4.3 実験 2 の手順</b> . . . . .	38
<b>4.4 実験 2 の結果と考察</b> . . . . .	39
<b>第 5 章 ESS 決定の提案手法</b>	42
<b>5.1 条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる</b> . . . . .	44
<b>5.2 Predictive Likelihood を用いる</b> . . . . .	44
<b>5.3 生成データのテストデータとの一致回数を用いる</b> . . . . .	45
<b>5.4 マルコフブランケットを用いたテストデータの条件付き尤度を用いる</b> . . . . .	46
<b>第 6 章 提案手法を用いた評価実験</b>	47

6.1 実験3の手順	47
6.2 実験3の結果と考察	48
<b>第7章 おわりに</b>	<b>50</b>
7.1 まとめ	50
7.2 今後の課題	52
<b>謝辞</b>	<b>53</b>
<b>参考文献</b>	<b>54</b>

# 図目次

4.1	ネットワーク Strongly skewed distribution	24
4.2	ネットワーク Skewed distribution	24
4.3	ネットワーク Combined skewed and uniform distribution	24
4.4	ネットワーク Uniform distribution	25
4.5	ネットワーク Strongly uniform distribution	25
4.6	ネットワーク cancer	25
4.7	ネットワーク earthquake	26
4.8	ネットワーク asia	26
4.9	ネットワーク survey	27

# 表目次

4.1 実験1の結果（ネットワーク Strongly skewed distribution）	29
4.2 実験1の結果（ネットワーク Skewed distribution）	30
4.3 実験1の結果（ネットワーク Combined skewed and uniform distribution）	31
4.4 実験1の結果（ネットワーク Uniform distribution）	32
4.5 実験1の結果（ネットワーク Strongly uniform distribution）	33
4.6 実験1の結果（ネットワーク asia）	34
4.7 実験1の結果（ネットワーク cancer）	35
4.8 実験1の結果（ネットワーク earthquake）	36
4.9 実験1の結果（ネットワーク survey）	37
4.10 実験2のESSの値の決定方法	38
4.11 実験2、3の結果（図4.1～4.5のネットワーク）	40
4.12 実験2、3の結果（図4.6～4.9のネットワーク）	41
6.1 実験3のESSの値の決定方法	48

# 第 1 章

## はじめに

ベイジアンネットワークは、確率変数をノードとし、ノード間の条件付き従属関係を非循環有向グラフ（Directed Acyclic Graph, DAG）で表し、同時確率分布が各ノードの親ノード集合を所与とした条件付き確率の積に分解される確率的グラフィカルモデルである。

現在、インターネット上に氾濫している大量のデータをどのように有効活用できるかは重要な課題となっている。ベイジアンネットワークは同時確率分布の最も仮定が少ない自然なモデルとして、様々な事象をノードによって表現することが可能で、全てのノードが入力と出力に用いることができる。さらに、確率推論の予測精度が高いことが知られているため、非常に適用範囲の広い技術である。[山]そのため、システムの故障診断やマーケティング分野等の数多い応用例がある。

ベイジアンネットワークの学習は、条件付き確率パラメータ集合をデータから推定するパラメータ学習と、変数に対応するノード集合によって構成される非循環有向グラフネットワーク構造をデータから推定する構造学習の二つに分けて考えることができる。

構造学習では、候補構造から最適な学習スコアを持つ構造を探索するスコアベースアプローチと、条件付き独立性検定により構造を探索する制約ベースアプローチがよく用いられている。スコアベースアプローチの構造学習では、一般には周辺尤度を最大化する構造を探索する。

パラメータの事前分布にディリクレ分布を仮定したとき、周辺尤度は Bayesian Dirichlet (BD) スコアと呼ばれる。さらに、Heckerman, Geiger and Chickering (1995) [2] が提案し

ている BD スコアに尤度等価に矛盾しない条件を導入した学習スコアは Bayesian Dirichlet equivalent (BDe) スコアと呼ばれる。BDe スコアでは，Equivalent Sample Size (ESS) と呼ばれる事前知識の重みを示す擬似データを，ユーザーが事前に考えているネットワーク構造の仮説を所与として各ハイパーパラメータに分配している。

また，Buntine (1991) [3] が提案した学習スコアは，ESS をパラメータ数で割ることで一様事前分布を導入する BDe スコアの特殊な場合と解釈することができるため，Bayesian Dirichlet equivalent uniform (BDeu) スコアと呼ばれている。Heckerman, Geiger and Chickering (1995) も指摘しているがユーザーが事前にネットワーク構造の仮説を持つことは困難であり，誤っている可能性も高いため，現在は BDeu スコアがよく用いられている学習スコアである。

ベイジアンネットワークのスコアベースアプローチの構造学習では，BDeu スコアがよく用いられているが，Steck (2002) [4] はデータ数が大きい場合であっても，BDeu スコアのハイパーパラメータの ESS の値を 0 に近づけていくと学習されたベイジアンネットワークの DAG 構造のエッジ数が減少し，ESS の値を大きくすると DAG 構造のエッジ数は増えるという性質があることをシミュレーションにより示した。Ueno (2010) [5] は，データ数が十分に大きい場合は BDeu スコアの ESS の値は 1.0 が最適であるということを数学的に示した。また，Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) [6] は，ユーザーが自由に設定できる ESS の値が BDeu スコアを用いた構造学習により学習されるネットワーク構造に対して大きな影響を与えることを示した。したがって，データ数が十分に大きくない場合の ESS の値はユーザーが自由に設定するのではなくデータから最適な値を決定することが必要になる。

Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) は，この問題の解決手法の一つとして ESS の値を 1 から 100 まで 1.0 ずつ変化させながら BDeu スコアを最大化する ESS を見つけるという経験ベイズ手法を提案した。さらに，Steck (2008) [7] は，周辺尤度を最大化する ESS の値を近似計算を用いて解析的に求める経験ベイズ手法を提案し，Silander,

Kontakanen and Myllymäki (2007) の経験ベイズ手法よりも高速に同等程度の精度を保つ ESS の値を求める能够性を示した。

本論文では、まず、ベイジアンネットワークとその構造学習について述べ、BDeu スコアの ESS の値の決定法の従来手法を述べる。次に、従来手法により決定した ESS の値を用いた構造学習の評価実験の結果より、データ数が十分に大きい場合は BDeu スコアの ESS の値は 1.0 が最適であるということを示す。さらに、データ数が十分に大きくない場合にこれまで一般的に用いられてきた経験ベイズ手法が、ESS の値を最適化できていないことを実証的に示す。

このことから BDeu スコアを最大化する ESS の値が学習効率を最大化するとは限らないということがわかる。そこで、ESS の数学的な最適化は困難であると考え、経験的に交差検証を用いて決定する手法を提案する。ベイジアンネットワークの構造学習における交差検証を用いた ESS の決定法では、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がどれほど適切な構造であるかを測ることが必要である。

Ueno (2008) [9] では、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造を真のネットワーク構造と比較して誤りの個数を最小化する ESS の値を選択する手法が提案されている。しかしながら、現実には真のネットワーク構造は未知であるため真のネットワーク構造と比較することはできない。

また、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造とテストデータから学習されたネットワーク構造を比較して、誤りの個数を最小化する ESS の値を選択する手法も考えられるが、Ueno (2010) [5] で示されているように、ESS の値を大きくしていくと、学習されるネットワーク構造は漸近的に完全グラフに近づき、ESS の値を小さくしていくと、学習されるネットワーク構造は漸近的に空グラフに近づくため、このような交差検証により決定する ESS の値では、真の構造を学習することはできないことが確認されている。

本研究で提案する交差検証を用いて ESS の値を決定する手法では、トレーニングデータ

タから学習されたネットワーク構造がどれほど適切な構造であるかをテストデータに対する予測精度として以下の四つの手法を提案する。

#### 1. 条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる手法

条件付き Kullback-Leibler 情報量は、二つの確率分布の差異を表す指標で、分布間擬距離とも呼ばれる。トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がテストデータの確率構造とどれほど近いかを考えるため、条件付き Kullback-Leibler 情報量を最小化する ESS の値を求める。

#### 2. Predictive Likelihood を用いる手法

Malone, Järvisalo and Myllymäki (2015) [10] で述べられているトレーニングデータから学習されたネットワーク構造における各変数の親変数を所与としたテストデータの条件付き尤度である Predictive Likelihood を最大化する ESS の値を求める。

#### 3. 生成データのテストデータとの一致回数を用いる手法

トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がテストデータの予測にどれだけ当てはまるかを考え、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造からデータを生成し、そのデータとテストデータの一致回数を最大化する ESS の値を求める。

#### 4. マルコフブランケットを用いたテストデータの条件付き尤度を用いる手法

トレーニングデータから学習されたネットワーク構造における各変数のマルコフブランケットを所与としたテストデータの条件付き尤度を最大化する ESS の値を求める。

最後に、提案手法により決定した ESS の値を用いた構造学習の評価実験の結果を従来手法と比較した結果、様々な条件を変えて ESS の最適値を得ることができる手法は残念ながら明らかにはされなかった。しかしながら、データ数が小さいときに、従来から一般的に用いられてきた経験ベイズ手法が最適値を保証しないことを示したことは意義深い。

## 第 2 章

# ベイジアンネットワーク学習

本章では、本研究において必要となるベイジアンネットワークとベイジアンネットワークの学習について、基礎的な知識に関して述べる。

### 2.1 ベイジアンネットワーク

$n$  個の変数集合  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  をもつベイジアンネットワークは、 $(G, \Theta)$  で表現される。

- $G$  は  $\mathbf{x}$  に対応するノード集合によって構成される非循環有向グラフ (directed acyclic graph, DAG) ネットワーク構造と呼ばれる。
- $\Theta$  は、 $G$  の各エッジに対応する条件付き確率パラメータ集合  $\{p(x_i | \Pi_i, G)\}, (i = 1, \dots, n)$  である。ただし、 $\Pi_i$  は変数  $x_i$  の親変数集合を示している。

変数集合  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  をもつベイジアンネットワーク  $(G, \Theta)$  の同時確率分布  $p(\mathbf{x} | G, \Theta)$  は以下のように、各変数の親変数集合を所与とした条件付き確率の積に分解される。

$$p(\mathbf{x} | G, \Theta) = \prod_i P(x_i | \Pi_i, G, \Theta) \quad (2.1)$$

各変数  $x_i$  は  $r_i$  個の要素をもつ状態集合  $\{1, \dots, r_i\}$  から一つの値をとり、各変数  $x_i$  が値  $k$  をとるととき、 $x_i = k$  と書くこととする。また、各変数  $x_i$  の親変数集合  $\Pi_i$  のパターンは  $q_i$  個とし、 $\Pi_i$  が  $j$  番目のパターンをとるととき、 $\Pi_i = j$  と書くこととする。さらに、

$\Pi_i = j$  のときに  $x_i = k$  となる条件付き確率  $p(x_i = k \mid \Pi_i = j, G)$  を条件付き確率パラメータ  $\theta_{ijk}$  で表し,  $\Pi_i = j$  のときに  $x_i = k$  となる頻度を  $n_{ijk}$  で表すこととする.

## 2.2 ベイジアンネットワーク学習

### 2.2.1 ベイジアンネットワークのパラメータ学習

ベイジアンネットワークの条件付き確率パラメータ集合  $\Theta = \{\theta_{ijk}\}$  をデータから推定することをベイジアンネットワークのパラメータ学習と呼ぶ.

データ  $D$  を与えられたとき, パラメータ集合  $\Theta$  についての尤度は, 式 (2.2) の多項分布に従う.

$$p(D \mid \Theta, G) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{q_i} \frac{\left(\sum_{k=1}^{r_i} n_{ijk}\right)!}{\prod_{k=1}^{r_i} n_{ijk}!} \prod_{k=1}^{r_i} \theta_{ijk}^{n_{ijk}} \quad (2.2)$$

ここで,  $\frac{\left(\sum_{k=1}^{r_i} n_{ijk}\right)!}{\prod_{k=1}^{r_i} n_{ijk}!}$  は, 尤度を積分して 1.0 にする正規化項である.  
 ここで, パラメータ集合  $\Theta$  についての事前分布  $p(\Theta \mid G)$  を考えるが, パラメータ集合  $\Theta$  についての尤度は多項分布に従うため, 事前分布と事後分布が同分布となるよう, 多項分布の自然共役事前分布であるディリクレ分布を式 (2.3) のように仮定する. ここで,  $\Gamma$  は  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  を満たすガンマ関数,  $\alpha_{ijk}$  は,  $n_{ijk}$  に対応する事前知識を表す擬似サンプルのハイパーパラメータである.

$$p(\Theta \mid G) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{q_i} \frac{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{ijk}\right)}{\prod_{k=1}^{r_i} \Gamma(\alpha_{ijk})} \prod_{k=1}^{r_i} \theta_{ijk}^{\alpha_{ijk}-1} \quad (2.3)$$

ここで, ディリクレ分布の性質より,  $\alpha_{ijk}$  の値が全て 1.0 のとき,  $\theta_{ijk}$  の事前分布は一様

分布となる。 $\alpha_{ijk}$ の値が全て 0.5 のように小さくなると、 $\theta_{ijk}$ の事前分布は U 分布のように確率 0 と 1 の部分に二極化して密度が高くなる。 $\alpha_{ijk}$ の値が全て 10 のように大きい値になると、 $\theta_{ijk}$ の事前分布は凸分布に近づき、推定値がデータの影響を受けにくくなる。

事後分布は事前分布に尤度を掛け合わせることで得ることができるので、式 (2.2) と式 (2.3) を掛け合わせることで次のように表すことができる。

$$p(D, \Theta | G) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{q_i} \frac{\Gamma\left(\sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{ijk}\right)}{\prod_{k=1}^{r_i} \Gamma(\alpha_{ijk})} \prod_{k=1}^{r_i} \theta_{ijk}^{n_{ijk} + \alpha_{ijk} - 1} \quad (2.4)$$

ベイズ統計学では MAP 推定値より事後分布の推定値である EAP 推定値の方が、頑健で予測効率が良いということが知られている。 $\theta_{ijk}$  の EAP 推定値は、式 (2.4) の期待値であるのでは次のように表すことができる。

$$\hat{\theta}_{ijk} = \frac{\alpha_{ijk} + n_{ijk}}{\alpha_{ij} + n_{ij}} \quad (2.5)$$

ただし、

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{r_i} \alpha_{ijk}, \quad n_{ij} = \sum_{k=1}^{r_i} n_{ijk}$$

とする。

## 2.2.2 ベイジアンネットワークのスコアベースアプローチの構造学習

ベイジアンネットワークの DAG 構造  $G$  をデータから推定することをベイジアンネットワークの構造学習と呼ぶ。構造学習はパラメータ学習と比べ、複雑な問題となる。構造学習では、候補構造から最適な学習スコアを持つ構造を探索するスコアベースアプローチと、条件付き独立性検定により構造を探索する制約ベースアプローチがよく用いられているが、本研究ではスコアベースアプローチについて述べる。

構造学習の学習スコアとしては周辺尤度  $p(D | G)$  が一般的に用いられる。パラメータの事前分布にディリクレ分布を仮定すると周辺尤度は式 (2.6) のように表される。これを

Bayesian Dirichlet (BD) スコアと呼ぶ.

$$\begin{aligned} p(D \mid G) &= \int_{\Theta} p(D \mid \Theta, G)p(\Theta)d\Theta \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{q_i} \frac{\Gamma(\alpha_{ij})}{\Gamma(\alpha_{ij} + n_{ij})} \prod_{k=1}^{r_i} \frac{\Gamma(\alpha_{ijk} + n_{ijk})}{\Gamma(\alpha_{ijk})} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Heckerman, Geiger and Chickering (1995) [2] は、二つのベイジアンネットワーク構造の同時確率分布が等価（マルコフ等価）である構造は、それらの周辺尤度の値も同一でなければならないという尤度等価を導入し、尤度等価を満たすディリクレ分布の条件として以下のハイパーパラメータを提案した.

