14.　同値関係

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

１．本日の目標

① 整数の合同
② 剰余類
③ 同値関係
④ 反射律
⑤ 対称律
⑥ 推移律
⑦ 同値類

１．関係（二項関係）

再掲５章：

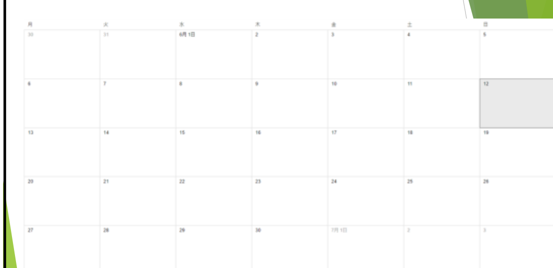
Def 1.
二つの集合U,Vの直積集合$U\times V$の部分集合Rを
UからVへの「（二項）関係」という.

また，$R\ni(a,b)$のとき　aRb ：aとbは関係ある
　　$R\not\ni(a,b)$のとき　$a\not R b$ ：aとbは関係なし
と書く.

2. 同値関係のイメージ

二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

例：カレンダーの同値



例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとbが同じ曜日である関係を定式化せよ。

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとb が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^+$について

aRb ：$\exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$

例：カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。

a, bをある月の日とする。

aとb が同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]

$a, b \in \mathbb{Z}^+$について

aRb ：$\exists m \in \mathbb{Z}[a - b = 7m]$

このような関係を「 aとbが7を法として合同である」と呼ぶ。

3.整数の合同

整数の周期的な分類において同じ分類に入るもの。

離散数学の応用では、最も重要な概念の一つ。

3. 整数の合同

Def 1. 合同な整数

$m, n, p \in \mathbb{Z}$について

$$\exists q \in \mathbb{Z}[(m - n) = pq]$$

のとき，「 mとn はpを法として合同である」といい，

$$m \equiv_p n$$

と書く。$\equiv_p$が合同関係を示す演算子。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。 ○
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。 ○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。 ○
5. 121と110は3を法として合同である。 ×

4. 整数の剰余類

Def 2.整数の剰余類

pを法とするnの剰余類とは， $n \in \mathbb{Z}$について

$[n]_p = \{m \in \mathbb{Z} | \exists q \in \mathbb{Z}[(m-n) = pq]\}$

と定義される。

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1$
(2) $[3]_2$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

19

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

20

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

21

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$
(4) $[1]_{10}$

22

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。

(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$
(4) $[1]_{10} = \{\cdots, -9, 1, 11, 21, \cdots\}$

23

ここまでのまとめ

- 整数の合同とは、ある周期で同じ分類ができること
- 同値関係は、その一般化。
- 二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは同一視できるという関係

↓

次に数学的に同値関係を定義する。

24

5. 同値関係

Def 3.
U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

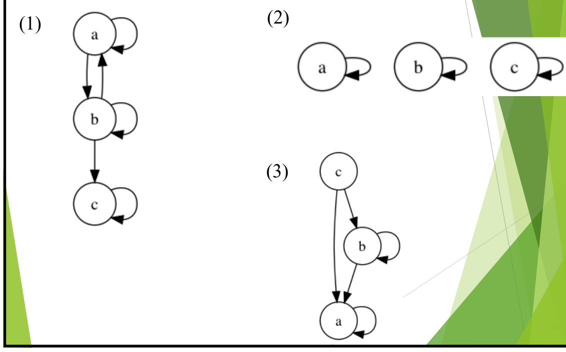
(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

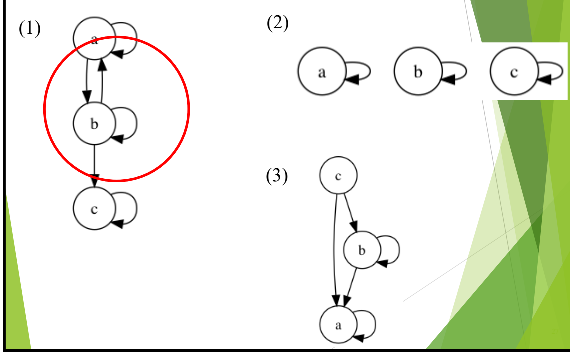
(3) 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R)を同値集合と呼ぶ。

