

11.写像（関数） (1)

植野真臣

電気通信大学 情報数理工学コース

本授業の構成

10月 8日：第1回 命題と証明

10月 15日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号

10月22日：第3回 命題論理

10月29日：第4回 述語論理

11月 5日：第5回 述語と集合

11月12日：第6回 直積と冪集合

11月19日：第7回 様々な証明法 (1)

12月 3日：第8回 様々な証明法 (2)

12月10日：第9回 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)

12月17日：第10回 中間試験

1月 7日：第11回 写像（関数） (1)

1月21日：第12回 写像（関数） (2)

1月28日：第13回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現

2月 4日：第14回 同値関係

2月 6日：第15回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界

2月18日：第16回 期末試験（補講があればずれていきます。）

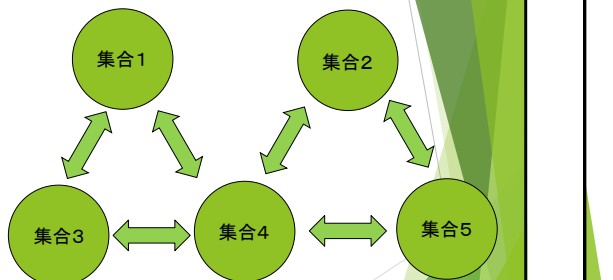
1. 本日の目標

- ① 関係の紹介
- ② 関数の中の関数、写像
- ③ 部分写像と写像
- ④ 単射と全射、全単射

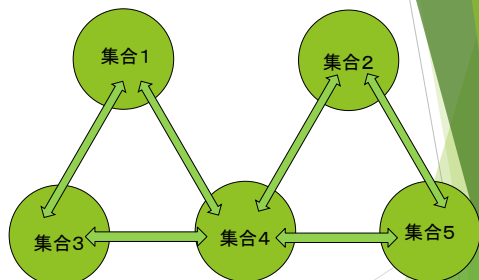
これまで学んできた概念

- ▶ 述語
- ▶ 集合
- ▶ 直積集合
- ▶ 冪集合
- ▶ 集合系

2. これまで集合と集合同士の関係について学んできた



2. これから学ぶこと（集合の要素間の関係）



3. 関係

再掲 5 章 :

Def 1.

二つの集合 U, V の直積集合 $U \times V$ の部分集合 R を U から V への「関係」という。

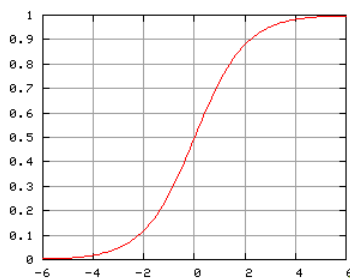
また, $R \ni (a, b)$ のとき aRb : a と b は関係ある
 $R \not\ni (a, b)$ のとき $a \not R b$: a と b は関係なしと書く。

3. 関係の特殊系としての写像と関数

最初に関係のなかの特殊系である写像について学び、それを徐々に一般化していく

写像 のひとつに関数がある。
写像と関数を同義と考える専門家と「数」に関する写像のみを関数と呼ぶという専門家がいる。

関数 $f(x)$

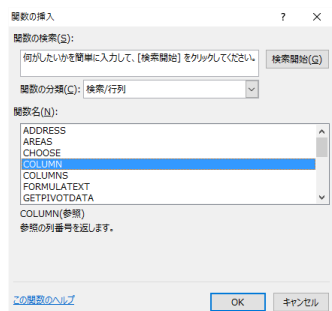


$n!$ (関数 `fact(int n)` の再帰呼び出し)

```
int fact(int n)
{
    int m;

    if (n == 0)
        return 1;    // 0! = 1
    /* 以下、n が 0 でないとき */
    m = fact(n - 1);  // (n-1)! を求めてそれを
                    // m とおく。このfact(n-1)が再帰呼び出し。
    return n * m;     // n! = n * m
}
```

EXCELの関数



確率変数

例

コインの表が出ると $x = 1$, 裏が出ると $x = 0$ という確率変数がある。 $P(x) = 0.5$ である。

一般に確率変数は関数である。

$$x = \begin{cases} 1: \text{コインの表が出る} \\ 0: \text{コインの裏が出る} \end{cases}$$

連続量に関する確率変数の定義

確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ に対し, Ω から実数 $\mathbb{R}$ への関数 $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が, 任意の実数 r に対し $\{X \leq r\} \in \mathcal{A}$ (累積値が有限) を満たすならば, X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ 上の確率変数という。