$$\alpha_{ijk} = \alpha p(x_i = k, \Pi_i = j \mid G^h) \quad (2.7)$$

ここで、 $\alpha$  は Equivalent Sample Size (ESS) と呼ばれる事前知識の重みを示す擬似データである。 $G^h$  はユーザーが事前に考えているネットワーク構造の仮説であり、その構造を所与として ESS を各ハイパーパラメータ  $\alpha_{ijk}$  に分配して事前知識を反映させる。この学習スコアは Bayesian Dirichlet equivalent (BDe) スコアと呼ばれる。

また、Buntine (1991) [3] が提案したスコアは、BDe スコアにおいて

$$\alpha_{ijk} = \alpha / (r_i q_i) \quad (2.8)$$

とした BDe スコアの特殊な場合と解釈できるため、Bayesian Dirichlet equivalent uniform (BDeu) スコアと呼ばれる。Heckerman, Geiger and Chickering (1995) も指摘しているように、ユーザーが事前にネットワーク構造の仮説を持つことは困難であり、誤っている可能性も高いため、現在は BDeu スコアがよく用いられている学習スコアである。

次に、BDeu スコアを最大化する構造の厳密解探索する手法として、第 6 章で述べる本研究の実験でも用いた Silander and Myllymäki (2006) [4] の動的計画法を用いて探索する手法について述べる。

まず、 $n$  変数のベイジアンネットワークにおいて考えられる  $n2^{n-1}$  個全てのサブネットワークに対して、Algorithm 4 に示すアルゴリズムを用いてスコア（ローカルスコア）を計算

する。ここで,  $\omega \subseteq \mathbf{x}$  は変数集合,  $ct$  は  $\omega$  に対応する分割表を表す。また,  $Ct2Cft(ct, x_i)$  は分割表  $ct$  から生成される変数  $x_i$  に関する条件付き頻度表,  $Score(x_i \mid \omega \setminus \{x_i\})$  は BDeu スコア,  $Ct2Ct(ct, x_i)$  は分割表  $ct$  から変数  $x_i$  を周辺化した分割表を表す。

---

**Algorithm 1** 全てのローカルスコアを計算 ( $getLocalScore(\omega, ct)$ )

---

**Input:**  $\omega, ct$

**Output:** LS

```

1: for all  $x_i \in \omega$  do
2:    $Ct2Cft(ct, x_i)$ 
3:    $LS[x_i][\omega \setminus \{x_i\}] \leftarrow Score(x_i \mid \omega \setminus \{x_i\})$ 
4: end for
5: if  $|\omega| > 1$  then
6:   for  $x_i \in \omega$  do
7:      $getLocalScore(\omega \setminus \{x_i\}, Ct2Ct(ct, x_i))$ 
8:   end for
9: end if

```

---

次に, 得られたローカルスコアを用いて各変数  $x_i$  の考えられる  $2^{n-1}$  個全ての親ノード候補  $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{x} \setminus \{x_i\}$  を所与とした時の最適な親ノード集合  $\Pi_i^*(\mathbf{C})$  を決定する。親ノード候補  $\mathbf{C}$  を所与とした時の最適な親ノード集合  $\Pi_i^*(\mathbf{C})$  は, 親ノード候補  $\mathbf{C}$  自身または親ノード候補  $\mathbf{C}$  からノードを一つ除外したノード集合  $\{\mathbf{C} \setminus \{c\} \mid c \in \mathbf{C}\}$  の中に存在する最適な親ノード集合  $\Pi_i^*(\mathbf{C} \setminus \{c\})$  のいずれかであるため, 最適な親ノード集合  $\Pi_i^*(\mathbf{C})$  を所与としたローカルスコアは,

$$Score(x_i \mid \Pi_i^*(\mathbf{C})) = \max\{Score(x_i \mid \mathbf{C}), \max_{c \in \mathbf{C}}\{Score(x_i \mid \Pi_i^*(\mathbf{C} \setminus \{c\}))\}\} \quad (2.9)$$

となる。最適な親ノード集合を求めるアルゴリズムを Algorithm 2 に示す。ここで, bps は  $x_i$  の考えられる全ての親ノード候補の最適な親ノード集合, bss はそのローカルスコア

集合を表す。Algorithm 2 では、 $x_i$  の考えられる全ての親ノード候補が親ノードである場

---

**Algorithm 2** 最適な親ノード集合を求める ( $\text{getBestParents}(x, x_i, \text{LS})$ )

---

**Input:**  $x, x_i, \text{LS}$

**Output:**  $\text{bps}[\cdot]$

```

1:  $\text{bps} = \text{array} (\text{length} = 2^{|x|} - 1)$ 
2:  $\text{bss} = \text{array} (\text{length} = 2^{|x|} - 1)$ 
3: for all  $\text{cs} \subseteq x \setminus \{x_i\}$  in lexicographic order do
4:    $\text{bps}[\text{cs}] \leftarrow \text{cs}$ 
5:    $\text{bss}[\text{cs}] \leftarrow \text{LS}[x_i][\text{cs}]$ 
6:   for all  $\text{cs1} \subset \text{cs}$  which  $|\text{cs} \setminus \text{cs1}| = 1$  do
7:     if  $\text{bss}[\text{cs1}] > \text{bss}[\text{cs}]$  then
8:        $\text{bps}[\text{cs}] \leftarrow \text{bps}[\text{cs1}]$ 
9:      $\text{bss}[\text{cs}] \leftarrow \text{bss}[\text{cs1}]$ 
10:    end if
11:  end for
12: end for

```

---

合を初期状態として、一つ親ノードを消去した場合に学習スコアが改善された場合に消去するという動作を辞書式順序を用いて繰り返している。

次に、最適なノード順序を決定し、最適なネットワーク構造を求める。まず、ノード集合  $\omega \subseteq x$  からなる最適なサブネットワーク構造  $G^*(\omega)$  は次の二つのサブネットワークの和で表現することができる。

- リーフノード  $x_i$  とその最適な親ノード集合  $\Pi_i^*(\omega \setminus \{x_i\})$  からなるサブネットワー  
ク構造  $(x_i, \Pi_i^*(\omega \setminus \{x_i\}))$
- ノード集合  $\omega \setminus \{x_i\}$  から構成される最適なサブネットワーク構造

そのため、最適なサブネットワーク構造  $G^*(\omega)$  における最適なリーフノードは、

$$\begin{aligned} \text{Leaf}^*(\omega) &= \arg \max_{x_i \in \omega} \{\text{Skore}(\omega, x_i)\} \\ &= \arg \max_{x_i \in \omega} \{\text{Score}(x_i \mid \Pi_i^*(\omega \setminus \{x_i\})) + \text{Score}(G^*(\omega \setminus \{x_i\}))\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

と表される。これを用いて考えられる全てのノード集合について、最適なサブネットワークとリーフノードを決定するアルゴリズムを Algorithm 3 に示す。

---

**Algorithm 3** 最適なリーフノードを求める ( $\text{getBestLeaf}(x, \text{bps}, \text{LS})$ )

---

**Input:**  $x, \text{bps}, \text{LS}$

**Output:**  $\text{Leafs}[\cdot]$

```

1: for all  $\omega \in x$  in lexicographic order do
2:    $\text{score}[\omega] \leftarrow 0.0$ 
3:    $\text{Leafs}[\omega] \leftarrow -1$ 
4:   for all  $\text{leaf} \in \omega$  do
5:      $\text{upvars} \leftarrow \omega \setminus \{\text{leaf}\}$ 
6:      $\text{skore} \leftarrow \text{score}[\text{upvars}] + \text{LS}[\text{leaf}][\text{bps}[\text{leaf}][\text{leaf}]]$ 
7:     if  $\text{Leafs}[\omega] = -1$  or  $\text{skore} > \text{score}[\omega]$  then
8:        $\text{score}[\omega] \leftarrow \text{skore}$ 
9:        $\text{Leafs}[\omega] \leftarrow \text{leaf}$ 
10:    end if
11:   end for
12: end for

```

---

Algorithm 3 では、まず、ノード集合  $\omega$  からリーフノード  $x_i$  を繰り返し選択し、式 (2.10) のように和の計算を行うことで  $\text{Skore}(\omega, \cdot)$  を最大化する  $x_i$  を求める。このとき、 $\text{Score}(G^*(\omega \setminus \{x_i\}))$  を計算するためには  $\text{Leaf}(\omega \setminus \{x_i\})$  を計算する必要があるため、辞

書式順序を用いて事前に計算しておくようにしている。

$$o_i^*(V) = \text{Leafs}^*(V \setminus \bigcup_{j=i+1}^{|V|} \{o_j^*(V)\}) \quad (2.11)$$

最適なリーフノード集合が決まつたので、式 (2.11) を用いた Algorithm 4 を用いて最適なノード順序が求めることができる。

---

**Algorithm 4** 最適なノード順序を求める ( $\text{Leaf2Order}(x, \text{Leafs})$ )

---

**Input:**  $x, \text{Leafs}$

**Output:** Order

- 1: Order = array (length =  $|x|$ )
  - 2: left =  $x$
  - 3: **for**  $i = |x|$  **to** 1 **do**
  - 4:     Order[i]  $\leftarrow \text{Leafs}[\text{left}]$
  - 5:     left  $\leftarrow \text{left} \setminus \{\text{Order}[i]\}$
  - 6: **end for**
- 

最適なノード順序が決定すれば、最適なネットワーク構造は、

$$G_{o_i^*(V)}^* = g_{o_i^*(V)}^* \left( \bigcup_{j=1}^{i-1} \{o_j^*(V)\} \right) \quad (2.12)$$

となるため、ノード順序を所与としたベイジアンネットワーク構造探索のアルゴリズムは Algorithm 4 で行うことができる。

このようにして、データ  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$  ( $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) から分割表 ct を作成し、BDeu スコアのハイパーパラメータの ESS の値を決定すれば、BDeu スコアを最大化するネットワーク構造の厳密解探索をすることができる。

---

**Algorithm 5** 最適なネットワーク構造を求める ( $\text{Order2Net}(x, \text{Order}, \text{bps})$ )

---

**Input:**  $x$ , Order, bps

**Output:** parents

```
1: parents = array (length =  $|x|$ )
2: predecs  $\leftarrow \phi$ 
3: for  $i = 1$  to  $|x|$  do
4:     parents[ $i$ ]  $\leftarrow$  bps[Order[ $i$ ]][predecs]
5:     predecs  $\leftarrow$  predecs  $\cup \{\text{Order}[i]\}$ 
6: end for
```

---

## 第 3 章

# ESS 決定の従来手法

BDeu スコアを用いるベイジアンネットワークの構造学習において、ハイパーパラメータの ESS の値を設定する必要がある。本章では、ベイジアンネットワークの構造学習における BDeu スコアの ESS の値の決定の従来手法について述べる。

### 3.1 ESS の値を固定して学習

ESS の値は事前知識の重みを示す擬似データなので、ユーザーが自由に設定することができる。まず、ESS の値をユーザーが固定の値として自由に設定し、構造学習を行う場合について述べる。

Steck (2002) [4] は、ESS の値を固定して BDeu スコアを最大化する構造を探索するミュレーションを行い、ESS の値の変化に対する学習された DAG 構造のエッジ数の変化について、データ数が大きい場合であっても、学習されたベイジアンネットワークのエッジ数が、ESS の値を 0 に近づけていくと減少し、ESS の値を大きくすると増えるという性質があることを示した。

Ueno (2010) [5] は、データ数が十分に大きい場合は BDeu スコアの ESS の値は 1.0 が最適であるということを数学的に示した。しかしながら、データ数が十分に大きくない場合には、ESS の値の設定が構造学習により学習されるネットワーク構造に対して大きな影響を与えていたため、ESS の値に固定の値としてユーザーが設定するのではなく、データによって異なる最適な ESS の値をデータから決定することが必要となる。

## 3.2 ESS の値を変化させて BDeu スコアを最大化

Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) [6] は、ESS の値が BDeu スコアに対して大きな影響を与えることを示し、解決手法の一つとして ESS の値を 1 から 100 まで 1.0 ずつ変化させながら BDeu スコアを最大化する ESS を見つけるという経験ベイズ手法を提案した。アルゴリズムを Algorithm 6 に示す。

---

### Algorithm 6 BDeu スコアを最大化する ESS を求める

---

**Input:**  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$  ( $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ )

**Output:**  $\alpha$

```
1:  $\alpha = -1$ 
2:  $\max = 0$ 
3:  $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ 
4: for  $\alpha' \in A$  do
5:   if  $\alpha = -1$  or  $\text{BDeu}(D, \alpha') > \max$  then
6:      $\alpha \leftarrow \alpha'$ 
7:      $\max \leftarrow \text{BDeu}(D, \alpha')$ 
8:   end if
9: end for
```

---

この手法では、データをもとに BDeu スコアの計算を行い、BDeu スコアを最大化する ESS の値を求めるため、ユーザーが事前に ESS の値を設定する必要はない。そのため、学習の結果がユーザーの設定する ESS の値に依存するという問題は解消される。

### 3.3 周辺尤度を最大化する ESS を近似計算

Steck (2008) [7] は、周辺尤度を最大化する ESS を近似計算を用いて解析的に求める経験ベイズ手法を提案した。Steck (2008) の手法では、ESS の値と DAG 構造の更新を繰り返す。データ  $D$  に対して、最適な ESS と最適な DAG 構造を以下のように表す。

$$(\alpha^*, G^*) = \arg \max_{(\alpha, G)} p(D | \alpha, G) \quad (3.1)$$

このとき、DAG 構造と ESS の最適化を以下のように考える。

1.  $G_k^* = \arg \max_G p(D | \alpha_{k-1}^*, G)$  (修正された ESS を用いて DAG 構造を探索)
2.  $\alpha_k^* = \arg \max_\alpha p(D | \alpha, G_k^*)$  (修正された DAG 構造により ESS を最適化)

しかしながら、与えられた DAG 構造から周辺尤度の最大化によって ESS の最適化をすることは難しいため、テストエラーの最小化により ESS の最適化を行う。ESS の最適値  $\alpha^*$  の近似を得るため、二つの近似を与える。

グラフ  $G$  と最尤パラメータ推定値  $\theta$  を用いた分布  $\hat{p}(\mathbf{x} | G)$  と真の分布  $p(\mathbf{x})$  のテストエラーは、

$$T[p(\mathbf{x}), \hat{p}(\mathbf{x} | G)] = - \sum_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \log \hat{p}(\mathbf{x} | G) \quad (3.2)$$

と表せるが、トレーニングエラー  $-E_{\hat{p}(\mathbf{x})}[\log \hat{p}(\mathbf{x} | G)]$  とモデルの複雑性のペナルティ項で以下のように近似できる。Akaike (1973) [12]

$$T[p(\mathbf{x}), \hat{p}(\mathbf{x} | G)] = -E_{\hat{p}(\mathbf{x})}[\log \hat{p}(\mathbf{x} | G)] + \frac{d_G^{\text{eff}}}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right) \quad (3.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} E_{\hat{p}(\mathbf{x})}[\log \hat{p}(\mathbf{x} | G)] &= \sum_{\mathbf{x}} \hat{p}(\mathbf{x}) \log \hat{p}(\mathbf{x} | G) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{x_i} \sum_{\pi_i} \frac{N_{x_i, \pi_i}}{N} \log \frac{N_{x_i, \pi_i}}{N_{\pi_i}} \end{aligned}$$

$$d_G^{\text{eff}} = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{x_i, \pi_i} I(N_{x_i, \pi_i}) - \sum_{\pi_i} I(N_{\pi_i}) \right]$$

$$I(a) = \begin{cases} 0 & (a \leq 0) \\ 1 & (a > 0) \end{cases}$$

とする。

式 (B.2) において未知であった  $p$  を、ESS の最適値  $\alpha^*$  を用いて以下のように近似できる。

$$p_{x_i, \pi_i} \approx \tilde{p}_{x_i, \pi_i} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{x_i, \pi_i} &= \frac{N_{x_i, \pi_i} + \alpha^* \cdot q_{x_i, \pi_i}}{N + \alpha^*} \\ &= \hat{p}(x_i, \pi_i) + \frac{\alpha^*}{N} \left( q_{x_i, \pi_i} - \frac{N_{x_i, \pi_i}}{N} \right) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\alpha^*}{N} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

