

1. 命題と証明

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学プログラム

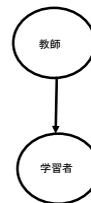
サイエンスを学校で学ぶ理由

学校でサイエンスを学ぶ主な理由は、サイエンスの知識を学ぶことではない。科学的方法を学ぶことである。正しい世の中をつくるために、真摯な科学者の態度や真実を探求するモチベーション、事実から真実を見つけ出す方法、正しいことを正しいといえる勇氣、たとえ他のすべての人が間違えていても、正しいことを証明して説得できる力、論理能力とだまされない能力、など

教育学での「教育」の定義

▶教育とは「児童生徒の発達を促すすべての試み」

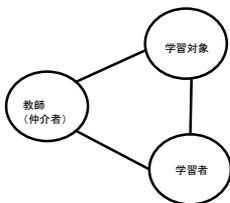
高校までの教育のモデル



「発達」=知識の量
発達 → 線形的

大学からの教育のモデル

発達=学び方の変化



教師は対象の理解の仕方、問題解決の仕方、問題発見の仕方、興味、動機を持ち方などの学習者にとってのモデルでもあり、援助者でもある

知識、情動面、状況が切り離せない

離散数学とは

【離散】りさん

1.1. 《名・ス自》
ちりぢりになること。
「一家離散」

2.2. 数学
《名》
本来的にとびとびの値を取ること。
「離散的」

離散数学(りさんすうがく、英語: discrete mathematics)とは、原則として離散的な(言い換えると連続でない、とびとびの)対象を扱う数学のことである。

本授業「離散数学」の大局的目標

数学リテラシーをつけること

誤った論理を見破ったり、うその証明を見抜けること
コンピュータサイエンスにおける基礎を身に付けること

具体的目標

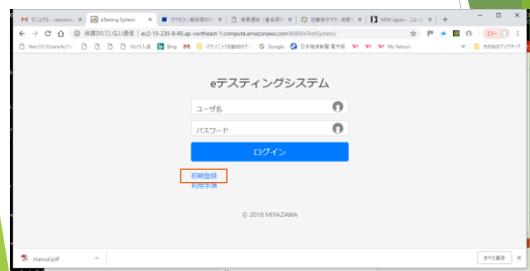
- ▶ 1 数学における基本的な用語 (命題, 述語, 集合, 論理, 写像, 関係, グラフ) を正しく使うことができる
- ▶ 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる
- ▶ 3 述語, 集合, 論理, 写像, 関係, グラフの関係を理解する

本授業の進め方

- ▶ 講義
 - ▶ 授業は主にスライドで進めます。
 - ▶ 授業スライドは <http://www.ai.lab.uec.ac.jp/%E9%9B%A2%E6%95%A3%E6%95%B0%E5%AD%A6> にPDFでおります。ダウンロードして使ってください。
 - ▶ 時間が余ったら演習問題に取り組んでください
 - ▶ 授業終了後 演習問題は <http://ec2-13-230-8-85.ap-northeast-1.compute.amazonaws.com:8080/eTestSystem> の学習システムに用意しています。ヒントや解答も出ます。その週内にやってください。
 - ▶ 成績 2回のテスト $\times 0.9$ + 演習システムにおける学習 $\times 0.1$
演習問題は学習数、学習時間で点数が決まります。間違えても時間をかけて理解するまで学習している人が高い点数になります。
- オフィスアワー 授業終了後 質問など

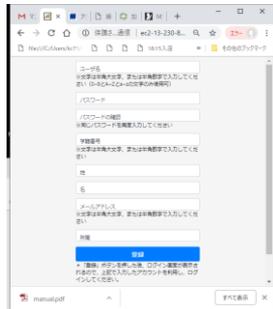
演習システム

▶ システムへの登録



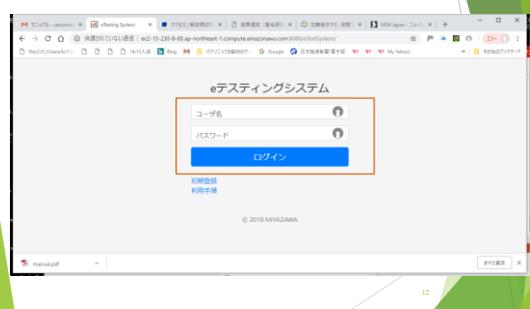
演習システム

▶ システムへの登録



演習システム

▶ ログイン : ユーザー名とパスワード入力



本日の目標

- ▶ 1. 本授業のねらい
- ▶ 2. 離散数学とは何か？
- ▶ 3. 証明とは何か？
- ▶ 4. 命題とは何か？
- ▶ 5. 公理とは何か？

1. 証明とは？

- ▶ 「証明」は、真理(Truth)を立証するための手法である。

証明の方法は分野によって異なる。

- ▶ 法的真理は、法廷で示される証拠と法律、陪審員、裁判官によって決定される。
- ▶ 科学的真理は、実験によって確認される。
- ▶ 哲学的真理は、厳密な論証の積み重ねによって導かれる。
- ▶ 宗教的真理は、歴史的な宗教のコミュニティにより決定される。
- ▶ 組織的真理は、権威により決定づけられる。