4. 関数

Def 2

変数 x, y について, x の値 (数値以外でも可) が決まると y の値が一つだけ決まるとき, y は x の関数である, といい,

$$y = f(x)$$

と書く。

変数 x の変域を「定義域」といい, 関数値 y の取り得る値の変域を「値域」という。

5. 写像と部分写像

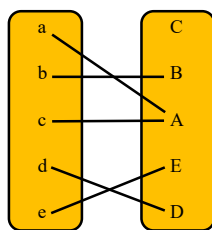
Def 3

集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。

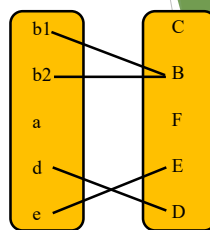
このとき, 集合 U の要素に対応する V の要素が存在しない場合も許容する。この関係を U から V への **部分写像** という。 f が U から V への部分写像であることを $f: U \rightarrow V$ と書く。

U を f の始域, V を f の終域という。

写像と部分写像

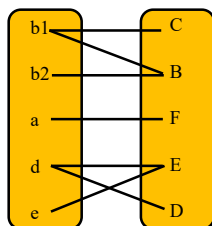


写像 (関数)

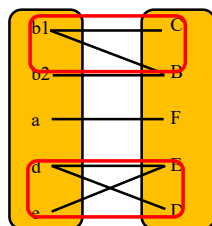


部分写像

以下は (部分) 写像か？



以下は (部分) 写像か？



部分写像でない

Def: 集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。部分写像は集合 U の要素に対応する V の要素が存在しない場合を許容するが, 集合 U の要素に複数の V の要素が対応していることは許さない。

1つの要素が1つの要素に対応せずに2つの要素に対応している要素が存在する。

問 以下の f は(部分)写像か？

(1) f : クラスの氏名集合 $\mapsto$ 出席(学籍)番号集合

(2) f : 住所集合 $\mapsto$ 電話番号集合

(3) f : 住所集合 $\mapsto$ 郵便番号集合

(4) f : 自動販売機の入金額集合 $\mapsto$ 飲み物集合

(5) f : JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合

19

問 以下の f は(部分)写像か？

(1) f : クラスの氏名集合 $\mapsto$ 出席(学籍)番号集合 ○

(2) f : 住所集合 $\mapsto$ 電話番号集合

(3) f : 住所集合 $\mapsto$ 郵便番号集合

(4) f : 自動販売機の入金額集合 $\mapsto$ 飲み物集合

(5) f : JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合

20

問 以下の f は(部分)写像か？

(1) f : クラスの氏名集合 $\mapsto$ 出席(学籍)番号集合 ○

(2) f : 住所集合 $\mapsto$ 電話番号集合 × (一つの住所に複数番号を許す)

(3) f : 住所集合 $\mapsto$ 郵便番号集合

(4) f : 自動販売機の入金額集合 $\mapsto$ 飲み物集合

(5) f : JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合

21

問 以下の f は(部分)写像か？

(1) f : クラスの氏名集合 $\mapsto$ 出席(学籍)番号集合 ○

(2) f : 住所集合 $\mapsto$ 電話番号集合 × (一つの住所に複数番号を許す)

(3) f : 住所集合 $\mapsto$ 郵便番号集合 ○

(4) f : 自動販売機の入金額集合 $\mapsto$ 飲み物集合

(5) f : JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合

22

問 以下の f は(部分)写像か？

(1) f : クラスの氏名集合 $\mapsto$ 出席(学籍)番号集合 ○

(2) f : 住所集合 $\mapsto$ 電話番号集合 × (一つの住所に複数番号を許す)

(3) f : 住所集合 $\mapsto$ 郵便番号集合 ○

(4) f : 自動販売機の入金額集合 $\mapsto$ 飲み物集合 × (同じ金額に複数の飲み物)