これを式 (B.2) に適用すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} T[p(\mathbf{x}), \hat{p}(\mathbf{x} | G)] &\approx -E_{\hat{p}(\mathbf{x})}[\log \hat{p}(\mathbf{x} | G)] \\ &\quad - \frac{\alpha^*}{N} \sum_{\mathbf{x}} \left( q_{\mathbf{x}} - \frac{N_{\mathbf{x}}}{N} \right) \log \hat{p}(\mathbf{x} | G) + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\alpha^*}{N} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

以上の近似を用いて、ESS の最適値  $\alpha^*$  は式 (B.7) のように表せる。

$$\alpha^* \approx \frac{d_G^{\text{eff}}}{E_{\hat{p}(\mathbf{x})}[\log \hat{p}(\mathbf{x} | G)] - E_{q(\mathbf{x})}[\log \hat{p}(\mathbf{x} | G)]} + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha^{*^2}}{N} \right) \quad (3.7)$$

以上のようにして、ESS の最適値  $\alpha^*$  を求め、それをもとにネットワーク構造を探索することを ESS の値が収束するまで繰り返す。この手法を用いることで Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) の経験ベイズ手法と同等の学習精度を保つ ESS を、より高速に求めることができることが示されている。

## 第 4 章

# 従来手法を用いた評価実験

本章では、ベイジアンネットワークの構造学習において、Ueno (2010) [5] において、数学的に示されているデータ数が十分に大きい場合に、BDeu スコアのハイパーパラメータの ESS の値の最適値が 1.0 であることを、実験により確認する。また、第 3 章の Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) の手法や Steck (2008) の手法を用いることにより、学習の結果がユーザーの設定する ESS の値に依存するという問題は解消されたが、これらの手法は BDeu スコアを最大化する ESS の値が予測精度を最大化する ESS の値であるという仮定のもとに用いられている。そのため、第 3 章の各手法を用いた ESS の値の決定、及びその ESS の値を用いた構造学習の評価実験の結果を分析する。

### 4.1 実験 1 の手順

まず、いくつかのベイジアンネットワークに対して、ESS の値の最適値を求め、Ueno (2010) により数学的に示されていたデータ数が十分に大きい場合に BDeu の ESS の値は 1.0 が最適であるということを実験により確認する。今回の実験に用いたネットワークを図 4.1～4.9 に示す。実験 1 の手順は以下の通りである。

1. 図 4.1～4.9 のネットワークから  $100, 200, \dots, 1000, 2000, \dots, 10000, 20000, 50000, 100000, 200000$  個のサンプルを生成する。
2. ESS の値を  $\{0.1, 0.5, 1, 2, \dots, 20\}$  のそれぞれとして、手順 1 で生成されたサンプルから構造学習を行う。

3. 手順 1, 2 を 100 回繰り返し行う.

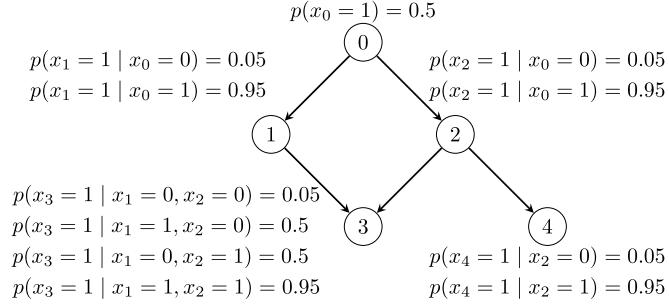


図 4.1: ネットワーク Strongly skewed distribution

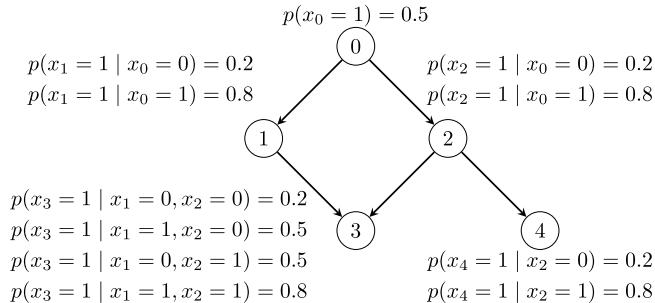


図 4.2: ネットワーク Skewed distribution

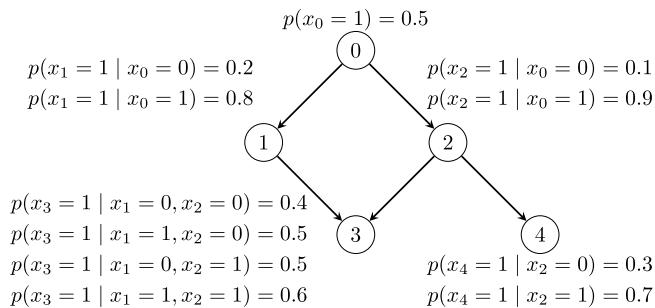


図 4.3: ネットワーク Combined skewed and uniform distribution

ESS の値による学習精度の変化を測るために、各 ESS の値で 100 回の試行で学習されたネットワーク構造と真のネットワーク構造との SHD の平均値と 100 回の試行のうち真のネットワーク構造を学習した回数 (SHD の値が 0 となった回数) を計算した。ここで、

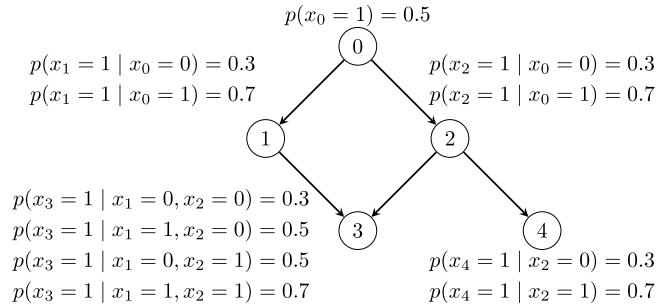


図 4.4: ネットワーク Uniform distribution

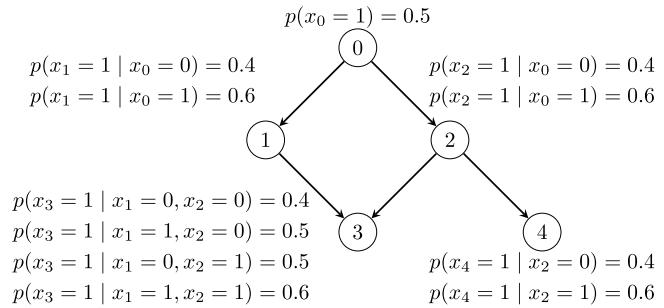


図 4.5: ネットワーク Strongly uniform distribution

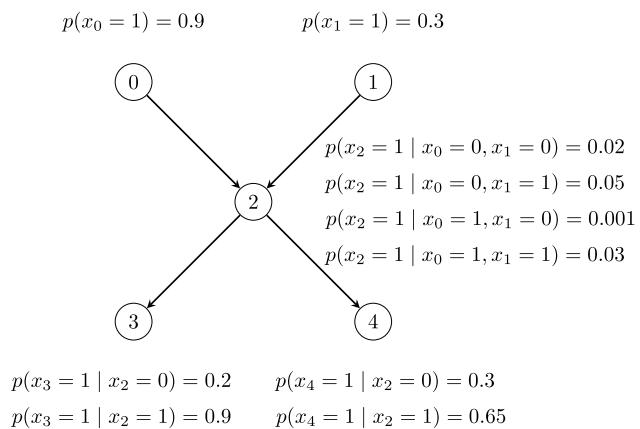


図 4.6: ネットワーク cancer

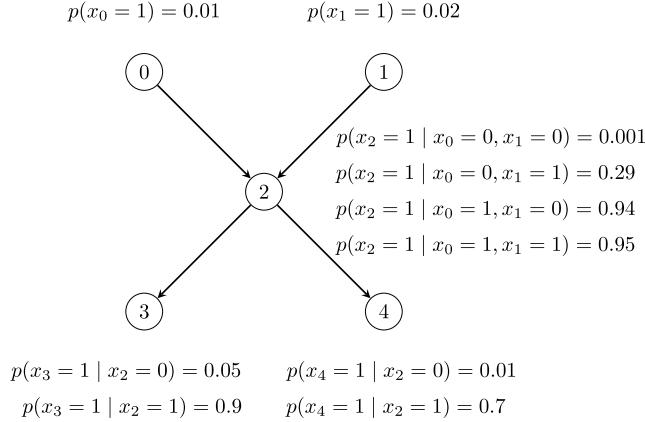


図 4.7: ネットワーク earthquake

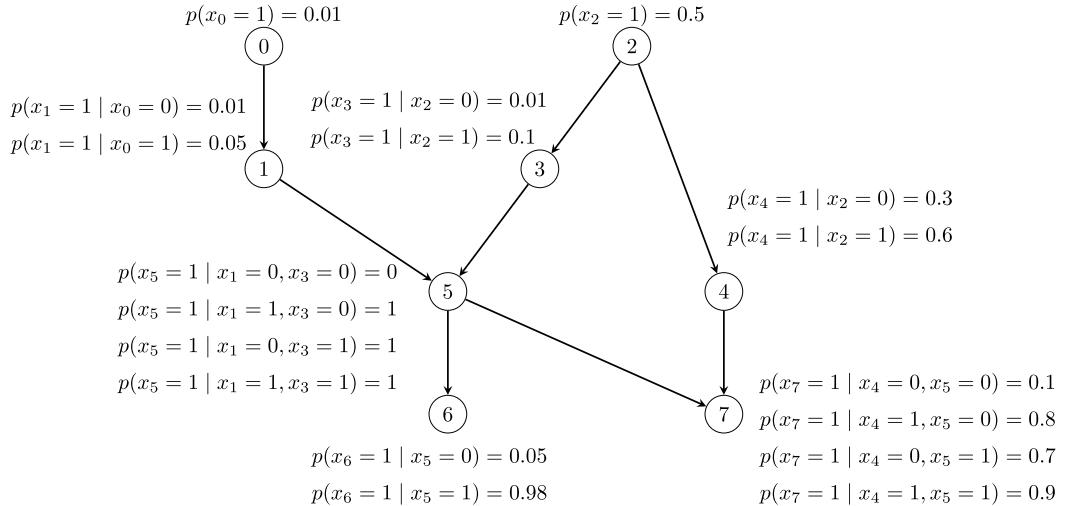


図 4.8: ネットワーク asia

Structural Hamming Distance (SHD) とは Tsamardinos, Brown and Aliferis (2006) [13] で述べられている二つのネットワーク構造の辺の有無や向きの誤りの個数を表す値である。ただし、データ数が少ない場合に SHD の平均値を最小にする ESS の値は、真のネットワーク構造の変数数とエッジ数に依存してしまう可能性があるため、真の漸近一致性を確認できるよう真のネットワーク構造を学習した回数についても調べることにした。

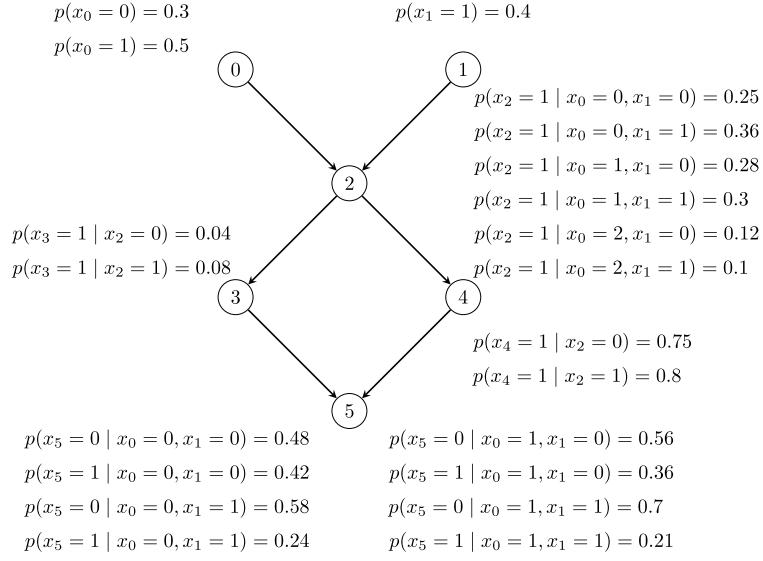


図 4.9: ネットワーク survey

## 4.2 実験 1 の結果と考察

結果として、学習されたネットワーク構造と真のネットワーク構造との SHD の平均値と 100 回の試行のうち真のネットワーク構造を学習した回数（SHD の値が 0 となった回数）を表 4.1～4.9 に示す。各表はネットワーク構造毎に縦軸にデータ数、横軸に ESS の値を表す。各ネットワーク構造、データ数において SHD の値を最も小さくしている部分が青色で示されている。

各ネットワークにおいて、データ数が少ない場合の最適な ESS の値は、確率構造が一様に近いネットワークでは、大きい値となることがわかる。これは、確率構造が一様に近いネットワークでは少ないデータからの学習で DAG 構造にエッジがつきにくいため、Steck (2002) [4] に示されているように、DAG 構造のエッジ数が増加する傾向のある大きい ESS の値が真のネットワーク構造を学習するには良い値となつたためであると考えることができる。

一方で、確率構造の歪度の絶対値が大きいネットワークでは、データ数の少ない場合の

ESS の最適値は小さい値となることがわかる。これは、確率構造の歪度の絶対値が大きいネットワークでは、データ数の少ない場合であっても DAG 構造にエッジがつきやすくなるため、DAG 構造のエッジ数が増加し過ぎない傾向のある小さい ESS の値が真のネットワーク構造を学習するには良い値となったためであると考えることができる。

また、データ数が少ないと場合には、DAG 構造のエッジが増えにくいため、DAG 構造のエッジ数が増加する傾向のある大きい ESS の値が真の構造に近い DAG 構造を学習できていることが確認できた。

Ueno (2010) に数学的に示されているように、データ数が十分に大きい場合に BDeu の ESS の値は 1.0 が最適であるということを実証的に確認したかったが、ESS の値の最適値が 1.0 に漸近的に収束することは本実験の結果からは読み取れなかった。しかしながら、ESS を 1.0 にした場合の SHD はデータ数が大きい場合に小さい値となっていることは確認できた。