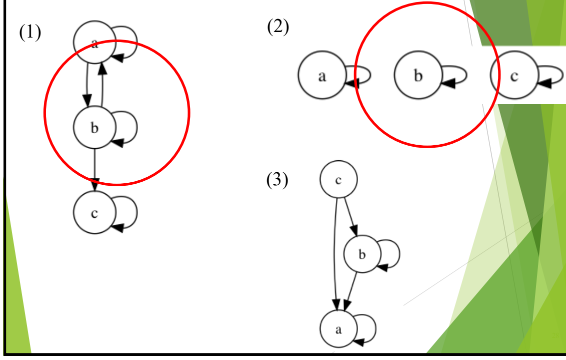
問1　反射性を満たすものは



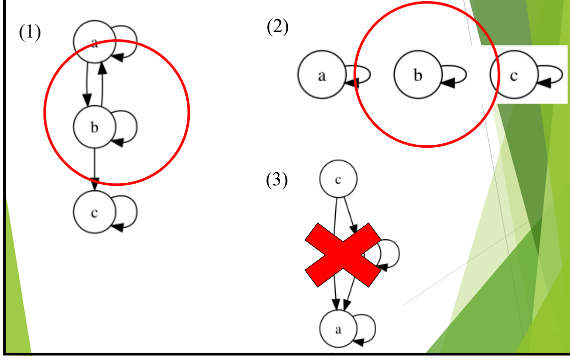
問1　反射性を満たすものは



問1　反射性を満たすものは



問1　反射性を満たすものは



問２　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問２　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問２　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問２　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

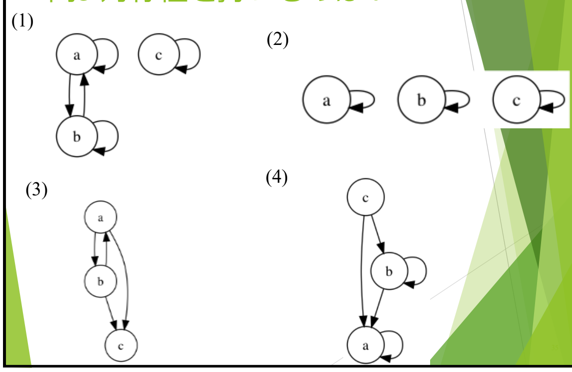
(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問２　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

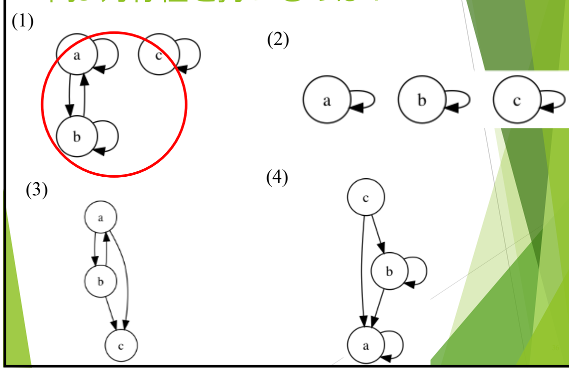
(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