数学での証明の定義

- ▶ Def
- ▶ 「証明」とは 基礎的公理(Axiom)集合から命題(Proposition)を導く論理的推論(Logical Deduction)の連鎖である。

注意)

Def = Definition, 定義のこと

三平方の定理

$$a^2 + b^2 = c^2$$

よく知ってます！！

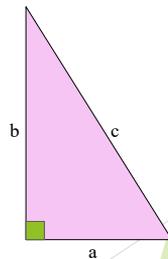


図1.

証明

図1の三角形を図2のように4つ並べる。外側に一辺が $a+b$ の正方形(以下「大正方形」)が、内側に一辺が c の正方形(以下「小正方形」)ができる。
(大正方形の面積)=(小正方形の面積)+(直角三角形の面積) \times 4
大正方形の面積は $(a+b)^2$, 小正方形の面積は c^2 , 直角三角形4個の面積の合計は $ab/2 \times 4=2ab$
これらを代入すると $(a+b)^2=c^2+2ab$
従って、 $a^2+b^2=c^2$

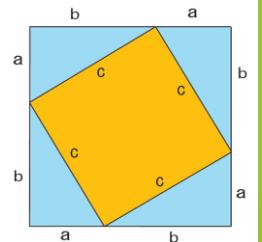


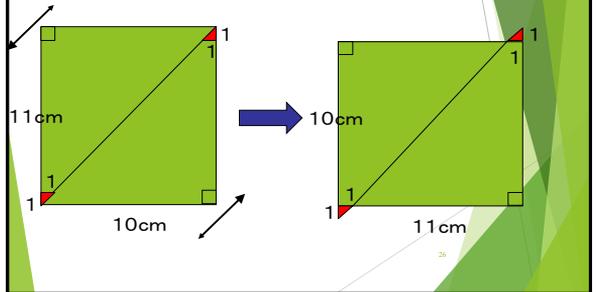
図2

注) ■ は証明の完了を示す

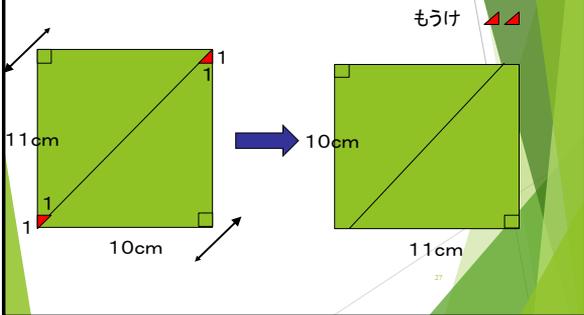
三平方の定理

- ▶ 最もよく知られている証明の一つ。
- ▶ これ以外にも100種以上の証明が知られている。

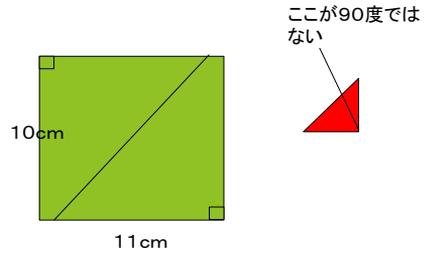
紙を無限に生成しつづける方法



紙を無限に生成しつづける方法



どこが間違い？



$1 = -1$?

- ▶ $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$
- ▶ $= (\sqrt{-1})^2$
- ▶ $= -1$

Bertrand Russell (1872 - 1970)

再掲 : 証明の定義

- ▶ Def
- ▶ 「証明」とは 基礎的公理(Axiom) 集合から命題(Proposition)を導く論理的推論 (Logical Deduction)の連鎖である。

2. 命題(Proposition)

- ▶ Def
- ▶ 命題 (Proposition)とは、真か偽か判断できる記述

31

次の記述は命題か？

- ▶ $1 + 1 = 2$
- ▶ $2 + 3 = 6$
- ▶ 調布市は東京ではない
- ▶ 和田アキ子は男である
- ▶ ダウンタウン松本人志はすごい！！
- ▶ びっくりした！！
- ▶ このレストランのステーキはおいしい！！
- ▶ 犬は動物である
- ▶ $x^2 - 1 = 0$

32

3. 公理

- ▶ Def 公理とは証明された真の命題のこと
- ▶ 公理の種類
 1. 定理 (Theorem) 非常に重要な命題
 2. 補題(Lemma) 重要な命題を証明するために必要な公理の証明
 3. 系(corollary) すでに証明されている定理から容易に証明できる命題