N	ESS $\alpha$																						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
100	3.78	3.42	3.32	3.07	2.80	2.65	2.63	2.56	2.52	2.48	2.46	2.49	2.54	2.52	2.55	2.54	2.61	2.59	2.59	2.67	2.68	2.75	
200	2.92	2.17	1.78	1.45	1.13	1.07	1.07	1.06	1.06	1.09	1.09	1.12	1.13	1.13	1.21	1.30	1.31	1.34	1.40	1.42	1.46	1.61	
300	1.85	0.98	0.75	0.57	0.50	0.41	0.44	0.45	0.48	0.48	0.49	0.55	0.55	0.55	0.78	0.78	0.80	0.83	0.83	0.93	0.98	1.03	
400	0.67	0.42	0.37	0.37	0.35	0.33	0.36	0.39	0.39	0.39	0.43	0.45	0.46	0.46	0.48	0.48	0.48	0.56	0.61	0.65	0.69	0.69	
500	0.34	0.20	0.15	0.13	0.16	0.14	0.15	0.15	0.13	0.14	0.16	0.22	0.25	0.28	0.27	0.31	0.35	0.38	0.39	0.42	0.47	0.47	
600	0.29	0.25	0.21	0.20	0.21	0.22	0.23	0.23	0.22	0.28	0.33	0.41	0.43	0.47	0.47	0.53	0.52	0.55	0.63	0.66	0.66	0.67	
S	700	0.30	0.33	0.34	0.26	0.26	0.29	0.27	0.29	0.27	0.25	0.25	0.26	0.32	0.33	0.34	0.33	0.37	0.38	0.39	0.43	0.46	0.46
H	800	0.20	0.20	0.19	0.23	0.25	0.27	0.29	0.29	0.35	0.35	0.37	0.40	0.38	0.40	0.36	0.39	0.39	0.38	0.39	0.39	0.39	0.39
D	900	0.35	0.30	0.33	0.33	0.32	0.33	0.32	0.35	0.35	0.36	0.37	0.40	0.38	0.38	0.36	0.39	0.43	0.41	0.43	0.44	0.44	0.46
の	1000	0.31	0.30	0.28	0.28	0.24	0.21	0.18	0.19	0.19	0.19	0.20	0.25	0.27	0.29	0.29	0.32	0.34	0.37	0.41	0.41	0.44	0.45
均	6000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.03	0.03
値	7000	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.04	0.09	0.11	0.14	0.17	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
平	30000	0.00	0.02	0.04	0.08	0.11	0.13	0.15	0.15	0.15	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.14	0.11	0.12	0.12	0.15	0.15
均	40000	0.00	0.00	0.06	0.11	0.11	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.10	0.11	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
50000	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
60000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.03	0.03
70000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
80000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
90000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.06	0.06	0.06	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
100000	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
200000	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
500000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
1000000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2000000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

N	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	2	4	8	11	19	22	24	26	28	27	27	26	23	23	22	22	22	20	18	17	16	15
200	13	38	45	54	59	60	61	61	59	58	56	56	52	51	48	47	46	45	42	40	36	33
300	50	75	76	79	80	80	78	77	76	75	73	72	69	67	66	64	64	63	61	57	54	51
400	83	87	89	91	91	93	93	92	91	89	89	87	85	83	82	81	78	78	77	76	74	74
500	80	83	86	86	86	87	89	89	89	89	86	86	85	86	84	82	82	81	79	77	76	76
600	83	84	84	84	83	83	84	87	88	88	85	86	86	86	86	85	85	83	81	79	78	78
700	84	84	86	88	90	88	89	87	90	90	89	89	86	84	84	82	83	82	81	79	78	78
800	86	87	89	90	91	91	90	92	92	94	94	93	90	89	88	86	85	85	86	85	84	84
900	83	82	85	86	88	89	90	91	92	92	94	94	93	90	89	88	86	85	85	86	85	84
1000	87	86	86	88	88	88	88	87	88	89	90	89	88	90	90	90	90	90	90	91	91	91
2000	100	99	99	97	96	96	93	94	94	94	94	92	92	92	91	91	90	90	90	90	90	90
3000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98
4000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99
9000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
10000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
20000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
50000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
200000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

表 4.1: 実験 1 の結果 (ネットワーク Strongly skewed distribution)

表 4.2: 実験 1 の結果 (ネットワーク Skewed distribution)

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	2.38	2.45	2.51	2.59	2.57	2.61	2.57	2.58	2.60	2.61	2.61	2.63	2.65	2.66	2.64	2.68	2.62	2.61	2.63	2.60	
200	2.06	2.07	2.11	2.03	1.87	1.81	1.72	1.65	1.69	1.71	1.66	1.65	1.61	1.61	1.64	1.66	1.69	1.67	1.49	1.51	1.51
300	1.76	1.34	1.07	0.91	0.79	0.74	0.74	0.74	0.74	0.81	0.77	0.72	0.72	0.73	0.71	0.71	0.67	0.67	0.65	0.65	0.65
400	0.93	0.66	0.56	0.46	0.44	0.43	0.43	0.41	0.41	0.41	0.43	0.43	0.48	0.48	0.50	0.50	0.48	0.48	0.48	0.47	0.47
500	0.53	0.22	0.14	0.12	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.25	0.25	0.30	0.30	0.30	0.27	0.27
600	0.12	0.08	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
S	700	0.06	0.06	0.06	0.08	0.08	0.08	0.11	0.11	0.14	0.14	0.16	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.20	0.20	0.20	0.20
H	800	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.08
D	900	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
の	1000	0.03	0.03	0.05	0.05	0.07	0.07	0.09	0.09	0.12	0.12	0.13	0.13	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.18	0.18
平	2000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.03	0.05
均	3000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.04	0.04	0.04	0.04
値	4000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01
5000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	
6000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
7000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
8000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
9000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.02	0.02	0.02	
10000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
20000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	
50000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
200000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	0	0	1	1	3	4	4	5	6	6	6	6	8	9	9	9	10	10	11	11	11
200	4	11	15	27	38	44	48	53	56	56	57	57	59	59	58	58	58	58	58	58	58
300	17	44	57	67	70	72	72	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	72
400	52	80	84	85	85	88	88	88	87	87	87	87	88	88	88	87	87	87	87	87	87
500	79	94	94	94	94	94	94	94	94	94	93	93	93	93	92	92	92	92	91	91	91
600	93	94	94	94	93	93	92	91	91	90	89	89	89	88	88	87	87	86	85	85	
700	96	97	97	96	96	96	96	95	95	95	94	93	93	93	92	92	91	91	91	91	
800	100	100	100	100	100	100	100	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	
900	100	100	100	100	100	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	
1000	99	99	99	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	97	97	94	94	94	94	
2000	100	100	100	100	100	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	
3000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
4000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
5000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
6000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
7000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
8000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
9000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
10000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
20000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
50000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
200000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

表4.3: 実験1の結果（ネットワーク Combined skewed and uniform distribution）

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	2.62	2.52	2.50	2.60	2.63	2.72	2.74	2.75	2.79	2.84	2.88	2.91	2.93	2.96	2.96	2.96	2.96	2.96	2.96	2.98	2.99
200	2.09	2.11	2.20	2.26	2.27	2.28	2.36	2.37	2.38	2.41	2.42	2.46	2.56	2.59	2.62	2.62	2.61	2.61	2.61	2.61	2.61
300	2.05	2.15	2.20	2.22	2.27	2.31	2.32	2.32	2.33	2.34	2.37	2.40	2.41	2.40	2.40	2.42	2.44	2.44	2.44	2.44	2.43
400	2.09	2.15	2.16	2.20	2.22	2.23	2.24	2.25	2.28	2.32	2.36	2.36	2.41	2.41	2.41	2.43	2.44	2.44	2.44	2.44	2.48
500	2.08	2.11	2.17	2.18	2.19	2.18	2.19	2.20	2.21	2.19	2.22	2.21	2.20	2.20	2.19	2.20	2.25	2.25	2.25	2.25	2.29
S	2.11	2.14	2.16	2.17	2.17	2.18	2.19	2.24	2.24	2.24	2.24	2.24	2.27	2.27	2.27	2.25	2.26	2.26	2.27	2.27	2.27
H	2.12	2.14	2.14	2.17	2.17	2.18	2.18	2.20	2.23	2.23	2.26	2.26	2.27	2.27	2.30	2.33	2.34	2.32	2.32	2.32	2.32
D	2.20	2.21	2.21	2.25	2.27	2.27	2.28	2.20	2.21	2.21	2.21	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.22	2.19	2.18
の	2.17	2.18	2.18	2.17	2.15	2.15	2.17	2.18	2.16	2.14	2.14	2.13	2.14	2.15	2.15	2.16	2.16	2.16	2.14	2.14	2.11
の	2.00	2.12	2.12	2.07	2.07	2.01	1.99	1.98	1.91	1.88	1.90	1.82	1.82	1.80	1.78	1.76	1.69	1.59	1.62	1.62	1.60
平	2.11	1.97	1.80	1.62	1.48	1.34	1.23	1.18	1.08	0.99	0.99	0.97	0.93	0.93	0.90	0.90	0.88	0.88	0.88	0.88	0.88
均	1.84	1.41	1.19	1.03	0.87	0.78	0.74	0.72	0.67	0.67	0.65	0.63	0.64	0.61	0.61	0.59	0.59	0.59	0.59	0.59	0.62
均	5.00	0.95	0.67	0.56	0.50	0.51	0.47	0.45	0.45	0.45	0.39	0.39	0.39	0.39	0.37	0.35	0.35	0.33	0.33	0.33	0.36
6000	0.77	0.46	0.42	0.34	0.34	0.34	0.33	0.33	0.28	0.28	0.28	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
7000	0.32	0.11	0.11	0.11	0.08	0.08	0.08	0.08	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
8000	0.49	0.39	0.39	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.36	0.35	0.32
9000	0.08	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
10000	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
20000	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
50000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

N	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
300	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
500	0	0	0	0	0	1	1	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
600	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	2	
700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
800	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2000	0	2	3	7	9	15	19	20	21	22	24	24	24	27	30	31	32	33	33	35	35	
3000	1	4	16	30	34	44	48	51	54	54	54	54	55	56	56	57	57	57	57	57	57	57
4000	9	37	52	63	73	79	80	81	82	82	83	85	85	86	86	86	86	86	86	86	87	87
5000	42	65	71	75	77	79	81	83	84	84	85	85	86	86	86	86	86	86	86	86	87	87
6000	60	84	90	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	93	93	93	93	93	93	93	93	
7000	88	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	92	92	92	92	92	92	92	
8000	87	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	
9000	95	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	97	97	97	97	97	97	97	97	
10000	94	94	94	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	
20000	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	
50000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	
200000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	

表4.4: 実験1の結果(ネットワーク Uniform distribution)

N	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	3.06	2.60	2.55	2.62	2.73	2.78	2.84	2.86	2.87	2.88	2.94	2.96	2.99	3.01	3.05	3.07	3.10	3.11	3.13	3.15	3.15	
200	2.12	2.13	2.15	2.27	2.38	2.41	2.51	2.56	2.64	2.69	2.71	2.71	2.75	2.73	2.74	2.80	2.83	2.83	2.82	2.80	1.97	
300	2.08	2.12	2.13	2.15	2.22	2.23	2.18	2.17	2.14	2.09	2.06	2.06	2.06	2.04	2.04	1.96	1.96	1.96	1.99	2.00	1.96	
400	2.01	2.03	2.07	2.05	2.03	1.97	1.91	1.89	1.84	1.84	1.76	1.70	1.72	1.69	1.68	1.66	1.67	1.72	1.75	1.76	1.78	1.74
500	2.04	1.87	1.94	1.85	1.75	1.68	1.67	1.65	1.63	1.58	1.65	1.66	1.62	1.66	1.71	1.73	1.74	1.74	1.74	1.75	1.75	1.75
S	600	1.99	1.96	1.89	1.73	1.67	1.60	1.62	1.57	1.51	1.47	1.47	1.45	1.45	1.43	1.41	1.39	1.39	1.37	1.37	1.37	1.37
H	700	1.83	1.65	1.63	1.39	1.34	1.28	1.24	1.25	1.21	1.21	1.21	1.20	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.22	1.28	1.28	1.28
D	800	1.62	1.19	1.09	0.99	0.93	0.89	0.89	0.91	0.91	0.91	0.91	0.92	0.92	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93	0.93
D	900	1.45	1.12	1.02	0.89	0.87	0.84	0.84	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.82	0.82	0.86	0.87	0.87	0.87
の	1000	1.04	0.89	0.71	0.67	0.69	0.69	0.69	0.73	0.75	0.75	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.78	0.78	0.78	0.78	0.78	0.74
平	2000	0.17	0.15	0.15	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.19	0.19	0.19	0.19
均	3000	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
値	4000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
5000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	
6000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
7000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
8000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
9000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	
10000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
20000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
50000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
200000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4
200	0	0	0	1	1	1	2	5	7	7	8	8	8	8	8	8	8	10	11	11	12
300	0	2	2	4	7	9	12	16	17	18	19	21	21	22	23	25	26	27	27	27	27
400	1	6	11	16	24	28	32	36	36	35	37	38	39	39	39	39	39	39	40	40	42
500	3	12	18	23	27	31	33	36	37	40	40	40	40	40	40	40	40	40	41	41	41
600	11	16	24	35	40	43	46	47	47	49	50	50	51	51	51	51	51	52	52	52	52
700	9	32	39	48	52	53	55	56	57	58	58	58	59	59	61	60	60	60	59	59	59
800	28	53	58	65	67	68	68	69	69	71	72	72	72	72	72	72	72	72	71	71	71
900	46	72	79	80	80	81	80	80	82	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	83
1000	56	74	76	77	77	77	77	77	77	77	77	77	77	76	76	76	76	77	77	77	75
2000	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	92	92	92
3000	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99
4000	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98
5000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
10000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
20000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
50000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
200000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

表4.5: 実験1の結果(ネットワーク Strongly uniform distribution)

$N$	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	4.79	4.60	4.49	4.34	4.26	4.19	4.14	4.09	4.06	4.03	3.99	3.90	3.87	3.84	3.81	3.78	3.75	3.72	3.69	3.66	3.63	3.60
200	4.48	4.03	3.81	3.48	3.40	3.35	3.28	3.28	3.28	3.28	3.18	3.18	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.15	3.13	3.17
300	3.66	3.19	2.93	2.72	2.60	2.51	2.47	2.45	2.44	2.49	2.49	2.49	2.52	2.51	2.51	2.51	2.51	2.52	2.52	2.52	2.52	2.62
400	3.13	2.69	2.57	2.45	2.38	2.37	2.34	2.33	2.33	2.36	2.34	2.34	2.31	2.26	2.27	2.26	2.28	2.28	2.31	2.32	2.33	2.37
500	2.74	2.44	2.29	2.21	2.15	2.15	2.17	2.19	2.19	2.17	2.17	2.17	2.19	2.21	2.21	2.21	2.22	2.25	2.29	2.31	2.31	2.41
600	2.50	2.25	2.10	2.12	2.14	2.17	2.18	2.18	2.19	2.18	2.18	2.18	2.20	2.21	2.21	2.21	2.22	2.20	2.23	2.27	2.30	2.31
S	700	2.24	2.11	2.12	2.13	2.17	2.20	2.23	2.23	2.19	2.15	2.16	2.18	2.21	2.21	2.21	2.22	2.22	2.22	2.23	2.31	2.31
H	800	2.08	2.06	2.08	2.08	2.12	2.13	2.16	2.21	2.23	2.23	2.22	2.22	2.22	2.20	2.19	2.17	2.17	2.16	2.14	2.17	2.18
D	900	2.10	2.03	2.02	2.04	2.09	2.11	2.12	2.16	2.23	2.21	2.23	2.27	2.33	2.35	2.38	2.40	2.44	2.45	2.41	2.50	2.50
の	1000	2.05	2.10	2.12	2.12	2.16	2.17	2.13	2.16	2.22	2.23	2.25	2.25	2.22	2.24	2.28	2.28	2.26	2.24	2.23	2.23	2.23
均	2000	2.03	2.24	2.26	2.31	2.41	2.35	2.42	2.45	2.50	2.52	2.50	2.50	2.51	2.53	2.53	2.58	2.59	2.61	2.59	2.61	2.61
値	3000	1.92	2.03	2.13	2.14	2.19	2.21	2.17	2.17	2.13	2.15	2.15	2.09	2.10	2.10	2.10	2.10	2.06	2.06	2.08	2.09	2.09
均	4000	1.70	1.59	1.63	1.53	1.53	1.53	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.55	1.51	1.47	1.47	1.47	1.47
均	5000	1.71	1.66	1.64	1.64	1.62	1.62	1.62	1.62	1.62	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63	1.63
均	6000	1.39	1.41	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.43	1.39	1.39	1.39	1.35	1.35
均	7000	1.07	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	1.11	1.11	1.11	1.11
均	8000	1.51	1.51	1.51	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54
均	9000	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.19	1.21	1.21	1.21	1.21	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23	1.23
均	10000	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18	1.18
均	20000	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	0.47
均	50000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
均	100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
均	200000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