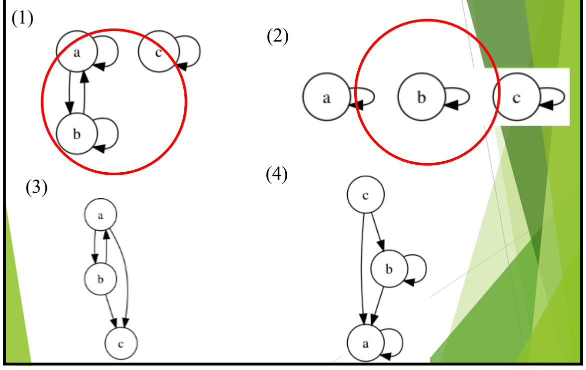
問3 対称性を持つものは？



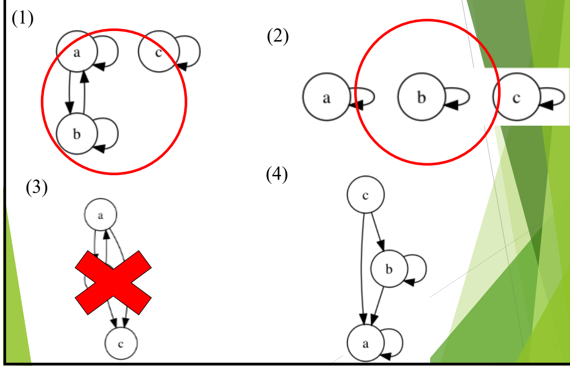
問3 対称性を持つものは？



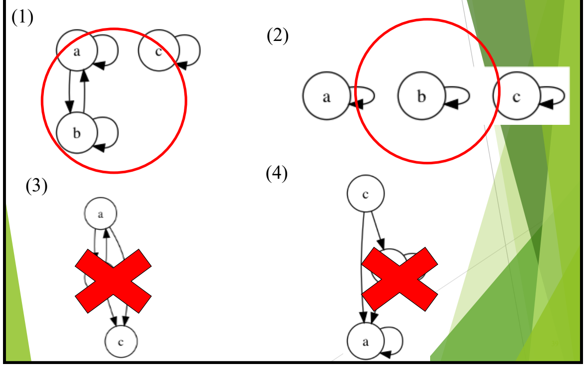
問3 対称性を持つものは？



問3 対称性を持つものは？



問3 対称性を持つものは？



問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

40

問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

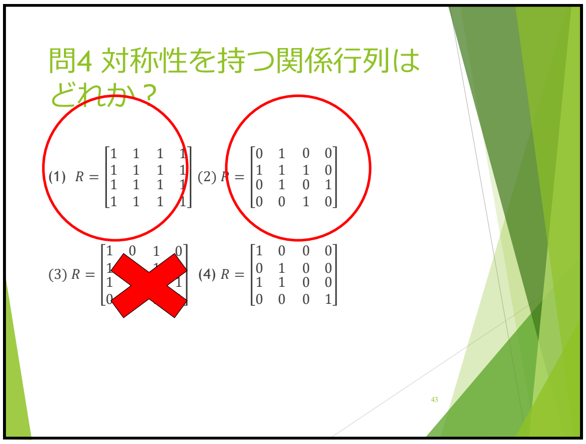
41

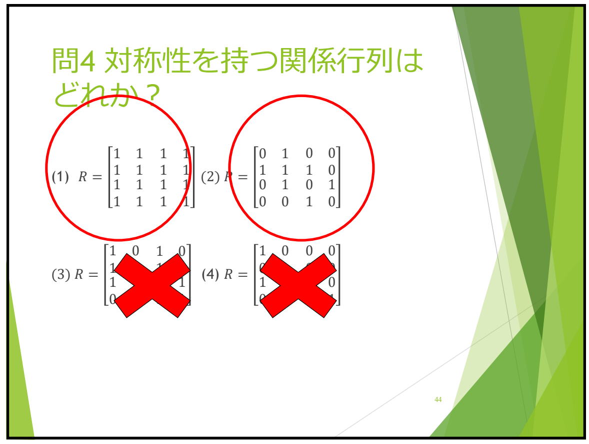
問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

