13.　写像と関係

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

10月 8日：第1回 命題と証明
10月 15日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
10月22日：第3回 命題論理
10月29日：第4回 述語論理
11月 5日：第5回 述語と集合
11月12日：第6回 直積と冪集合
11月19日：第7回 様々な証明法 (1)
12月 3日：第8回 様々な証明法 (2)
12月10日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
12月17日：第10回 中間試験
1月 7日：第11回 写像（関数） (1)
1月21日：第12回 写像 (関数) (2)
1月28日：第13回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
2月 4日：第14回 同値関係
2月 6日：第15回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
2月 18日：第16回 期末試験（補講があればずれていきます。）

1．本日の目標

① 関係（二項関係）
② 写像と関係
③ グラフによる表現
④ 関係行列
⑤ 有向グラフと無向グラフ
⑥ 隣接集合と隣接行列
⑦ 木、完全グラフ、クリーク

1．関係（二項関係）

再掲５章：

Def 1.
二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合Rを
UからVへの「（二項）関係」という．

また，$R \ni (a, b)$のとき　aRb ：aとbは関係ある
　　$R \not\ni (a, b)$のとき　$a\not{R}b$ ：aとbは関係なし
と書く．

4

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$
のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\}$$
$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$
$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$
$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$
$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

5

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$
のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$$R = \{(a, S)\} \quad ○$$
$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$$
$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$
$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$
$$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$$

6

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$R = \{(a, S)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$ ×

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$

$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$

$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$

7

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$R = \{(a, S)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$ ×

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$

$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$

8

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$R = \{(a, S)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$ ×

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$

9

例題

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの関係Rは以下のうちどれか？

$R = \{(a, S)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (S, T)\}$ ×

$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$ ◯

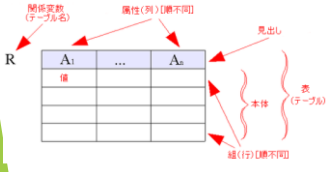
$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$ ◯

$R = \{(a, S), (b, c), (b, T), (d, S)\}$ ×

参考：データベースとn項関係

データベース理論における関係モデルでは，関係の概念を n 項に拡張している．

すなわち，$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$の部分集合として定義される．関係モデルの基礎的な要素は定義域、 instance ドメインである．



11

2. 関係の述語による内包的記述による定義

Def2.

自由変数$(a, b) \in U \times V$についての**2変数述語**

$P(a, b): R \ni (a, b)$ の真理集合

$$\{(a, b) | P(a, b)\}$$

または

aRbの**真理集合** $\{(a, b) | aRb\}$

をUからVへの「関係」，もしくは「二項関係」という．

12

3．関係による写像の定義

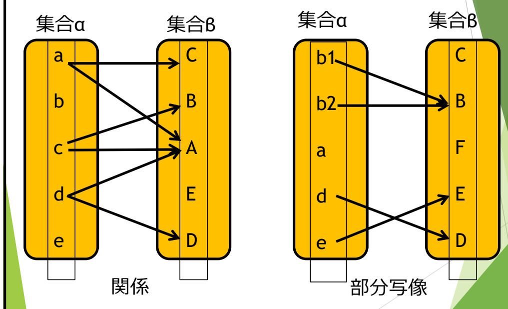
Def 3.
自由変数$(a,b) \in U \times V$についての述語aRbが各aに対して一つのbが対応するとき，

$$\{(a,b)|aRb\}$$

をUからVへの「写像」と呼ぶ.
写像の中で対応するbがないaを許す場合，UからVへの「部分写像」と呼ぶ.
写像は、関係の特殊なケース.

13

「関係」の図示表現（関係を→で示す）



例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x$		
(2)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$		
(3)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

16

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$		
(3)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

17

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$		
(4)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

18

例題

以下は関係か？関係の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y > x$		
(5)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

19

例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

		関係	写像
(1)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数		

20

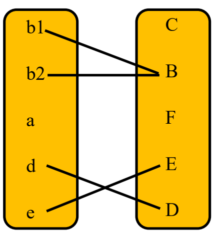
例題

以下は関係か？関係
の場合，部分写像か？

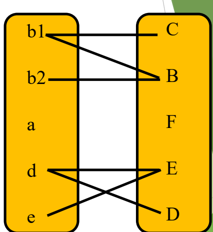
		関係	写像
(1)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = x$	○	○
(2)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y = \sqrt{x}$	○	○
(3)	$(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1$	○	×
(4)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2, y > x$	○	×
(5)	$(x,y) \in \mathbb{N}^2$, xはyの約数	○	×

21

関係は部分写像の一般化



部分写像



関係

22

4. 関係行列

Def 4
二つの集合を $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m\}$,
$B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n\}$として， AからBへの関係行列は　$R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1: a_i R b_j \text{のとき} \\ 0: a_i \not R b_j \text{のとき} \end{cases}$$