$N$	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	6	6
700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	4	5	5
800	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	3	4	4	4	3	3	4	5	6	8	9	10
1000	0	0	0	0	0	0	1	3	3	4	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8
1000	2	5	10	15	17	20	22	24	25	25	26	28	28	28	28	27	27	27	28	28	28	28
3000	8	22	23	26	29	31	32	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	34	34	34	34
4000	19	30	32	39	40	40	40	40	41	41	41	41	41	41	41	41	41	42	42	42	42	42
5000	60	67	68	68	68	68	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67
6000	53	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	56	56	56	55	55
7000	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	63	63
8000	72	72	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71
9000	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	61	61
10000	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
20000	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87
50000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
200000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

真の構造を学習した回数

表4.6: 実験1の結果(ネットワーク asia)

N	ESS $\alpha$																							
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
100	8.68	8.17	7.49	7.54	7.03	7.00	7.36	7.82	8.18	8.52	8.61	8.78	8.90	9.07	9.37	9.67	10.06	10.30	10.71	10.96	11.48	11.63		
200	6.70	6.22	6.04	5.83	5.61	5.72	5.72	6.18	6.40	6.61	6.69	6.65	6.72	6.75	6.89	7.08	7.21	7.52	7.78	8.13	8.27	8.68		
300	5.67	5.13	4.88	4.73	4.59	4.71	4.70	4.80	5.01	5.15	5.22	5.21	5.20	5.10	5.22	5.41	5.42	5.53	5.72	6.02	6.18	6.30	6.49	6.88
400	4.98	4.64	4.38	4.52	4.39	4.40	4.45	4.69	4.92	4.98	5.12	5.16	5.20	5.21	5.29	5.48	5.72	5.92	6.02	6.18	6.30	6.49	6.88	
500	4.41	4.14	4.02	3.52	3.42	3.58	3.58	3.65	3.81	3.97	4.10	4.21	4.31	4.39	4.46	4.59	4.63	4.74	4.92	5.00	5.17	5.24		
S	600	3.56	3.11	2.99	2.90	2.97	3.10	3.13	3.35	3.52	3.69	3.82	3.95	4.12	4.20	4.27	4.25	4.38	4.50	4.65	4.72	4.74		
H	700	3.32	2.85	2.83	2.72	2.78	2.83	2.89	2.92	3.09	3.31	3.42	3.47	3.57	3.68	3.71	3.91	4.04	4.17	4.27	4.44	4.47		
D	800	2.83	2.72	2.63	2.47	2.29	2.30	2.28	2.36	2.45	2.59	2.81	3.07	3.20	3.35	3.34	3.50	3.58	3.70	3.76	3.80	4.01	4.04	
D	900	3.06	2.93	2.62	2.64	2.68	2.69	2.76	2.99	3.17	3.32	3.38	3.41	3.53	3.68	3.77	3.84	3.92	3.95	4.04	4.11	4.25		
の	1000	2.45	2.37	2.36	2.27	2.19	2.24	2.17	2.28	2.39	2.46	2.55	2.57	2.77	2.91	3.01	3.11	3.18	3.31	3.42	3.57	3.78	3.85	
の	2000	2.07	2.05	1.93	1.81	1.72	1.74	1.86	1.90	1.87	1.91	1.92	1.93	1.90	1.91	1.93	1.97	2.06	2.26	2.37	2.45	2.46		
平	3000	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93	1.93		
均	4000	1.53	1.38	1.29	1.38	1.44	1.44	1.58	1.72	1.70	1.61	1.56	1.60	1.38	1.38	1.43	1.45	1.53	1.62	1.73	1.91	2.00	2.10	
均	5000	1.25	1.16	1.11	1.05	1.04	1.02	1.07	1.02	1.07	1.11	1.24	1.27	1.42	1.48	1.49	1.62	1.67	1.70	1.82	1.87	2.00		
値	6000	1.21	1.22	1.16	1.12	1.18	1.17	1.15	1.16	1.14	1.15	1.14	1.19	1.22	1.27	1.24	1.25	1.41	1.45	1.62	1.69	1.59		
7000	1.40	1.29	1.24	1.34	1.31	1.33	1.41	1.42	1.35	1.34	1.30	1.27	1.27	1.27	1.27	1.30	1.35	1.40	1.42	1.54	1.55			
8000	1.18	1.16	1.13	1.05	1.17	1.17	1.11	1.11	1.08	1.05	1.08	1.16	1.12	1.25	1.19	1.15	1.23	1.32	1.31	1.41	1.44			
9000	0.98	0.92	0.94	0.97	0.95	0.87	0.94	0.87	0.85	0.93	0.88	0.92	0.91	0.89	0.89	0.90	1.00	1.01	1.05	0.99	1.03			
10000	0.75	0.65	0.64	0.60	0.61	0.57	0.57	0.49	0.52	0.54	0.56	0.52	0.50	0.58	0.61	0.72	0.87	0.90	0.99	1.07	1.12			
20000	0.39	0.25	0.22	0.15	0.19	0.23	0.22	0.23	0.23	0.25	0.25	0.25	0.26	0.35	0.35	0.36	0.37	0.41	0.43	0.49	0.61			
50000	0.03	0.03	0.02	0.10	0.14	0.14	0.18	0.27	0.31	0.35	0.35	0.35	0.36	0.37	0.38	0.42	0.42	0.43	0.46	0.52				
100000	0.00	0.04	0.04	0.04	0.05	0.08	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.26			
200000	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.08	0.08	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.16	0.16	0.16		

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600	0	1	2	4	6	6	7	7	8	8	6	5	4	4	4	4	3	2	2	1	1
700	0	0	1	2	1	2	3	4	5	5	5	5	4	4	4	4	4	2	0	0	0
800	0	0	1	2	7	10	11	11	11	11	8	5	4	2	2	2	1	1	1	0	0
900	0	0	2	3	7	10	10	9	9	9	10	10	10	8	7	3	3	3	1	1	0
1000	0	0	1	5	8	9	12	12	14	16	16	12	9	6	3	3	2	2	2	1	0
1000	1	2	4	11	11	10	11	12	14	13	16	15	14	15	16	16	16	15	13	12	8
2000	4	6	11	13	16	19	20	24	27	27	28	29	31	29	30	28	25	23	20	15	11
4000	6	12	16	23	25	25	27	28	31	33	32	34	34	35	36	35	32	29	27	22	16
5000	11	18	22	27	30	33	34	35	40	42	43	46	48	48	51	48	44	39	36	34	32
6000	10	15	21	24	25	28	35	37	40	42	43	43	42	43	43	40	41	39	41	34	27
7000	14	27	31	35	39	42	44	45	48	46	45	47	48	48	48	47	45	44	41	35	30
8000	16	23	31	42	47	48	47	48	48	50	50	51	53	52	52	52	48	44	40	35	
9000	20	31	39	41	44	46	45	50	52	52	50	49	52	54	53	51	47	46	40	37	
10000	20	32	34	44	46	51	52	54	54	53	56	59	60	61	61	59	58	54	49	44	
20000	62	75	78	85	85	86	85	85	84	84	84	83	83	82	82	82	80	74	67		
50000	97	97	98	96	95	95	94	91	89	88	88	87	86	85	84	84	83	81	77		
100000	100	99	99	99	98	97	95	95	95	94	94	94	94	94	94	94	94	94	92	92	
200000	100	100	100	100	99	99	98	98	97	97	95	95	95	95	95	95	95	94	94	92	

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	3.81	3.84	3.93	4.10	4.15	4.16	4.19	4.23	4.23	4.27	4.33	4.41	4.42	4.42	4.45	4.46	4.48	4.48	4.48	4.50	4.54
200	3.94	3.98	4.03	4.01	4.04	4.06	4.06	4.06	4.10	4.11	4.12	4.26	4.26	4.27	4.28	4.29	4.30	4.32	4.34	4.34	4.35
300	3.94	3.81	3.78	3.74	3.67	3.63	3.74	3.82	3.89	3.91	3.90	4.01	4.04	4.04	4.11	4.12	4.13	4.14	4.14	4.27	4.28
400	3.70	3.58	3.40	3.37	3.52	3.59	3.58	3.61	3.66	3.81	3.89	3.91	3.90	3.95	4.08	4.10	4.11	4.14	4.14	4.24	4.26
500	3.77	3.73	3.69	3.65	3.69	3.71	3.73	3.81	3.83	3.87	3.91	3.90	3.95	4.08	4.10	4.11	4.14	4.15	4.21	4.21	4.21
S	600	3.69	3.46	3.38	3.39	3.34	3.29	3.35	3.40	3.46	3.65	3.67	3.70	3.82	3.84	3.88	3.91	3.95	3.96	4.04	4.08
H	700	3.58	3.35	3.22	3.14	3.10	3.08	3.20	3.34	3.46	3.57	3.64	3.64	3.80	3.88	3.89	3.93	4.01	4.08	4.09	4.17
D	800	3.56	3.31	3.15	3.09	3.06	3.02	3.13	3.17	3.22	3.26	3.24	3.24	3.27	3.36	3.48	3.61	3.78	3.83	4.00	4.10
平均	900	3.60	3.39	3.15	3.02	2.98	3.00	3.01	3.08	3.11	3.19	3.23	3.27	3.33	3.45	3.56	3.65	3.69	3.68	3.72	3.82
の	1000	3.57	3.32	3.07	2.90	2.86	2.84	2.83	2.94	2.98	3.00	3.04	3.10	3.17	3.21	3.27	3.31	3.33	3.36	3.51	3.62
の	2000	3.51	3.17	3.02	2.83	2.72	2.64	2.64	2.67	2.68	2.66	2.76	2.76	2.81	2.88	2.94	2.95	3.07	3.27	3.31	3.31
平	3000	3.07	2.47	2.11	1.76	1.72	1.63	1.65	1.62	1.55	1.55	1.64	1.57	1.58	1.64	1.68	1.75	1.75	1.85	2.00	2.18
均	4000	3.43	2.78	2.44	1.94	1.76	1.68	1.66	1.53	1.38	1.38	1.34	1.34	1.41	1.41	1.42	1.43	1.49	1.59	1.64	1.85
均	5000	2.74	1.97	1.62	1.40	1.32	1.28	1.16	1.15	1.12	1.08	1.09	1.05	1.07	1.11	1.16	1.21	1.25	1.31	1.36	1.41
値	6000	1.92	1.45	1.11	0.83	0.74	0.67	0.61	0.61	0.61	0.50	0.50	0.50	0.50	0.52	0.52	0.57	0.62	0.62	0.70	0.75
7000	2.09	1.35	0.99	0.70	0.53	0.43	0.35	0.35	0.35	0.31	0.36	0.36	0.36	0.41	0.41	0.42	0.42	0.47	0.57	0.66	
8000	1.40	0.96	0.70	0.53	0.53	0.49	0.54	0.54	0.54	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.46	0.51	0.51	0.55	0.66	0.66	
9000	1.38	0.70	0.54	0.48	0.48	0.41	0.42	0.38	0.37	0.36	0.36	0.36	0.37	0.37	0.42	0.48	0.48	0.57	0.66	0.71	
10000	0.70	0.32	0.22	0.20	0.21	0.23	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.12	0.12	0.16	0.16	0.16	0.25	0.30	0.35	0.35	
20000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.10	0.10	0.10	0.15	0.20	0.30	0.30	0.30	0.40	0.40	0.40	0.45	0.45	0.45	
50000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.10	0.10	0.15	0.30	0.30	0.30	
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
200000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
300	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
400	0	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
500	0	2	9	9	10	10	8	10	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	5	5	4
600	0	2	2	3	4	4	3	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	1	1	0
700	0	1	5	7	7	7	7	9	9	9	8	8	8	8	6	6	6	4	4	3	2
800	2	4	9	8	7	8	9	9	9	9	8	7	6	7	6	6	5	5	4	4	3
900	0	2	3	4	6	7	9	9	9	8	8	8	8	8	6	6	5	5	4	3	2
1000	3	8	9	12	13	16	17	14	13	13	13	13	13	12	12	11	10	10	8	7	6
2000	7	12	15	24	25	27	33	34	35	35	37	36	34	34	31	30	29	26	25	24	20
3000	12	23	31	35	39	46	51	54	53	53	52	53	52	53	51	51	51	46	45	44	44
4000	19	35	40	52	53	54	55	55	56	56	56	55	54	54	53	53	52	50	48	47	47
5000	26	40	51	58	64	65	67	69	69	70	70	72	71	72	72	70	70	66	64	63	63
6000	40	58	67	72	77	79	79	78	79	79	82	83	84	83	82	81	80	80	76	75	73
7000	51	69	74	83	88	90	90	89	89	89	89	89	89	89	88	87	85	84	83	82	82
8000	53	71	78	84	85	87	91	90	90	91	92	91	90	90	90	90	90	89	89	89	89
9000	69	87	90	91	93	94	95	95	95	95	95	95	95	95	94	94	94	93	92	92	92
10000	76	91	90	92	95	94	95	95	95	96	96	96	95	95	95	94	94	93	92	92	92
20000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
50000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
200000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