(5) f : JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合

23

問 以下の f は(部分)写像か？

(1) f : クラスの氏名集合 $\mapsto$ 出席(学籍)番号集合 ○

(2) f : 住所集合 $\mapsto$ 電話番号集合 × (一つの住所に複数番号を許す)

(3) f : 住所集合 $\mapsto$ 郵便番号集合 ○

(4) f : 自動販売機の入金額集合 $\mapsto$ 飲み物集合 × (同じ金額に複数の飲み物)

(5) f : JR山の手線の駅区間集合 $\mapsto$ 大人乗車金額集合 ○

24

U, V が有限集合の場合の数学的記述例

$$U = \{a, b, c, d\}, \quad V = \{A, B, C, D\}$$

小文字を大文字に写像を記述してみよう。

記述例

$$f: U \mapsto V; a \mapsto A, b \mapsto B, c \mapsto C, d \mapsto D$$

もしくは

$$f: U \mapsto V; f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C, f(d) = D$$

U, V が無限集合（もしくは多要素）の場合の数学的記述例

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; x \mapsto \sqrt{x}$$

もしくは

$$f: x \in \mathbb{N} \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{N}$$

もしくは

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \sqrt{x}$$

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし, $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし, $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

証明

定義に戻れ: Def 3 集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。

→全称命題の否定; 否定事例の存在命題の証明を用いる。

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。

ただし, $\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

証明

Def 3

定義に戻れ: 集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。

→全称命題の否定; 否定事例の存在命題の証明を用いる。

$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$ では, $x = 1$ とすると $f(1) = \pm 1$

となり, 写像された要素が二つ対応していることがある。

従って, $f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$

は写像ではない。 ■

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def 3

定義に戻れ：

集合 U の各要素に、それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def 3

定義に戻れ：集合 U の各要素に、それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。

$x \in \mathbb{R}$ を仮定する。このとき、 x について $f(x) = x^2$ は $x^2 \in \mathbb{R}$ でただ一つだけ決まる。従って、各要素の写像にただ一つの実数に対応しているので、

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ は写像である。

例題 3

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1) $\{(2,c), (3,c)\}$
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$

例題 3

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1) $\{(2,c), (3,c)\}$ 部分写像だが写像でない
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$

例題 3

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1) $\{(2,c), (3,c)\}$ 部分写像だが写像でない
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$ 部分写像で写像
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$

例題 3

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1) $\{(2,c), (3,c)\}$ 部分写像だが写像でない
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$ 部分写像で写像
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$ 部分写像でない
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$

例題 3

$U = \{1,2,3\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は部分写像であるか？もし、部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

- (1) $\{(2, c), (3, c)\}$ 部分写像だが写像でない
- (2) $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$ 部分写像で写像
- (3) $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$ 部分写像でない
- (4) $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$ 部分写像で写像

37

6. 部分写像の定義域と値域

$$f: U \mapsto V$$

U を f の始域, V を f の終域という。

特に U の要素のうち、部分写像 f による値が存在する要素を集めた U の部分集合を「定義域」と呼ぶ。 $\text{dom}(f)$ と書く。 $U \setminus \text{dom}(f)$ を「未定義域」と呼ぶ。

また、 V の要素のうち、ある U の要素の f による値になっている要素を集めた V の部分集合を「値域」と呼ぶ。 $\text{ran}(f)$ と書く。

38

定義域と値域

$\text{dom}(f) = \{x | \text{??????}\}$ で表せ。

$\text{ran}(f) = \{y | \text{??????}\}$ で表せ。

39

定義域と値域

$$\text{dom}(f) = \bigcup_y \{x | f(x) = y\}$$

$$\text{ran}(f) = \bigcup_x \{y | f(x) = y\}$$

なので 量子子を用いると??