として定義される．

23

例題 1

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$
のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

24

例題 1

$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$
のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

25

例題２

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

例題２

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (b, S), (b, T), (d, S)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例題３

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

例題３

$$U = \{a, b, c, d\}, V = \{S, T\}$$

のとき，UからVへの次の関係行列を書け。

$$R = \{(a, S), (a, T), (b, S), (b, T), (c, S), (c, T), (d, S), (d, T)\}$$

解答

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5．上への関係

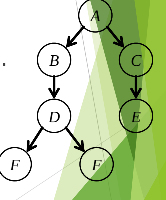
Def 5

集合AからAの関係を，「A上の関係」（または「中の関係」）と呼ぶ．

グラフによる関係の表現

Def 6

グラフ $G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は二つの集合 $\mathbf{V}$ と $\mathbf{E}$ によって定義され，$\mathbf{V}$ は頂点（Vertex）（または，節点・ノード）の有限集合 $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_N\}$で, $\mathbf{E}$ は辺(edge)（または枝、アーク）集合である．さらに，グラフは個々の頂点における二つの組を辺で結合したすべての可能性のある集合の部分集合である．



Def 7

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$をグラフとする．$E_{ij} \in \mathbf{E}$ かつ $E_{ji} \notin \mathbf{E}$のとき，枝E_{ij} を**有向辺**（directed edge）と呼ぶ． V_i と V_jの有向辺は$V_i \to V_j$と書く．

有向グラフと無向グラフ

Def 8

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ をグラフとする． $E_{ij} \in \mathbf{E}$ かつ$E_{ji} \in \mathbf{E}$のとき，辺 E_{ij} を**無向辺**（undirected edge）と呼ぶ． V_i と V_jの無向辺は $V_i - V_j$ または$V_j - V_i$と書く．

Def 9

すべての辺が有向辺のグラフを**有向グラフ**（directed graph）と呼び，すべての辺が無向辺のグラフを**無向グラフ**（undirected graph）と呼ぶ．

例

有向グラフと無向グラフの例を図(a), (b) にそれぞれ示している．

有向グラフ(a) では，グラフは以下で与えられ，

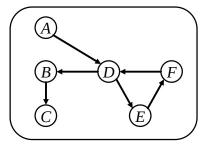
$$\mathbf{V} = \{A, B, C, D, E, F\}$$

$$\mathbf{E} = \{A \to D, B \to C, D \to B, F \to D, D \to E, E \to F\}$$

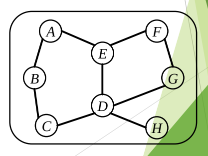
無向グラフ(b) では，グラフは以下で与えられる．

$$\mathbf{V} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$\mathbf{E} = \{A - B, B - C, C - D, D - E, E - A, E - F, F - G, G - D, D - H\}$$



(a)



(b)

二項関係とグラフは同値

有向グラフ　$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$において，$\mathbf{E} \subseteq \mathbf{V}^2$であり，$\mathbf{E}$は$\mathbf{V}$上の二項関係

⇔

有限集合上の二項関係が定義されていると,二項関係を普遍集合の部分集合とみなせるので、有向グラフで表現できる

⇔「有限集合上の二項関係」

⇔「有向グラフ」

*A*上の関係*R*のグラフ表現

*A*上の関係*R*のグラフ表現を

頂点集合を*A*として,

aRbであるときのみ， $a \to b$という有向辺による有向グラフで表現する。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

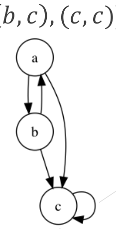
集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

上への関係の有向グラフによる表現

例題1

集合$A = \{a, b, c\}$上の関係$R_2 = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, c)\}$を有向グラフで示せ。

[解答]



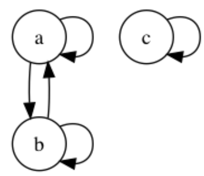
例題2

集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$を有向グラフで示せ。

例題2

集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$を有向グラフで示せ。

[解答]



6. A上の関係の関係行列

Def 10

集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$上の関係の関係行列は　$R=\{r_{ij}\},(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,m)$

$$r_{ij}=\begin{cases}1: a_iRa_j\text{のとき}\\ 0: a_i\not R a_j\text{のとき}\end{cases}$$

として定義される.