真の構造を学習した回数

表4.7: 実験1の結果（ネットワーク cancer）

N	ESS $\alpha$																						
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
100	4.33	4.21	4.27	4.44	4.72	5.20	5.57	5.99	6.32	6.68	6.94	7.23	7.32	7.50	7.55	7.67	8.02	8.04	8.19	8.26	8.36	8.40	
200	3.36	3.00	2.63	2.65	2.94	3.06	3.20	3.49	3.87	4.37	4.88	5.25	5.54	5.83	6.05	6.28	6.43	6.69	6.81	7.00	7.20	7.36	
300	3.45	3.12	2.74	2.75	2.88	2.73	2.86	3.04	3.33	3.60	4.05	4.36	4.68	4.91	5.30	5.52	5.69	5.90	6.11	6.46	6.78	6.86	
400	2.90	2.36	1.93	1.96	2.10	1.90	1.97	2.10	2.54	2.59	2.66	2.93	3.36	3.77	4.04	4.38	4.84	5.15	5.45	5.82	5.93		
500	2.41	1.76	1.32	1.25	1.33	1.38	1.45	1.54	1.57	1.76	1.82	2.07	2.33	2.81	3.27	3.51	3.77	4.06	4.46	4.90	5.41	5.70	
S	600	2.29	1.82	1.56	1.16	1.15	1.21	1.24	1.40	1.57	1.69	1.78	2.24	2.42	2.55	2.86	3.16	3.66	4.01	4.16	4.53	4.90	
H	700	2.18	1.88	1.49	1.18	1.16	1.15	1.12	1.16	1.24	1.29	1.32	1.45	1.57	1.78	2.18	2.26	2.41	3.00	3.33	3.73	4.04	4.44
D	800	1.63	1.23	1.21	1.07	1.05	0.94	0.98	0.97	0.99	1.13	1.22	1.27	1.43	1.56	1.66	1.87	2.29	2.55	2.71	2.95	3.39	3.73
平均	900	1.57	1.24	1.00	1.04	0.95	1.01	1.08	1.15	1.20	1.20	1.40	1.50	1.63	1.72	1.81	1.95	2.22	2.39	2.73	2.83	3.03	3.23
の	1000	1.43	1.27	1.15	1.16	1.14	1.04	1.06	1.05	1.17	1.32	1.47	1.59	1.64	1.66	1.82	1.99	2.01	2.14	2.38	2.60	2.83	3.09
平	2000	0.36	0.38	0.37	0.37	0.38	0.39	0.41	0.44	0.56	0.61	0.72	0.82	0.88	0.90	0.91	1.11	1.27	1.40	1.57	1.68	1.82	2.03
均	3000	0.23	0.23	0.16	0.22	0.32	0.32	0.38	0.41	0.50	0.68	0.73	0.74	0.77	0.92	0.92	1.00	1.02	1.04	1.10	1.21	1.37	
値	4000	0.07	0.16	0.17	0.17	0.23	0.25	0.28	0.31	0.39	0.44	0.44	0.52	0.57	0.63	0.69	0.70	0.73	0.78	0.79	0.80	0.80	
真	5000	0.27	0.16	0.06	0.07	0.12	0.28	0.29	0.36	0.40	0.50	0.49	0.50	0.59	0.67	0.72	0.70	0.71	0.77	0.82	0.80	0.81	0.88
構	6000	0.72	0.58	0.55	0.16	0.21	0.21	0.22	0.35	0.36	0.36	0.37	0.38	0.46	0.46	0.46	0.47	0.52	0.57	0.68	0.69	0.76	0.76
造	7000	1.50	1.40	1.35	0.70	0.70	0.35	0.23	0.18	0.18	0.23	0.28	0.30	0.30	0.31	0.37	0.37	0.47	0.50	0.51	0.49	0.53	
を	8000	0.66	0.72	0.83	0.74	0.74	0.34	0.26	0.26	0.30	0.36	0.41	0.42	0.42	0.55	0.60	0.63	0.69	0.77	0.78	0.77	0.80	
学	9000	0.61	0.63	0.70	0.70	0.60	0.45	0.36	0.21	0.27	0.27	0.32	0.35	0.42	0.42	0.44	0.44	0.44	0.44	0.44	0.50	0.52	0.53
習	10000	0.60	0.61	0.62	0.62	0.68	0.55	0.25	0.21	0.16	0.16	0.27	0.28	0.39	0.40	0.40	0.41	0.46	0.46	0.47	0.52	0.53	0.53
4	20000	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.13	0.13	0.13	0.15	0.15	0.16	0.16	0.17	0.22	0.22	0.17	0.17	0.18	0.18	0.18	0.20	0.20
5	50000	0.00	0.00	0.00	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08	0.13	0.13	0.14	0.14	0.14	0.19	0.20	0.20	0.20	
100000	0.00	0.00	0.05	0.05	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.20	0.20		
200000	0.01	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02		

N	ESS $\alpha$																				
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
100	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
200	9	16	23	30	28	27	24	21	17	13	10	8	5	5	2	2	1	1	0	0	
300	10	31	36	45	44	44	41	39	34	31	28	24	21	18	14	10	5	4	3	2	1
400	18	36	47	54	51	49	48	46	39	34	33	32	31	24	20	12	11	8	3	2	1
500	29	43	47	55	54	53	52	51	47	45	41	38	31	29	21	17	13	10	4	3	2
600	29	39	43	45	47	41	38	36	35	33	31	29	26	23	21	18	16	13	11	8	6
700	46	58	58	59	59	55	53	52	51	50	46	41	36	32	29	27	26	21	15	10	7
800	46	60	63	67	65	63	62	61	58	57	56	53	48	46	41	37	31	26	20	18	14
900	49	56	60	62	64	63	60	59	58	56	54	51	50	47	44	42	35	29	25	18	13
1000	67	76	78	75	76	75	71	70	68	67	66	63	62	57	52	46	38	31	28	21	20
2000	79	80	81	78	74	69	67	65	63	62	59	58	55	54	53	54	53	50	48	44	43
3000	90	90	89	88	87	85	84	83	79	77	75	74	72	70	69	67	64	62	58	57	
4000	93	91	90	88	87	84	80	79	78	74	72	70	68	66	64	62	61	61	58	55	
5000	94	94	95	95	93	93	93	92	91	89	87	85	83	83	83	80	78	73	72	71	
10000	91	90	89	87	88	88	89	90	90	91	90	87	87	86	84	84	82	82	82	81	
20000	99	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	
50000	100	100	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	
100000	100	100	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	
200000	99	99	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	

表 4.8: 実験 1 の結果 (ネットワーク earthquake)

N	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	6.24	6.27	6.27	6.31	6.31	6.32	6.35	6.36	6.36	6.36	6.35	6.41	6.42	6.41	6.45	6.44	6.51	6.52	6.50	6.51	6.55	6.56
200	6.10	6.12	6.14	6.12	6.11	6.11	6.11	6.13	6.20	6.25	6.29	6.27	6.26	6.25	6.24	6.27	6.27	6.27	6.31	6.31	6.34	6.39
300	6.07	6.07	6.11	6.10	6.11	6.13	6.15	6.19	6.21	6.21	6.20	6.23	6.27	6.30	6.33	6.33	6.33	6.33	6.33	6.33	6.33	6.39
400	6.02	6.02	6.02	6.06	6.06	6.09	6.09	6.10	6.11	6.12	6.13	6.15	6.13	6.13	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.16	6.15
500	6.01	6.01	6.02	6.03	6.03	6.02	6.02	6.03	6.03	6.03	6.01	6.01	6.01	6.02	6.02	6.02	6.02	6.02	6.02	6.01	6.01	5.99
S	6.00	6.00	6.05	6.06	6.10	6.10	6.12	6.11	6.06	6.01	6.03	6.03	6.02	6.02	6.03	6.03	6.01	6.01	5.98	5.97	5.96	5.97
H	800	6.00	6.01	6.01	6.01	6.03	6.04	6.02	6.01	6.02	6.03	6.04	6.03	6.03	6.04	6.04	6.04	6.04	6.05	6.05	6.04	6.04
D	900	6.00	6.00	6.02	6.03	6.04	6.05	6.04	6.04	6.02	6.02	6.03	6.03	6.01	6.01	6.02	6.02	6.02	6.00	6.00	5.97	5.98
の	1000	6.00	6.01	6.02	6.02	6.02	6.00	6.00	6.02	6.03	5.96	5.96	5.97	5.98	5.98	5.96	5.96	5.96	5.94	5.91	5.91	5.91
均	6000	6.00	5.81	5.64	5.35	5.14	4.85	4.79	4.75	4.62	4.58	4.35	4.28	4.17	4.03	3.98	3.98	3.84	3.70	3.62	3.49	3.45
値	7000	5.74	5.40	5.12	4.43	4.02	3.83	3.74	3.76	3.55	3.49	3.48	3.45	3.44	3.40	3.38	3.38	3.29	3.23	3.23	3.22	3.16
平	3000	6.00	6.00	5.96	5.95	5.88	5.87	5.83	5.80	5.79	5.75	5.68	5.62	5.58	5.59	5.52	5.52	5.42	5.37	5.37	5.37	5.37
均	4000	6.00	5.90	5.74	5.59	5.56	5.55	5.47	5.42	5.31	5.25	5.22	5.17	5.09	5.07	5.07	5.05	5.05	4.95	4.92	4.83	4.81
5000	5.97	5.97	5.89	5.69	5.63	5.55	5.46	5.25	5.24	5.08	5.03	4.85	4.78	4.72	4.73	4.68	4.60	4.52	4.48	4.48	4.38	4.38
6000	6.00	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	6.01	5.99	5.99	6.00	5.95	5.95	5.92	5.91	5.89	5.89	5.87	5.86	5.86	5.86	5.86	5.86
7000	5.73	5.29	4.94	4.37	4.23	4.06	4.07	3.94	3.85	3.72	3.50	3.34	3.26	3.19	3.08	3.08	3.05	2.96	2.83	2.77	2.70	2.63
8000	5.54	5.04	4.52	3.88	3.67	3.56	3.43	3.29	3.21	3.12	3.10	2.98	2.88	2.80	2.68	2.56	2.52	2.41	2.40	2.34	2.33	2.33
9000	5.31	4.42	4.05	3.69	3.32	3.11	3.14	2.93	2.89	2.82	2.68	2.24	2.17	2.15	2.14	1.99	1.85	1.80	1.76	1.74	1.73	1.73
10000	2.41	1.57	1.13	0.74	0.66	0.52	0.46	0.40	0.39	0.35	0.31	0.31	0.37	0.37	0.37	0.37	0.36	0.36	0.30	0.30	0.30	0.30
20000	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03
50000	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
100000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

N	ESS $\alpha$																					
	0.1	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
300	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
400	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
600	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
700	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
800	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
900	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6000	0	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14
7000	0	0	0	0	1	2	2	3	4	8	12	15	17	19	20	24	24	26	27	28	29	29
8000	0	0	0	2	7	8	10	15	17	17	21	22	24	26	27	29	31	34	35	36	36	36
9000	0	0	3	7	9	11	14	14	19	24	31	32	33	34	38	41	42	42	43	44	44	44
10000	0	51	62	76	77	79	80	81	82	83	84	84	84	84	84	84	85	86	86	86	86	86
20000	17	56	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96
50000	96	96	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99
100000	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

表4.9: 実験1の結果（ネットワーク Survey）

### 4.3 実験 2 の手順

次に、第 3 章に示した従来手法について、構造学習の結果を調べるため、ESS の推定および構造学習を行い、実験には図 4.1～4.9 のネットワークを用いた。実験 2 の手順は以下の通りである。

1. 図 4.1～4.5 のネットワークから  $100, 200, \dots, 1000$  個のサンプルを生成し、図 4.6～4.9 のネットワークから  $1000, 2000, \dots, 10000$  個のサンプルを生成する。
2. 表 4.10 に示す各手法で決定した ESS の値を用いて、手順 1 で生成されたサンプルから構造学習を行う。
3. 手順 1, 2 を 100 回繰り返し行う。

ラベル	手法
1.0	1.0 とする ( $\alpha = 1$ )
Steck	Steck (2008) [7] の手法
Silander	Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) [6] の手法
最適値	実験 1 において SHD の平均値の最小値を与えた ESS

表 4.10: 実験 2 の ESS の値の決定方法

各手法の構造学習の結果を比較するため、100 回の試行の各手法で学習されたネットワーク構造と真のネットワーク構造との SHD の平均値と、各手法で決定した ESS の値と最適な ESS の値の絶対差の平均値の計算を行った。ここで、最適な ESS の値とは SHD の値を最小化する ESS の値として計算を行った。

## 4.4 実験 2 の結果と考察

結果として、各手法で学習されたネットワーク構造と真のネットワーク構造との SHD の平均値と、各手法で決定した ESS の値と最適な ESS の値の絶対差の平均値を表 4.11, 4.12 に示す。各表はネットワーク構造毎に縦軸にデータ数、横軸に表 4.10 に示す手法を表す。最適値を用いた場合を除いて各ネットワーク構造、データ数において SHD の値を最も小さくすることができている部分が青色で示されている。

Steck (2008) [4] の周辺尤度の最大化の近似計算を用いる手法では ESS の値を大きめに求められる性質があるため、特に確率パラメータの一様性が高い Strongly uniform distribution や survey に対する学習では良いネットワーク構造を探索することができていることが確認できた。

また、これまで一般的に用いられてきた Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) の経験ベイズ手法による BDeu の最大化を用いた ESS の決定法は、平均的には表 4.10 に示す 3 つの従来手法の中で最も良い結果を得られたが、実験 1 で SHD の平均値の最小値を与えた最適値を用いた場合より SHD の平均値が大きくなっている。つまり、ESS の最適値を求めるることはできていないことが実証的に示すことができた。

N	SHDの平均値								最適値との絶対差の平均値							
	提案手法				従来手法				提案手法				従来手法			
	KL	PL	Count	MB	1.0	Steck	Silander	最適値	KL	PL	Count	MB	1.0	Steck	Silander	
Strongly skewed distribution	100	2.86	3.83	3.23	3.19	3.32	3.18	2.40	2.46	2.07	3.10	3.41	3.57	2.43	2.11	0.90
	200	1.86	2.73	2.11	1.91	1.78	1.58	1.18	1.06	1.38	1.88	2.43	2.81	1.40	1.20	0.81
	300	0.95	1.51	1.23	1.19	0.75	0.63	0.56	0.41	0.70	0.82	1.48	1.55	0.62	0.52	0.31
	400	0.48	0.53	0.60	0.65	0.37	0.39	0.50	0.33	0.41	0.52	1.11	1.81	0.20	0.18	0.31
	500	0.30	0.34	0.46	0.49	0.15	0.13	0.15	0.13	0.47	0.62	1.21	1.48	0.27	0.24	0.27
	600	0.29	0.51	0.70	0.74	0.21	0.24	0.37	0.20	0.72	1.34	1.82	2.49	0.66	0.59	0.52
	700	0.33	0.42	0.49	0.54	0.34	0.26	0.31	0.25	0.65	1.05	1.59	1.58	0.53	0.47	0.47
	800	0.27	0.39	0.50	0.48	0.19	0.21	0.33	0.19	0.80	1.26	1.93	2.19	0.62	0.58	0.64
	900	0.24	0.56	0.68	0.68	0.33	0.42	0.23	0.30	0.64	1.22	1.76	1.53	0.67	0.64	0.52
	1000	0.19	0.41	0.61	0.65	0.30	0.28	0.24	0.18	0.54	0.98	1.48	2.22	0.50	0.46	0.41
Skewed distribution	平均	0.78	1.12	1.06	1.05	0.77	0.73	0.63	0.55	0.84	1.28	1.82	2.12	0.79	0.70	0.51
	100	2.53	2.58	2.66	2.67	2.51	2.60	2.23	2.38	3.17	2.37	3.32	3.79	2.24	1.89	1.47
	200	1.87	1.92	1.65	1.67	2.11	1.81	1.69	1.49	2.75	2.35	2.80	3.26	2.52	1.89	1.60
	300	0.81	0.87	0.62	0.62	1.07	0.76	0.79	0.65	0.85	1.05	0.60	0.85	1.24	0.75	0.64
	400	0.50	0.50	0.45	0.48	0.56	0.43	0.43	0.41	0.48	0.63	0.46	0.61	0.45	0.27	0.23
	500	0.16	0.23	0.28	0.25	0.14	0.20	0.21	0.12	0.12	0.32	0.52	0.50	0.01	0.06	0.07
	600	0.13	0.15	0.18	0.18	0.11	0.11	0.14	0.08	0.19	0.38	0.58	0.51	0.01	0.05	0.02
	700	0.06	0.08	0.19	0.19	0.06	0.08	0.08	0.06	0.18	0.45	0.65	0.60	0.00	0.03	0.06
	800	0.05	0.05	0.08	0.08	0.03	0.03	0.03	0.03	0.16	0.37	0.33	0.23	0.00	0.00	0.00
	900	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.37	0.32	0.22	0.00	0.00	0.00
Combined skewed and uniform distribution	1000	0.09	0.12	0.11	0.14	0.03	0.09	0.07	0.03	0.35	0.58	0.54	0.51	0.00	0.10	0.02
	平均	0.62	0.65	0.62	0.63	0.66	0.61	0.57	0.53	0.83	0.89	1.01	1.11	0.65	0.50	0.41
Uniform distribution	100	2.81	2.73	2.99	3.00	2.50	2.72	2.70	2.50	1.82	0.98	3.07	3.20	0.55	0.63	0.64
	200	2.22	2.37	2.63	2.63	2.20	2.33	2.32	2.09	1.14	0.94	3.04	3.29	0.33	0.63	0.58
	300	2.16	2.31	2.38	2.42	2.20	2.31	2.28	2.05	0.46	0.92	1.75	2.30	0.42	0.61	0.53
	400	2.18	2.29	2.39	2.45	2.16	2.23	2.26	2.09	0.57	0.58	1.53	2.02	0.18	0.31	0.29
	500	2.17	2.21	2.22	2.29	2.17	2.19	2.19	2.08	0.75	0.69	0.89	1.40	0.22	0.34	0.31
	600	2.22	2.24	2.26	2.27	2.16	2.21	2.19	2.11	0.51	0.57	1.09	1.27	0.24	0.28	0.23
	700	2.21	2.25	2.31	2.31	2.14	2.18	2.23	2.12	0.91	0.92	1.29	1.45	0.47	0.43	0.54
	800	2.14	2.17	2.19	2.19	2.14	2.16	2.17	2.11	0.83	0.94	0.82	0.95	0.67	0.54	0.54
	900	2.12	2.22	2.17	2.16	2.21	2.23	2.22	2.14	0.52	1.20	0.76	0.82	0.99	0.78	0.60
	1000	2.16	2.18	2.14	2.14	2.18	2.15	2.17	2.11	1.21	1.42	0.91	0.86	1.12	0.80	0.87
Strongly uniform distribution	平均	2.24	2.30	2.37	2.39	2.21	2.27	2.27	2.14	0.87	0.92	1.51	1.76	0.52	0.53	0.51
	100	2.93	2.99	3.15	3.13	2.55	2.95	2.77	2.55	1.77	2.08	5.13	5.58	0.98	2.12	1.09
	200	2.19	2.77	2.76	2.76	2.15	2.75	2.36	2.12	2.03	3.01	4.18	4.92	1.54	2.99	2.12
	300	2.06	2.07	2.00	1.96	2.13	2.04	2.00	1.96	2.59	2.16	2.68	3.71	2.15	2.38	1.99
	400	1.77	1.70	1.77	1.77	2.07	1.71	1.78	1.66	2.55	2.36	2.86	4.27	2.29	2.80	1.54
	500	1.59	1.71	1.72	1.72	1.94	1.67	1.45	1.58	1.43	2.03	3.08	3.77	1.11	2.83	0.81
	600	1.64	1.49	1.41	1.41	1.89	1.45	1.45	1.37	1.50	1.19	1.23	1.82	1.36	1.88	0.84
	700	1.30	1.23	1.23	1.28	1.63	1.22	1.18	1.20	0.84	0.96	1.20	1.39	0.57	1.41	0.54
	800	0.94	0.92	0.92	0.93	1.09	0.93	0.83	0.89	0.40	0.39	0.52	1.08	0.25	0.77	0.10
	900	0.92	0.86	0.87	0.87	1.02	0.85	0.76	0.80	0.22	0.27	0.37	0.45	0.21	0.26	0.03
Strongly uniform distribution	1000	0.72	0.80	0.78	0.78	0.71	0.78	0.76	0.67	0.53	0.91	1.01	0.90	0.37	0.58	0.34
	平均	1.61	1.65	1.66	1.66	1.72	1.64	1.53	1.48	1.39	1.54	2.23	2.79	1.08	1.80	0.94