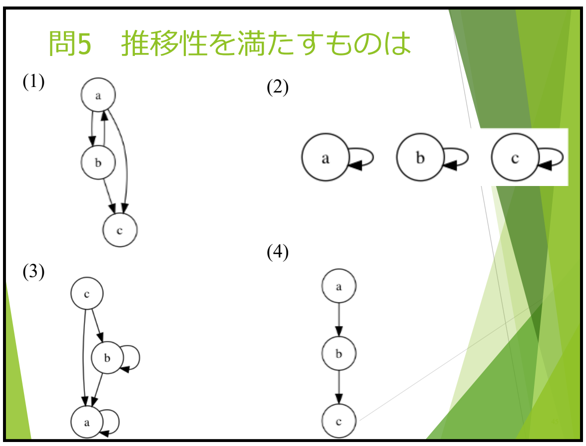
(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

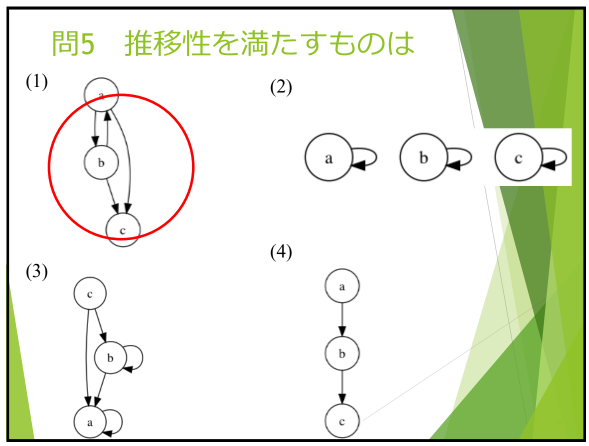
(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

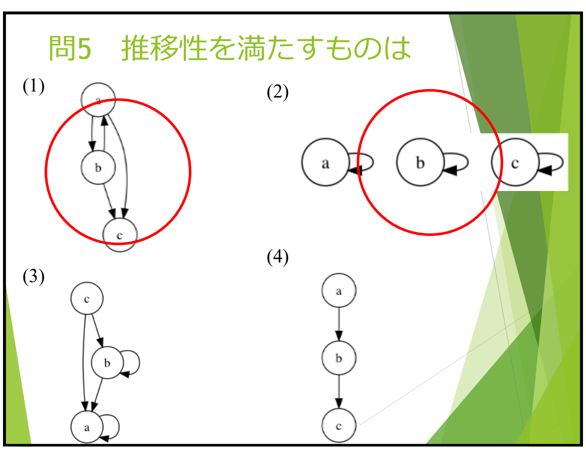
42

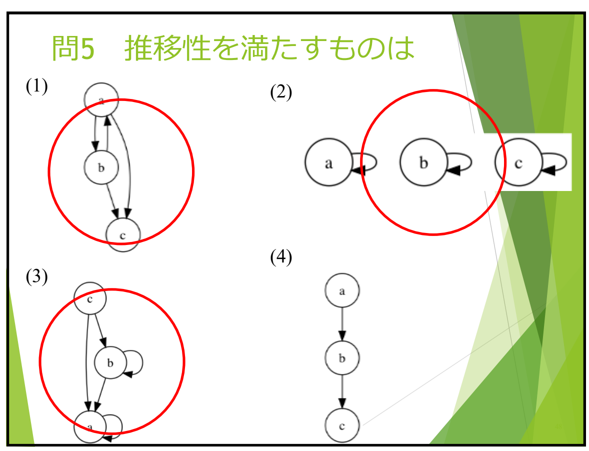

問4 対称性を持つ関係行列はどれか？
(1) R =
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
(2) R =
0 1 0 0
1 1 1 0
0 1 0 1
0 0 1 0
(3) R =
(4) R =
1 0 0 0
0 1 0 0
1 1 0 0
0 0 0 1


問4 対称性を持つ関係行列はどれか？
(1) R =
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
1 1 1 1
(2) R =
0 1 0 0
1 1 1 0
0 1 0 1
0 0 1 0
(3) R =
(4) R =