33

4. 高校での証明と大学での証明

- ▶ 次の命題は偽であることを証明せよ。
- ▶ 「すべての実数 x について
 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 」

嘉田勝 (数学セミナー2009年5月号)

34

高校での解答

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ だから、 $2 < x < 3$ のとき、 $x^2 - 5x + 6 < 0$ が成り立つ。
したがって、「すべての実数 x について
 $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 」
は偽である。

35

大学では 間違い

「すべての実数について \sim が成り立つ」
の否定の証明はどのようにすればよいか？

36

大学では 間違い

「すべての実数について、 \sim が成り立つ」の否定の証明はどのようにすればよいか？



「ある実数 x について \sim が成り立たない」ことを示せばよい。

▶ ロジカル！！

37

大学での証明

実数 $x = \frac{5}{2}$ について、 $x^2 - 5x + 6 = -\frac{1}{4}$ より

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ を満たさない実数 $x = \frac{5}{2}$ が存在する。

したがって、「すべての実数 x について $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ 」

は偽である。 ■

38

高校生と大学生の差

- ◆ 高校生は計算結果をずらずら書けば点数がもらえる。
- ◆ 大学生は、本当に命題を証明しないと正解にならない。
- ◆ 高校生は自分の思考の順に証明をずらずら書く。
- ◆ 大学生は説得するための順序をまず考える。

高校や大学入試での数学で覚えた「自分が考えた過程を書く」という方法を改めて、「読み手を説得するために書く」という姿勢に転換することが重要 嘉田勝 (数学セミナー2009年5月号)

39

証明法のパターン (7-8回目)

- ① 全称命題の証明
- ② 存在命題の証明
- ③ 背理法による証明
- ④ 含意「ならば」型命題の証明
- ⑤ 場合分けによる証明
- ⑥ 含意命題の否定の証明
- ⑦ 集合包含関係の証明
- ⑧ 複数量子子の命題の証明

40

4. 本日のまとめ

- ▶ 1. 本授業のねらい
- ▶ 2. 離散数学とは何か？
- ▶ 3. 証明の定義
- ▶ 4. 命題の定義
- ▶ 5. 公理

41

演習問題

42

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(a)

$$1/8 > 1/4$$

証明

$$\begin{aligned} 3 &> 2 \\ 3 \log_{10}(1/2) &> 2 \log_{10}(1/2) \\ \log_{10}(1/2)^3 &> \log_{10}(1/2)^2 \\ (1/2)^3 &> (1/2)^2 \\ 1/8 &> 1/4 \end{aligned}$$

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(b) 100¢ = 1\$ である。しかし、以下が成り立つ。

$$1 \text{ ¢} = 1 \text{ \$}$$

証明

$$1 \text{ ¢} = 0.01 \text{ \$} = (0.1 \text{ ¢})^2 = (10 \text{ ¢})^2 = 100 \text{ ¢} = 1 \text{ \$}$$

問題1 以下の証明はどこがおかしいか？

(c) aとbは二つの等しい実数である。そうであればa=0である。

証明

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a - b)(a + b) &= (a - b)b \\ a + b &= b \\ a &= 0 \end{aligned}$$

問題2

算術平均と幾何平均の間には任意の $a, b \geq 0$ について以下の性質がある。

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

以下の証明のどこが間違いか？

証明 $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \text{ より} \\ a^2 + 2ab + b^2 &\geq 4ab \text{ より} \\ a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \text{ より} \\ (a - b)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

仮定から導かれた $(a - b)^2 \geq 0$ は真である。
従って命題は真である。

問題3. 三囚人問題

ある監獄にアラン、バーナード、チャールズという3人の囚人がいて、それぞれ独房に入れられている。3人は近く処刑される予定になっていたが、恩赦が出て3人のうち1人だけ釈放されることになったという。誰が恩赦になるかは明かされておらず、それぞれの囚人が「私は釈放されるのか？」と聞いても看守は答えない。囚人アランは一計を案じ、看守に向かって「私以外の2人のうち少なくとも1人は死刑になるはずだ。その者の名前が知りたい。私のことじゃないんだから教えてくれてもよいだろう？」と頼んだ。すると看守は「バーナードは死刑になる」と教えてくれた。それを聞いたアランは「これで釈放される確率が1/3から1/2に上がった」とひそかに喜んだ。果たしてアランが喜んだのは正しいのか？

問題4 次のうち命題はどれか？

- (1) 坂本龍馬は土佐の人であった。
- (2) 地球外の天体に生命が存在するかもしれない。
- (3) $f(x) = x^2 + x - 2$ とすると $f(2) = 0$
- (4) アインシュタインはかっこいい。
- (5) $n \geq 3$ の整数のとき、 $a^n + b^n = c^n$ を満たす実数 (a, b, c) は存在しない。
- (6) $100000 \neq 100001$
- (7) $100000 \doteq 100001$