表 4.11: 実験 2, 3 の結果 (図 4.1~4.5 のネットワーク)

N	SHDの平均値							最適値との絶対差の平均値								
	提案手法				従来手法			最適値	提案手法				従来手法			
	KL	PL	Count	MB	1.0	Steck	Silander		KL	PL	Count	MB	1.0	Steck	Silander	
asia	1000	2.36	2.45	3.54	3.68	2.36	2.32	2.65	2.17	1.75	2.20	6.75	8.12	1.62	1.52	1.79
	2000	1.94	2.21	2.34	2.42	1.93	1.95	1.90	1.72	2.64	3.55	5.65	6.55	2.90	2.79	1.70
	3000	1.92	2.06	2.09	2.15	2.06	2.13	1.71	1.54	3.21	4.04	4.06	4.70	3.41	3.31	1.79
	4000	1.39	1.58	1.93	1.96	1.29	1.26	1.63	1.29	2.40	3.18	4.49	5.23	2.51	2.45	1.56
	5000	1.18	1.37	2.03	2.04	1.16	1.16	1.07	1.02	2.11	2.91	4.19	4.56	2.24	2.17	1.26
	6000	1.16	1.23	1.66	1.62	1.16	1.14	1.11	1.12	2.79	3.60	2.94	3.53	2.98	2.92	1.58
	7000	1.37	1.47	1.75	1.78	1.24	1.26	1.33	1.24	3.57	4.38	3.42	3.88	3.71	3.63	1.96
	8000	1.23	1.30	1.33	1.37	1.13	1.13	1.09	1.05	3.74	4.45	2.83	3.09	3.80	3.71	1.85
	9000	0.95	1.07	1.14	1.13	0.94	0.95	0.89	0.85	2.53	3.25	2.50	2.62	2.61	2.53	1.14
	10000	0.70	0.82	1.06	1.06	0.64	0.66	0.56	0.49	1.76	2.38	2.31	2.57	1.74	1.69	1.07
	平均	1.42	1.56	1.89	1.92	1.39	1.40	1.39	1.25	2.65	3.39	3.91	4.49	2.75	2.67	1.57
cancer	1000	3.24	2.89	2.72	2.73	3.07	2.89	2.89	2.83	0.66	0.40	0.70	0.80	0.31	0.20	0.18
	2000	3.21	2.69	2.59	2.60	3.02	2.86	2.76	2.64	1.01	0.71	0.47	0.51	0.66	0.51	0.50
	3000	2.31	1.83	1.52	1.41	2.11	1.75	1.63	1.55	1.02	0.78	0.31	0.24	0.80	0.65	0.60
	4000	2.31	1.92	1.53	1.49	2.44	2.01	1.80	1.34	0.92	0.58	0.25	0.27	0.79	0.57	0.44
	5000	2.06	1.26	1.03	1.00	1.62	1.40	1.30	1.05	0.97	0.41	0.16	0.14	0.72	0.61	0.58
	6000	1.35	0.73	0.54	0.57	1.11	0.91	0.73	0.50	0.67	0.52	0.31	0.65	0.44	0.33	0.26
	7000	1.38	0.45	0.39	0.36	0.99	0.71	0.58	0.31	0.68	0.26	0.23	0.19	0.50	0.39	0.29
	8000	1.09	0.55	0.54	0.54	0.70	0.57	0.51	0.46	0.44	0.21	0.21	0.09	0.26	0.21	0.18
	9000	0.87	0.42	0.31	0.31	0.54	0.50	0.36	0.36	0.47	0.27	0.19	0.15	0.28	0.22	0.13
	10000	0.33	0.14	0.17	0.14	0.22	0.22	0.14	0.11	0.30	0.22	0.22	0.07	0.12	0.09	0.05
	平均	1.82	1.29	1.13	1.12	1.58	1.38	1.27	1.12	0.71	0.44	0.30	0.31	0.49	0.38	0.32
earthquake	1000	1.33	1.32	1.47	1.63	1.15	1.16	1.08	1.04	1.05	1.38	1.48	2.54	0.87	0.86	0.54
	2000	0.39	0.36	0.68	0.82	0.37	0.40	0.34	0.36	0.55	1.16	1.28	1.71	0.71	0.71	0.47
	3000	0.31	0.22	0.44	0.43	0.16	0.23	0.16	0.16	0.36	0.85	0.98	1.64	0.42	0.43	0.35
	4000	0.28	0.20	0.25	0.34	0.17	0.17	0.11	0.07	0.34	0.73	0.84	1.61	0.33	0.33	0.32
	5000	0.19	0.27	0.39	0.47	0.06	0.11	0.07	0.06	0.56	0.83	1.36	2.08	0.42	0.42	0.39
	6000	0.11	0.67	0.65	0.77	0.55	0.55	0.16	0.16	0.24	0.60	0.60	0.98	0.19	0.21	0.13
	7000	0.38	1.52	1.51	1.55	1.35	1.40	0.70	0.18	0.37	1.23	1.51	1.88	0.71	0.77	0.49
	8000	0.40	0.81	0.82	1.06	0.83	0.83	0.61	0.26	0.34	0.67	1.00	2.12	0.23	0.26	0.13
	9000	0.66	0.61	0.62	0.74	0.70	0.70	0.70	0.21	0.41	0.79	0.81	1.19	0.40	0.41	0.31
	10000	0.48	0.62	0.66	0.81	0.62	0.62	0.62	0.16	0.22	0.86	0.91	1.37	0.45	0.46	0.34
	平均	0.45	0.66	0.75	0.86	0.60	0.62	0.46	0.27	0.44	0.91	1.08	1.71	0.47	0.49	0.35
survey	1000	5.99	5.98	5.99	6.00	5.99	6.02	6.00	5.91	1.29	0.75	1.42	1.49	1.18	0.96	1.01
	2000	6.01	5.93	5.88	5.89	6.03	6.01	6.05	5.86	0.84	0.37	0.30	0.31	0.54	0.36	0.73
	3000	5.97	5.70	5.40	5.40	6.00	5.84	5.96	5.37	2.04	0.98	0.11	0.11	2.17	1.45	0.84
	4000	5.83	5.25	4.71	4.71	5.82	5.53	5.79	4.81	2.81	1.23	0.27	0.27	2.93	1.81	1.58
	5000	5.81	4.92	4.51	4.51	5.72	5.30	5.72	4.38	2.98	1.31	0.35	0.35	2.97	1.83	1.61
	6000	5.48	4.52	3.63	3.64	5.66	4.97	5.42	3.45	3.65	2.10	0.11	0.11	4.41	2.71	2.22
	7000	5.07	4.10	3.24	3.24	5.34	4.39	4.71	3.16	4.49	2.04	0.25	0.25	4.81	2.86	2.16
	8000	4.62	3.73	3.00	3.00	4.53	3.79	4.58	2.63	3.59	1.73	0.35	0.40	3.80	2.08	2.10
	9000	4.59	3.68	2.53	2.53	4.76	3.54	4.16	2.33	3.90	2.88	0.39	0.39	4.93	2.67	2.26
	10000	4.04	3.01	2.16	2.16	4.16	2.88	3.73	1.73	3.23	1.95	0.20	0.20	3.82	1.65	1.93
	平均	5.34	4.68	4.11	4.11	5.40	4.83	5.21	3.96	2.88	1.53	0.37	0.39	3.15	1.84	1.64

表 4.12: 実験 2, 3 の結果 (図 4.6~4.9 のネットワーク)

## 第 5 章

# ESS 決定の提案手法

第 4 章の評価実験より、BDeu スコアを最大化する ESS の値が予測精度を最大化することは限らないことが確認された。そのため、BDeu スコアを最大化する ESS の値ではなく、予測精度を最大化する ESS の値を求める必要がある。

Ueno (2010) [5] は、データ数が十分に大きい場合は BDeu スコアの ESS の値は 1.0 が最適であるということを示したが、データ数が十分に大きくない場合に予測精度を最大化する ESS の値を求める手法はわかっていない。

そのため本研究では、BDeu スコアを最大化する ESS は予測精度を最適化する ESS の値と異なることから、数学的な最適化は困難であると考え、経験的に交差検証を用いて予測精度を最大化する ESS の値を求めるすることを考えた。

ベイジアンネットワークの構造型学習における交差検証を用いた ESS の決定法では、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がどれほど適切な構造であるかを測ることが必要である。

Ueno (2008) [9] では、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造を真のネットワーク構造と比較して誤りの個数を最小化する ESS の値を選択する手法が提案されている。しかしながら、現実には真のネットワーク構造は未知であるため真のネットワーク構造と比較することはできない。

また、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造とテストデータから学習されたネットワーク構造を比較して、誤りの個数を最小化する ESS の値を選択する手法も考えられるが、Ueno (2010) [5] で示されているように、ESS の値を大きくしていくと、

学習されるネットワーク構造は漸近的に完全グラフに近づき, ESS の値を小さくしていくと, 学習されるネットワーク構造は漸近的に空グラフに近づくため, このような交差検証により決定する ESS の値では, 真の構造を学習することはできないことが確認されている.

そこで, トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がどれほど適切な構造であるかをテストデータに対する予測精度として考え, Algorithm 7 に示す交差検証により, 最適な ESS の値を求めることを提案する. ここで,  $N$  はデータ数,  $K$  は交差検証の分割数,  $A$  は ESS の候補集合,  $D_t^{\text{train}}$  はトレーニングデータ,  $D_t^{\text{test}}$  はテストデータを表す.

トレーニングデータから学習されたネットワーク構造のテストデータに対する予測精度を測る指標 ( $\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}})$ ) としては, 以下に示す四つの指標を提案する.

---

#### Algorithm 7 $K$ -分割交差検証による ESS の最適化

---

**Input:**  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$  ( $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ),  $A, K$

**Output:**  $\alpha$

- 1: **partition**  $D$  into  $D_1, \dots, D_K$  ( $|D_1| = \dots = |D_K| = \frac{N}{K}$ ,  $D_i \cap D_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ))
  - 2: **for**  $\alpha' \in A$  **do**
  - 3:     **for**  $t = 1$  to  $K$  **do**
  - 4:          $D_t^{\text{train}} \leftarrow D \setminus D_t$ ,  $D_t^{\text{test}} \leftarrow D_t$
  - 5:          $G_t^{\alpha'} \leftarrow \text{Learn the structure from } (D_t^{\text{train}}, \alpha')$
  - 6:     **end for**
  - 7: **end for**
  - 8:  $\alpha \leftarrow \arg \max_{\alpha' \in A} \sum_{t=1}^K \text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}})$
-

## 5.1 条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる

まず、一つ目の手法としては、条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる手法を考えた。条件付き Kullback-Leibler 情報量は、二つの確率分布の差異を表す指標で、分布間擬距離とも呼ばれる。トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がテストデータの確率構造とどれほど近いかを考えるため、条件付き Kullback-Leibler 情報量を最小化する ESS の値を求める。

Algorithm 6 における予測精度を測る指標 ( $\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}})$ ) は式 (5.1) の数式で示すことができる。

$$\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}}) = - \sum_{i=1}^n I_{KL}(p(x_i | \alpha', \hat{\Pi}_i, G_t^{\alpha'}) || q(x_i | \hat{\Pi}_i, G_t^{\alpha'})) \quad (5.1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & I_{KL}(p(x_i | \alpha', \hat{\Pi}_i, G_t^{\alpha'}) || q(x_i | \hat{\Pi}_i, G_t^{\alpha'})) \\ &= \sum_{j=1}^{q_i} p(\hat{\Pi}_i = j | G_t^{\alpha'}) \sum_{k=1}^{r_i} p(x_i = k | \alpha', \hat{\Pi}_i = j, G_t^{\alpha'}) \log \frac{p(x_i = k | \alpha', \hat{\Pi}_i = j, G_t^{\alpha'})}{q(x_i = k | \hat{\Pi}_i = j, G_t^{\alpha'})} \\ & \quad p(\hat{\Pi}_i = j | G_t^{\alpha'}) = \frac{n_{ij}^{\text{train}}}{n_{\text{train}}} \\ & \quad p(x_i = k | \alpha', \hat{\Pi}_i = j, G_t^{\alpha'}) = \frac{n_{ijk}^{\text{train}} + \alpha' / (q_i r_i)}{n_{ij}^{\text{train}} + \alpha' / q_i} \\ & \quad q(x_i = k | \hat{\Pi}_i = j, G_t^{\alpha'}) = \frac{n_{ijk}^{\text{test}} + 1 / (q_i r_i)}{n_{ij}^{\text{test}} + 1 / q_i} \end{aligned}$$

とする。 $q(x_i = k | \hat{\Pi}_i = j, G_t^{\alpha'})$  は式 (2.5) を用いてテストデータの確率構造を表す数式であるが、テストデータの影響を最大化するため ESS の値を 1.0 として計算している。

## 5.2 Predictive Likelihood を用いる

次に、二つ目の手法として Malone, Järvisalo and Myllymäki (2015) [10] で述べられているトレーニングデータから学習されたネットワーク構造の各変数の親変数を所与とした