40

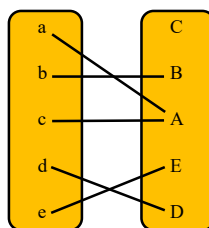
定義域と値域

$$\text{dom}(f) = \{x | \exists y, f(x) = y\}$$

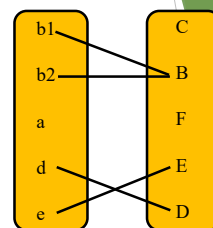
$$\text{ran}(f) = \{y | \exists x, f(x) = y\} = \{f(x) \in U\}$$

41

例題 次の部分写像の定義域と値域は？



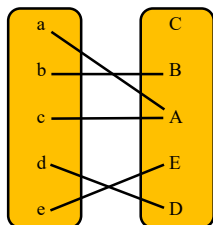
$\text{dom}(f) = ?$
 $\text{ran}(f) = ?$



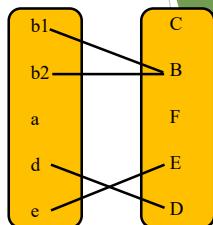
$\text{dom}(f) = ?$
 $\text{ran}(f) = ?$

42

例題 次の部分写像の定義域と値域は？



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
 $\text{ran}(f) = \{A, B, D, E\} \neq V$
 未定義域 = $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{b1, b2, d, e\} \neq U$
 $\text{ran}(f) = \{B, D, E\} \neq V$
 未定義域 = $\{a\}$

7. 部分写像 f と g が等しい

Def. 4

2つの部分写像 $f: A \mapsto B$, $g: C \mapsto D$ が等しいとは,

1. $A = C$ 始域が等しい
2. $B = D$ 終域が等しい
3. $\forall u \in U, f(u) = g(u)$. 関数の値が等しい

8. 恒等写像

Def 5.

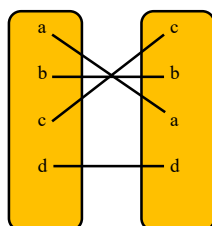
$f: U \mapsto U; f(x) = x$

となる写像を恒等写像という。

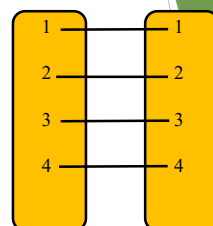
$\text{id}_U: U \mapsto U; \text{id}_U(x) = x$.

と書く。 id_U の U は始集合が U であることを示している。

恒等写像の例



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = U$
 $\text{ran}(f) = \{a, b, c, d\} = V$
 未定義域 = $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{1, 2, 3, 4\} = U$
 $\text{ran}(f) = \{1, 2, 3, 4\} = V$
 未定義域 = $\emptyset$

9. 単射

Def 6

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$

$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$ ならば

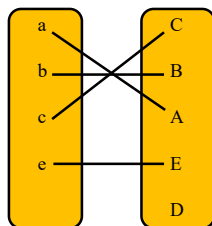
$f(x_1) \neq f(x_2)$

のとき, f は U から V への「単射」であるという。

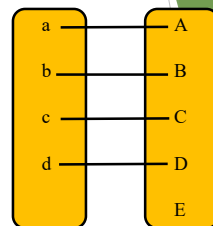
注: f は部分写像でなく写像であることに注意してほしい。

中学では「1対1の写像」と習っている。

単射の例

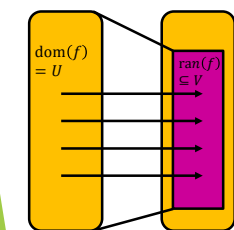


$\text{dom}(f) = \{a, b, c, e\} = U$
 $\text{ran}(f) = \{A, B, C, E\} \neq V$
 未定義域 = $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = U$
 $\text{ran}(f) = \{A, B, C, D\} \neq V$
 未定義域 = $\emptyset$

重要ポイント：単射のイメージ



$\text{dom}(f) = U$
 $\text{ran}(f) \subseteq V$
 未定義域 = $\emptyset$

9. 単射の性質

Th 1.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば $x_1 = x_2$ のとき, f は U から V への「単射」である。

を証明せよ。

9. 単射の性質

Th 1.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば $x_1 = x_2$ のとき, f は U から V への「単射」である。

[証明]

Def 6の命題の対偶を用いる

9. 単射の性質

Th 1.