例題1

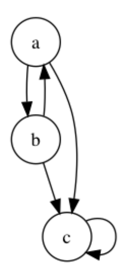
集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

例題1

集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$



例題2

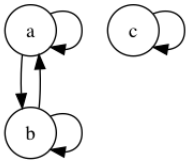
集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

例題2

集合$A=\{a,b,c\}$上の関係$R_2=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$の関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$



例題3

$A=\{a,b,c,d\}$上の関係Rについて，次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(d,a),(d,d)\}$$

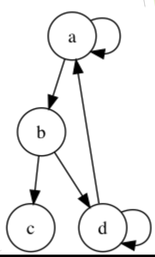
例題3

$A=\{a,b,c,d\}$上の関係Rについて，次の関係行列と有向グラフを書け。

$$R=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(d,a),(d,d)\}$$

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$



7. 具体的な関係

例題 1

$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R\ni(a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

7. 具体的な関係

例題 1

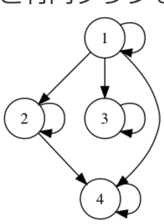
$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R\ni(a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



例題 2

$A=\{a,b\}$の冪集合2^A上の関係Rについて

$X,Y\in 2^A$のとき　XRY ：$X\subseteq Y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

例題２

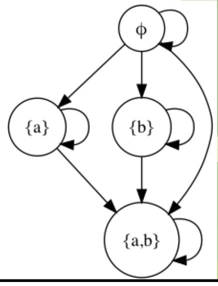
$A=\{a,b\}$の冪集合2^A上の関係Rについて

$X,Y\in 2^A$のとき　XRY ：$X\subseteq Y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$2^A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$



例題3

$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$x,y\in A$のとき　xRy ：$x<y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

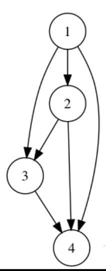
例題3

$A=\{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$x,y\in A$のとき　xRy ：$x<y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

[解答]

$$R=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$



ここから
グラフ理論の基礎を学びます

53

9. 隣接ノード集合

Def 11

$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ について，V_iの隣接頂点集合（adjacency vertexes set）は，V_iから直接辺が引かれた頂点集合

$Adj(Vi)=\{V_j\in\mathbf{V}|E_{ij}\in\mathbf{E}\}$を示す．

Def 12

グラフGでV_iに接続する辺の数をV_iの次数といい，$\mathrm{d}(V_i)$と書く．

Th. 1

$G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ について，

$\mathbf{V}=\{V_1,V_2,\cdots V_i,\cdots V_N\}$で辺の数が$q$のとき，

$$\sum_{i=1}^{N}\mathrm{d}(V_i)=2q$$

Th. 1

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，　$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \cdots V_i, \cdots V_N\}$ で辺の数がqのとき，

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$$

[証明] 一つの辺は次数としてはかならず両端を含めて2と数えられるので，$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}(V_i) = 2q$ ■

隣接行列

Def 12

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，　$\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \cdots V_i, \cdots V_N\}$

のとき，以下の行列

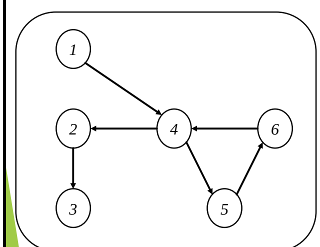
$$R = \{r_{ij}\}, (i = 1, \cdots, N, j = 1, \cdots, N)$$

$r_{ij} = V_i$とV_jを結ぶ辺数

をGの隣接行列と呼ぶ。

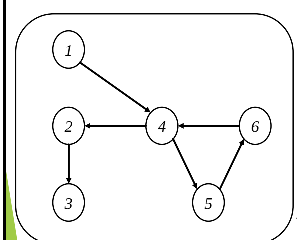
57

例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



58

例題：以下のグラフの隣接行列を求めよ。



$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

59

Th. 2

関係行列は，二頂点間の辺があるかないかを示した隣接行列である。

60

10.経路と閉路

Def. 13 V_i からV_j への**経路**は，$V_{i_1} = V_i$で始まり，$V_{i_r} = V_j$ で終わるような以下を満たす順序化された頂点集合$(V_{i_1}, \ldots, V_{i_r})$ を示す．

$$V_{i_{k+1}} \in Adj(V_{i_k}). \quad (k = 1, \ldots, r - 1)$$

このとき経路の長さ（length）は，辺の数を示し，$r - 1$ である．

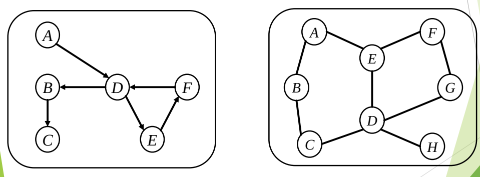
▶**Def.14** すべての頂点が異なる経路を道(path)と呼ぶ．すべての辺が異なる経路を小道(trail)と呼ぶ．

Def.15 始点と終点が同じ頂点となる場合（すなわち，$V_{i_1} = V_{i_r}$），（通）路（path）$(V_{i_1}, \ldots, V_{i_r})$ は**閉路**（closed path）と呼ばれる．

例

有向グラフ(a)の経路$D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow D$ は**閉路**である.

無向グラフ(b)の経路$A - B - C - D - E - A$ は**閉路**である.