テストデータに対する条件付き尤度を表す Predictive Likelihood を用いる手法を考えた。Algorithm 5 における予測精度を測る指標 ( $\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}})$ ) は式 (5.2) の数式で示すことができる。

$$\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}}) = - \sum_{d^r \in D_t^{\text{test}}} \sum_{i=1}^n \log p(x_i^r | \alpha', \Pi_i, G_t^{\alpha'}) \quad (5.2)$$

ここで、

$$p(x_i^r | \alpha', \Pi_i, G_t^{\alpha'}) = \frac{n_{ijk} + \alpha' / (q_i r_i)}{n_{ij} + \alpha' / q_i}$$

とし、 $x_i^r$  は  $d^r$  の  $i$  番目の変数の値とする。

### 5.3 生成データのテストデータとの一致回数を用いる

次に、三つ目の手法としてトレーニングデータから学習されたネットワーク構造からデータを生成し、生成したデータのテストデータに対する予測精度を最大化する ESS を選択する手法を考えた。ここでは予測精度として、生成されたデータのテストデータとの一致回数を用いることとした。Algorithm 5 における予測精度を測る指標 ( $\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}})$ ) は式 (5.3) の数式で示すことができる。

$$\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}}) = \sum_{d^r \in D_t^{\text{test}}} \sum_{i=1}^n \left[ x_i^r = \arg \max_{x_i} p(x_i | \alpha', G_t^{\alpha'}) \right] \quad (5.3)$$

ただし、

$$\left[ a = b \right] = \begin{cases} 0 & (a = b) \\ 1 & (a \neq b) \end{cases}$$

とし、 $x_i^r$  は  $d^r$  の  $i$  番目の変数の値とする。

## 5.4 マルコフブランケットを用いたテストデータの条件付き尤度を用いる

最後に、四つ目の手法としてトレーニングデータから学習されたネットワーク構造の各変数のマルコフブランケットを所与としたテストデータに対する条件付き尤度を計算し、それを最大化する ESS を選択する手法を考えた。Algorithm 7 における予測精度を測る指標 (Evaluation( $\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}}$ )) は式 (5.4) の数式で示すことができる。

$$\text{Evaluation}(\alpha', G_t^{\alpha'}, D_t^{\text{test}}) = \sum_{d^r \in D_t^{\text{test}}} \sum_{i=1}^n p(x_i^r | \alpha', \text{MB}(x_i), G_t^{\alpha'}) \quad (5.4)$$

ただし、 $x_i^r$  は  $d^r$  の  $i$  番目の変数の値、 $\text{MB}(x_i)$  は変数  $x_i$  のマルコフブランケットとする。

# 第 6 章

## 提案手法を用いた評価実験

### 6.1 実験 3 の手順

次に、第 5 章に示した四つの提案手法について、構造学習の結果に対してどのような影響や特徴があるのかを調べるため、ESS の推定および構造学習を行い、第 4 章に示した実験 2 の従来手法を用いた学習の結果との比較を行った。実験には実験 2 と同様に図 4.1～4.9 に示したネットワークを用いた。実験 3 の手順は以下の通りである。

1. 図 4.1～4.5 のネットワークから  $100, 200, \dots, 1000$  個のサンプルを生成し、図 4.6～4.9 のネットワークから  $1000, 2000, \dots, 10000$  個のサンプルを生成する。
2. 表 6.1 に示す各手法で決定した ESS の値を用いて、手順 1 で生成されたサンプルから構造学習を行う。
3. 手順 1, 2 を 100 回繰り返し行う。

交差検証の分割数  $K$  は  $2, 5, 10$  の三通りを試したが、条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いた手法では  $K = 2$ 、その他の 3 手法では  $K = 10$  が最も良い結果となつたため、結果としてはこれらの場合のみを示す。提案手法における ESS の値の候補集合は、 $A = \{0.10, 0.50, 1.0, 2.0, \dots, 20.0\}$  とした。

各手法の構造学習の結果を比較するため、100 回の試行の各手法で学習されたネットワーク構造と真のネットワーク構造との SHD の平均値と、各手法で決定した ESS の値と最適な ESS の値の絶対差の平均値の計算を行つた。ここで、最適な ESS の値とは SHD

ラベル	手法
KL	条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる手法
PL	Predictive Likelihood を用いる手法
Count	生成データのテストデータとの一致回数を用いる手法
MB	マルコフブランケットを用いたテストデータの条件付き尤度を用いる手法
1.0	1.0 とする ( $\alpha = 1$ )
Steck	Steck (2008) [7] の手法
Silander	Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) [6] の手法
最適値	実験 1において SHD の平均値の最小値を与えた ESS

表 6.1: 実験 3 の ESS の値の決定方法

の値を最小化する ESS の値として計算を行った。

## 6.2 実験 3 の結果と考察

結果として、各手法で学習されたネットワーク構造と真のネットワーク構造との SHD の平均値と各手法で決定した ESS の値と最適な ESS の値の絶対差の平均値を表 4.11, 4.12 に示す。各表はネットワーク構造毎に縦軸にデータ数、横軸に表 6.1 に示す手法を表す。

提案手法の四つの手法では、条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いた手法は、Strongly skewed distribution と Skewed distribution, Combined skewed and uniform distribution, Uniform distribution, asia, earthquake のネットワークでは SHD の平均値を最も小さくすることができている。一方で、cancer と survey のネットワークでは他の三つの手法よりも SHD の平均値が大きくなっている。求められた ESS の値は他の三つの手法より小さい値となっており、ESS の最適値が小さいネットワーク構造に対して、真のネットワークに

近い構造が探索されている。

Predictive Likelihood を用いた手法は、Strongly uniform distribution のネットワークでは SHD の平均値を最も小さくすることができているが、Strongly skewed distribution や Skewed distribution のネットワークでは他の 3 手法よりも SHD の平均値が大きくなっている。求められた ESS の値は他の三つの手法より小さい値となっているため、確率パラメータの一様性が高いネットワークでは真のネットワークに近い構造が学習できている。

生成データのテストデータとの一致回数を用いる手法と学習された構造の各変数のマルコフブランケットを所与としたテストデータの条件付き尤度を用いる手法からは類似した結果を得ることができ、cancer や survey のネットワークで他の三つの手法よりも SHD の平均値を小さくすることができている。これらの手法では求められた ESS の値が Predictive Likelihood を用いた手法よりさらに大きい値をとっているため、ESS の最適値がより大きいこれらの二つのネットワークにおいて、真のネットワークに近い構造を探索できていると考察している。

交差検証を用いた四つの手法を新たに提案したが、実験の結果、様々な条件を変えて最適値を得ることができる手法は残念ながら明らかにはされなかった。

# 第 7 章

## おわりに

### 7.1 まとめ

本論文では、ベイジアンネットワークのスコアベースアプローチの構造学習において一般的に用いられる BDeu スコアのハイパープラメータの ESS の値を決定する方法について述べた。

第 2 章では、ベイジアンネットワークやベイジアンネットワークのパラメータ学習と構造学習に関する基礎知識を説明し、構造学習では、BDeu スコアを最大化する構造の厳密解探索手法として、本研究の各実験で用いた Silander and Myllymäki (2006) [1] の動的計画法を用いて探索する手法について述べた。

第 3 章では、ユーザーが自由に設定することができる BDeu スコアのハイパープラメータの ESS の値について、事前知識の重みを示す擬似データなので、ESS の値をユーザーが固定の値として自由に設定し、構造学習を行った場合に ESS の値がネットワーク構造の学習精度に大きな影響を与えることを述べ、データ数が十分大きい場合には ESS の値を 1.0 とすることが最適であるが、[5] データ数が十分大きくない場合には、データから最適な ESS の値を求めることが必要であることを述べた。データから最適な ESS の値を求める手法として、一般的に用いられている Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) [6] が提案した ESS の値を 1 から 100 まで 1.0 ずつ変化させながら BDeu スコアを最大化する ESS を見つけるという経験ベイズ手法と Steck (2008)[7] が提案した周辺尤度を最大化する ESS の値を近似計算により解析的に求める経験ベイズ手法について述べた。

第4章では、Ueno (2010) [5] により数学的に示されているように、データ数が十分に大きい場合に BDeu の ESS の値は 1.0 が最適であるということを確認するための実験の結果を述べ、さらに、第3章の Silander, Kontakanen and Myllymäki (2007) の手法や Steck (2008) の手法は、BDeu スコアを最大化する ESS の値が予測効率を最大化することを仮定して ESS の値を求める手法であるが、構造学習の評価実験の結果から、予測効率を最大化する ESS の値を求めることができていないことを実証的に示した。

第5章では、ESS の数学的な最適化は困難であると考え、経験的に交差検証を用いて決定する手法を提案した。ベイジアンネットワークの構造学習における交差検証を用いた ESS の決定法では、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がどれほど適切な構造であるかを測ることが必要である。Ueno (2008) [9] では、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造を真のネットワーク構造と比較して誤りの個数を最小化する ESS の値を選択する手法が提案されているが、現実には真のネットワーク構造は未知であるため真のネットワーク構造と比較することはできない。また、トレーニングデータとテストデータからそれぞれ学習されたネットワーク構造同士を比較して、誤りの個数を最小化する ESS の値を選択する手法も考えられるが、Ueno (2010) [5] で示されているように、ESS の値を大きくしていくと、学習されるネットワーク構造は漸近的に完全グラフに近づき、ESS の値を小さくしていくと、学習されるネットワーク構造は漸近的に空グラフに近づくため、このような交差検証により決定する ESS の値では、真の構造を学習することはできないことが確認されている。そのため、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がどれほど適切な構造であるかをテストデータに対する予測精度として考え、条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる手法と Predictive Likelihood を用いる手法、生成データのテストデータとの一致回数を用いる手法、マルコフブランケットを用いたテストデータの条件付き尤度を用いる手法の四つを提案した。

第6章では、本研究で提案した交差検証を用いる手法と従来手法が、ベイジアンネットワークの構造学習において、どのような学習精度の違いがあるかを実験により確認した。

実験の結果、様々な条件を変えて最適値を得ることができる手法は残念ながら明らかにされなかった。しかしながら、データ数が小さいときに、従来から一般的に用いられてきた経験ベイズ手法が最適値を保証しないことを示したことは意義深い。

## 7.2 今後の課題

以下の点が今後の研究の課題である。

- 条件付き Kullback-Leibler 情報量を用いる手法を提案したが、条件付き Kullback-Leibler 情報量は対称性を持たないため、トレーニングデータから学習されたネットワーク構造がテストデータの確率構造とどれほど近いかを考える上では、条件付き Jensen-Shannon 情報量がより適していると考えられる。そのため、条件付き Jensen-Shannon 情報量を用いた手法について同様の実験を行い、手法の特性について考察する。
- 今回は交差検証を用いた提案手法では、変数数の大きいネットワークに対しての実験を行うことができなかった。そのため、同様の実験をより変数数の大きいネットワーク構造を含めた多様なネットワーク構造に対して行い、各手法の特性を考察する。
- 交差検証を用いた各手法により最適化することができなかった原因の詳細なメカニズムは、ベイジアンネットワークの構造学習が複雑であるため、調べることができなかつたため、多様なネットワーク構造に対する実験を行った結果から明らかにする。
- 交差検証を用いた手法により最適化することができなかつた原因の詳細なメカニズムが明らかになった場合、BDeu スコアを最大化する ESS の値を求める経験ベイズ手法より、学習精度の高い手法を提案する。

# 謝辞

本研究の遂行にあたって、終始ご指導、ご助言を賜りました植野真臣教授、宇都雅輝助教授に深く感謝いたします。また、修士研究の方向性について助言をして頂いた川野秀一准教授に感謝いたします。そして、本研究に関して積極的に議論し、本論文の執筆に関して助言や指摘をして頂いた、植野研究室、川野研究室の皆様に感謝いたします。

# 参考文献

- [1] 植野真臣, ベイジアンネットワーク, コロナ社, 2013.
- [2] Heckerman, D., Geiger, D., and Chickering, D. M.: "Learning Bayesian Networks: The Combination of Knowledge and Statistical Data", *Machine Learning*, vol. 20, no. 3, pp. 197-243 (1995)
- [3] Buntine, W.: "Theory Refinement on Bayesian Networks", *Proc. 7th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 52-60 (1991)
- [4] Steck, H., Jaakkola, T. S.: "On the Dirichlet Prior and Bayesian Regularization", *Advances in Neural Information Processing Systems 15*, pp. 697-704 (2002)
- [5] Ueno, M.: "Learning networks determined by the ratio of prior and data", *Proc. 26th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 598-605 (2010)
- [6] Silander, T., Kontakanen, P., and Myllymäki, P.: "On sensitivity of the MAP Bayesian network structure to the equivalent sample size parameter", *Proc. 23rd Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 360-367 (2007)
- [7] Steck, H.: "Learning the Bayesian Network Structure: Dirichlet Prior versus Data", *Proc. 24th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 511-518 (2008)
- [8] Akaike, H.: "A new look at the statistical model identification", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **19**(6), pp. 716-723 (1974)
- [9] Ueno, M.: "Learning likelihood-equivalence Bayesian networks using an empirical Bayesian approach", *Behaviormetrika*, Vol.35, No.2, pp. 115-135 (2008)
- [10] Malone, B., Järvisalo, M., and Myllymäki, P.: "Impact of Learning Strategies on the Quality of Bayesian Networks: An Empirical Evaluation", *Proc. 31st Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 562-571 (2015)

- [11] Silander, T., and Myllymäki, P.: "A simple approach for finding the globally optimal Bayesian network structure", *Proc. 22nd Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 445-452 (2006)
- [12] Akaike, H.: "Information Theory and an extension of the maximum likelihood principle", *2nd International Symposium on Information Theory*, pp. 267-281 (1973)
- [13] Tsamardinos, I., Brown, L. E., and Aliferis, C. F.: "The max-min hill-climbing Bayesian network structure learning algorithm", *Machine learning*, **65**(1), pp. 31-78 (2006)
- [14] Pearl, J.: Bayesian Networks: a Model of Self-Activated Memory for Evidential Reasoning, *Proc. 7th Conf. Cognitive Science Society*, pp. 329-334 (1985)
- [15] Pearl, J.: *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA (1988)
- [16] Chickering, D. M., and Heckerman, D.: "A comparison of scientific and engineering criteria for Bayesian model selection", *Statistics and Computing*, **10**(1), pp. 55-62 (2000)
- [17] Ueno, M.: "Robust learning Bayesian networks for prior belief", *Proc. 27th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 698-707 (2011)
- [18] Ueno, M. and Uto M.: "Non-informative Dirichlet score for learning Bayesian networks", *Proc. 6th European Workshop on Probabilistic Graphical Models*, pp. 331-338 (2012)
- [19] R. Kohavi: "A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection", *Proc. 7th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 1137–1143 (1995)
- [20] J. Tian and R. He and L. Ram: "Bayesian Model Averaging Using the k-best Bayesian Network Structures", *Proc. 26th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 589-597 (2010)
- [21] 大川 淳史, 植野真臣, 経験的 BDeu の最適化によるベイジアン・ネットワークの学習, 第 23 回人工知能学会全国大会論文集, 2009

- [22] M. Koivisto and K. Sood: "Exact Bayesian structure discovery in Bayesian networks", *Journal of Machine Learning Research*, **5**, pp. 549-573 (2004)
- [23] Charniak, E.: "Bayesian Network without Tears", *AI magazine*, winter, pp. 60-63 (1991)
- [24] Cooper, G. F. and Herskovits, E: "A Bayesian Methods for the induction of probabilistic networks from data", *Machine Learning*, **9**, pp. 309-347 (1992)
- [25] Suzuki, J: "A Construction of Bayesian networks from Databases on an MDL Principle", *Proc. 9th Conf. Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 266-273 (1993)