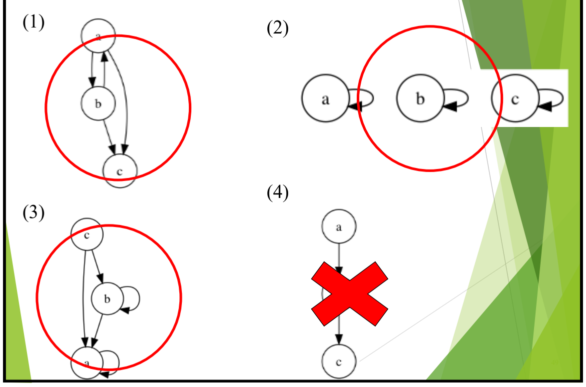

問5　推移性を満たすものは
(1)
(2)
(3)
(4)
a
b
c


問5　推移性を満たすものは
(1)
(2)
(3)
(4)
a
b
c


問5　推移性を満たすものは
(1)
(2)
(3)
(4)
a
b
c


問5　推移性を満たすものは
(1)
(2)
(3)
(4)
a
b
c

問5　推移性を満たすものは



Def 4　分割

集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \land X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists X \in C,$ s.t., $x \in X$

を満たすCをいう.

例.

$U = \{a, b, c, d, e, f\}$のとき, $C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$は集合$U$の分割

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,
xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.
このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,
xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.
このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明]　（1）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,
xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.
このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明]　（1）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

例題 1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,
xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する.
このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明]　（1）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

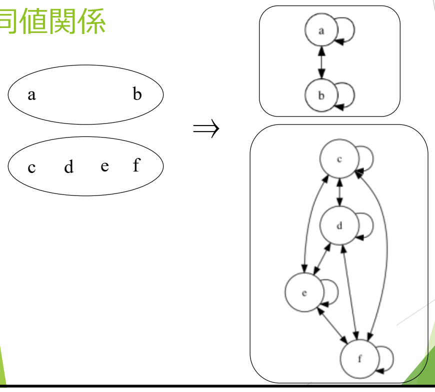
xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

(3) 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

$xRy \land yRz$より, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.従って,

(1)-(3)より, xRzは同値関係　■

分割された同グループ要素⇒同値関係



例題2

$a, b \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n, \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b)=nm]$

のとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

56

例題2

$a, b \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n, \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b)=nm]$

のとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律： $a-a=0$は$0=nm$より，$a \sim a$

対称律： $a-b=nm$より， $b-a=(-1)nm$

従って、 $a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： $a-b=nm, b-c=nm'$，$m' \in \mathbb{Z}$のとき，

$a-c=nm+nm'=n(m+m'), m+m' \in \mathbb{Z}$

これらより， ~は同値関係 ■

57

例題3

Aを三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

58

例題3

Aを三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：aとaは合同なので，$a \sim a$

対称律：aとbが合同のとき， bとaも合同。

従って、$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律： aとb， bとcがそれぞれ合同のとき，aとcも合同。これらより， ~は同値関係 ■

59

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき， ~は同値関係であることを証明せよ。

60

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき，~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：すべての頂点は自分に有向辺を持っているので$a \sim a$

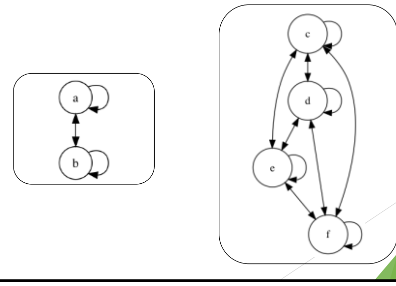
対称律：aからbに経路があり，bからaにも経路があるので　$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律：$a \sim b$かつ$b \sim c$のとき，aからcにも経路があるので$a \sim c$

これらより，~は同値関係　■

補足

この同値関係による頂点のグループ分け（お互いに行き来可能な頂点集合）をグラフの強連結成分分解という。



例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

[証明]