(a) (b)

Th. 3

$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ について，
$\forall V_i \in \mathbf{V}$, $\mathrm{d}(V_i) \geq 2$のとき，必ずGは閉路を含む.

63

Def 16 同型

二つのグラフ$G = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ と$G' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ について，

V = V' ∧ **E= E'**

のとき,二つのグラフは同型であるいう。

$G \cong G'$

と書く.

64

11．完全グラフと完全集合

Def 17

すべてのノード間に辺が張られた無向グラフを**完全グラフ**（complete graph）と呼ぶ．N ノードの完全グラフをK_N と示す.

Def 18

グラフGの部分ノード集合S が，すべてのノード間に辺が張られている場合，S を**完全集合**（complete set）と呼ぶ.

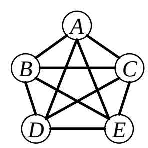


図　完全グラフK_5

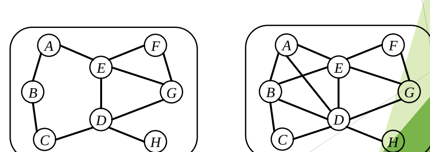
12．クリーク

Def 19

完全集合C が他のどの完全集合の部分集合にもなっていない場合，すなわち，最大の完全集合である場合，C を**クリーク**（clique）と呼ぶ.

例

図 は，二つの異なるグラフのクリークを示している.
グラフ(a)は，クリーク$C_1 = \{A, B\}$，$C_2 = \{B, C\}$，$C_3 = \{C, D\}$，$C_4 = \{D, H\}$，$C_5 = \{A, E\}$，$C_6 = \{D, E, G\}$，$C_7 = \{F, E, G\}$を含む.
グラフ(b) は，クリーク$C_1 = \{A, B, D, E\}$，$C_2 = \{B, C, D\}$，$C_3 = \{D, H\}$，$C_4 = \{D, E, G\}$，$C_5 = \{E, F, G\}$を含む.



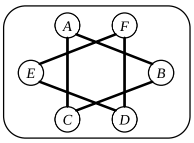
(a) (b)

Def . 20　連結グラフと非連結グラフ

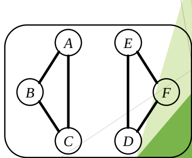
無向グラフのすべての二つのノード間で少なくとも一つの道が存在するとき，**連結グラフ**（connected graph）と呼ぶ．それ以外を**非連結グラフ**（disconnected graph）と呼ぶ．

例18

図 は，同じ構造をもつ非連結グラフの異なる二つの表現である．図(a) はエッジが交差しており，非連結には見えないが，図(b) のように交差を外し，分離すればより非連結性が強調される．



(a)



(b

Def. 21　木

閉路を持たない連結グラフTを木(tree)とよぶ.

69

Th. 4　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ の　$\forall V_i\ \forall V_j \in \mathbf{V}$について，$V_i$と$V_j$を結ぶただ 1 つの道が存在する.

70

Th. 5　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は連結であり，　どの辺を除いても連結ではなくなる.

71

Th. 7　木

$T = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ は閉路を持たず、　辺をどのように一つ加えても閉路を一つ持つグラフになる.

72

Th. 8

N個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は，N-1個の辺を持つことである.

73

*N*個の頂点からなる連結グラフが木であるための必要十分条件は，*N-1*個の辺を持つことである．

[証明]　数学的帰納法を用いる.

(1) 頂点数が2のとき,辺が１つで木である.

(2) 頂点数がNのとき,木の必要十分条件はN-1個の辺であるとする.

頂点数がN+1のとき,閉路を持たない連結グラフになるように1つの辺をN+1番目の頂点とそれ以外の1つの頂点の間に加えなければならない.すなわちN-1+1=Nの頂点である.このとき,頂点数-1の辺が存在することになる.　■

74

まとめ

① 関係（二項関係）
② 関係と写像
③ グラフによる表現
④ 関係行列
⑤ 有向グラフと無向グラフ
⑥ 隣接集合と隣接行列
⑦ 木、完全グラフ、クリーク

演習問題

76

問題1

$A = \{1,2,3,4\}$上の関係Rについて

$R \ni (a,b)$のとき　aRb ：$a = b$とすると，関係行列と有向グラフを書け。

77

問題2

$A = \{a,b,c,d\}$の冪集合A^2上の関係Rについて

$X, Y \in 2^A$のとき　XRY ：$X \subseteq Y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

78

問題3

$A = \{1,2,3,4,5\}$上の関係Rについて

$x, y \in A$のとき　xRy ：$x \leq y$ とすると，関係行列と有向グラフを書け。

79

問題4

$A=\{1,2,3,4,6,8\}$上の関係Rについて

$R\ni(a,b)$のとき　aRb ：aはbの約数である

とすると，関係行列と有向グラフを書け。

80