反射律：$f(x) = f(x)$なので$x \sim x$

対称律：$f(x_1) = f(x_2)$ならば$f(x_2) = f(x_1)$

$x_1 \sim x_2 \rightarrow x_2 \sim x_1$

推移律：$x_1 \sim x_2$かつ$x_2 \sim x_3$のとき，$f(x_1) = f(x_2)$かつ$f(x_2) = f(x_3)$。このとき，$f(x_1) = f(x_3)$より　$x_1 \sim x_3$

これらより，~は同値関係　■

6．同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1)　$x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2)　「$x \in P \wedge xRz$」$\rightarrow z \in P$

を満たすとき，Pを~に関する**同値類**という。

6．同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1)　$x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2)　「$x \in P \wedge xRz$」$\rightarrow z \in P$

を満たすとき，Pを~に関する**同値類**という。

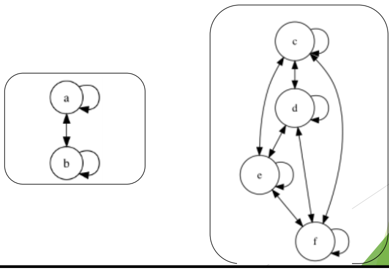
各同値類に属する各要素をその同値類の**代表元**と呼ぶ. ~で関係づけられた代表元aの同値関係の要素をすべて集めた集合を**aの同値類**と呼び，$[a]_R$と書く。 同値類の集合は$\{[a]_R \mid a \in U\}$であり、**商集合**と呼ばれ，

U/R と書く。

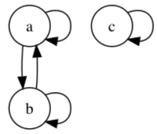
例　$U = \{a, b, c, d, e, f\}$の同値類と商集合

同値類　$[a]_R = \{a, b\}$, $[b]_R = \{a, b\}$, $[c]_R = \{c, d, e, f\}$, $[d]_R = \{c, d, e, f\}$, $[e]_R = \{c, d, e, f\}$, $[f]_R = \{c, d, e, f\}$

商集合$U / R = \{[a]_R \mid a \in U\} = \{\{a, b\}, \{c, d, e, f\}\}$

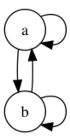


例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，同値関係$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V / {\sim}$を求めよ。

例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，同値関係$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V / {\sim}$を求めよ。

[解答]
商集合$V/{\sim} = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
注意　要素が一つでも同値類になる

例題2

写像$f: U \mapsto U; f(x)$,　$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
とする。 $U = \{a, b, c, d\}$のU上の同値関係
$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$
のとき，　~の商集合$U / {\sim}$を求めよ。

例題2

写像$f: U \mapsto U; f(x)$,　$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
とする。 $U = \{a, b, c, d\}$のU上の同値関係
$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$
のとき，　~の商集合$U / {\sim}$を求めよ。
[解答]
$U/{\sim} = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ。

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

定義に帰れ！！

商集合$U\ /\ R$が分割の定義

「集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists\, X \in C,$ **s.t.**$,\ x \in X$

を満たすCをいう.」

を満たしていることを順に証明していく.

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$を証明する.

商集合の定義より,$X \in U/R, s.t, \exists a \in U,$

$X = [a]_R$. 同値類の定義より, $[a]_R \subseteq U$.

よって　$X \subseteq U$.

同値関係の反射性より, aRa.従って$[a]_R \neq \emptyset$.

したがって, $X \neq \emptyset$.

よって　$\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(2) $\forall X, Y \in U\ /\ R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ を証明する.

$X, Y \in U\ /\ R$と仮定する.

$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ の対偶$X \cap Y \neq \emptyset \longrightarrow X = Y$を証明する.

$X \cap Y \neq \emptyset$を仮定する.商集合の定義より,$X \in U/R, s.t,$

$\exists a \in U, X = [a]_R, Y \in U/R, s.t, \exists a' \in U, Y = [a']_R$.

$X \cap Y \neq \emptyset$より, $\exists a'' \in U, s.t.\ a'' \in X \wedge a'' \in Y$.

すなわち, $a'' \in [a]_R$かつ$a'' \in [a']_R$.同値類の定義より,

$a''Ra$かつ$a''Ra'$.同値関係の対称性より, aRa''.

aRa''と$a''Ra'$と同値関係の推移性からaRa'.これより

$[a]_R = [a']_R$.

従って, $X = Y$. 以上より$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(3)$\forall x \in U, \exists\, X \in U\ /\ R,$ **s.t.**$,\ x \in X$を証明する.

$x \in U$を仮定する.

反射性から,　xRx.

同値類の定義より,　$x \in [x]_R$.

従って,　$\exists\, X \in U\ /\ R,$ **s.t.**$,\ x \in X$.

例題3

商集合$U\ /\ R$はUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$

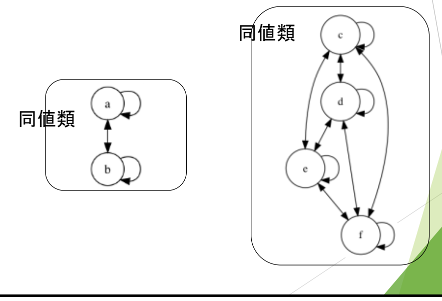
(2) $\forall X, Y \in U\ /\ R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

(3) $\forall x \in U, \exists\, X \in U\ /\ R,$ **s.t.**$,\ x \in X$

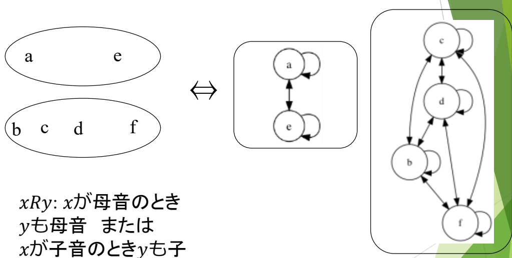
より,

商集合$U\ /\ R$はUの分割である.　■

商集合のことを同値分割ともいう



つまり同値関係⇔あるルール（関係、もしくは２変数述語＝２変数条件）によって分割された同グループ要素

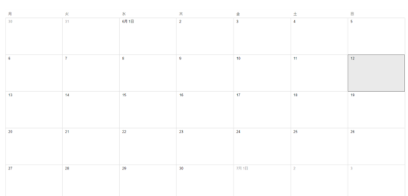


xRy: xが母音のとき yも母音　または xが子音のときyも子音.

同値類

- 同値類⇔あるルール（関係、もしくは２変数述語＝２変数条件）によって余すところなく、　背反に分割されたグループ
- 同値関係とは、すべての要素を背反にグループ化するための２変数述語（＝２変数条件）．

再掲：カレンダーとは7を法とした同値類（同値分割）



6.　まとめ

① 整数の合同
② 剰余類
③ 同値関係
④ 反射律
⑤ 対称律
⑥ 推移律
⑦ 同値類

演習問題

問題1

$\mathbb{Z}$上の関係

$a \sim b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

は同値関係であることを証明せよ。

問題2

$\mathbb{Z}$上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (a+b) = 2k$$

は同値関係であることを証明せよ。

85

問題3

M_nを$n \times n$行列全体の集合とする。
$A, B \in M_n$に対して，
$A \sim B \Leftrightarrow$ある正則行列Pが存在して
$B = P^{-1}AP$とするとき，　$\sim$が同値関係
であることを証明せよ。

86

問題4

任意の集合A, Bと任意の関数$f: A \to B$を考える．A上の関係：
任意の$x, y \in A$に対して，$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$とする．このとき，
$\sim$が同値関係となることを証明せよ．

87

問題5

$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2, (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 + y_2 = x_2 + y_1)$
のとき，$\sim$
が同値関係となることを証明せよ．

88