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$$

ならば $x_1 = x_2$ のとき, f は U から V への「単射」である。

[証明]

Def 6の命題の対偶を用いると,

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$

$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$ ならば

$f(x_1) \neq f(x_2)$ の対偶は Th1. ■

例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$
- (2) $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$
- (3) $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4) $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(2, b), (3, a), (1, a)\}$
- (3) $\{(3, b), (2, a), (3, c)\}$
- (4) $\{(1, b), (3, a), (2, c)\}$

例題1

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

- (1) $\{(2,c), (3,d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$ × : 写像だが 3 と 1 が同じ値に写像
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$

例題1

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

- (1) $\{(2,c), (3,d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$ × : 写像だが 3 と 1 が同じ値に写像
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$ × : そもそも写像でない
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$

例題1

$U = \{1,2,3\}, V = \{a,b,c,d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は単射であるか？

- (1) $\{(2,c), (3,d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(2,b), (3,a), (1,a)\}$ × : 写像だが 3 と 1 が同じ値に写像
- (3) $\{(3,b), (2,a), (3,c)\}$ × : そもそも写像でない
- (4) $\{(1,b), (3,a), (2,c)\}$ ○

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 4$
が単射であることを証明せよ。

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 4$
が単射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ : 対偶「 $\forall x_1, \forall x_2 \in U [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$ 」ならば f は U から V への「単射」である。」

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2)$ と仮定する。

$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$ より $x_1 = x_2$ となる。

従って, f は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への単射である。

例題 3 .

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$
は単射でないことを証明せよ。

例題 3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

証明

含意型命題の否定→反例の存在型命題の証明

定義に戻れ: $\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$

異なる二つの実数 $x_1 = 1, x_2 = -1$ を仮定する。

このとき, $f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$ となり, $f(x_1) \neq f(x_2)$ は成り立たない。従って,

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でない

10. 全射

Def 7. 写像 $f: U \mapsto V; f(x)$

について「 $\text{ran}(f) = V$ 」が成り立つとき, 「全射」もしくは「上への写像」という。



「 V のすべての要素はある U の要素の写像の値になっている」

注: f は部分写像でなく写像であることに注意

10. 全射

例題 1.

「 V のすべての要素はある U の要素の写像の値になっている」を量子化を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

「????????」

が成り立つとき, f は U から V への「全射」であるという。

10. 全射

例題 1.

「 V のすべての要素はある U の要素の写像の値になっている」を量子化を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

「 $\forall y \in V, \text{????????}$ 」

が成り立つとき, f は U から V への「全射」であるという。

10. 全射

例題 1.

「 V のすべての要素はある U の要素の写像の値になっている」を量子化を用いて数学的に定義せよ。

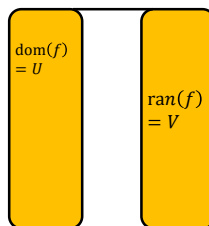
Def 7

写像 $f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$$

が成り立つとき, f は U から V への「全射」であるという。

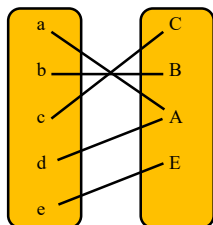
重要ポイント: 全射のイメージ



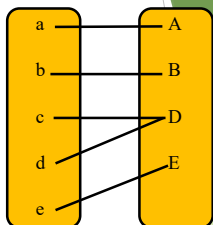
$\text{dom}(f) = U$
 $\text{ran}(f) = V$
 未定義域 = $\emptyset$

全射の例

$\exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$ の $\exists x$ はひとつとは限らないことに注意！！



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
 $\text{Ran}(f) = \{A, B, C, E\} = V$
 未定義域 = $\emptyset$



$\text{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
 $\text{ran}(f) = \{A, B, D, E\} = V$
 未定義域 = $\emptyset$

注意

再掲

Def 3

集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。



写像の必要条件

$\text{dom}(f) = U$

未定義域 = $\emptyset$

集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$
- (2) $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$ × : そもそも写像でない
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$ × : そもそも写像でない
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$ × : そもそも写像でない
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ $\times$: そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (1, a), (2, c)\}$ $\times$: そもそも写像でない
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c)\}$ $\times$: そもそも写像でない
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, a), (4, c)\}$ $\bigcirc$

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$
が全射であることを証明せよ。

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$
が全射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ : Def 7

写像 $f: U \rightarrow V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U, f(x) = y$$

が成り立つとき, f は U から V への「全射」

全称命題では $\forall$ をとる！！

存在命題では、

$y \in \mathbb{R}$ について $f(x) = y$ となる x を見つける！！

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x + 1$
が全射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ : Def 7

写像 $f: U \rightarrow V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$$

が成り立つとき, f は U から V への「全射」

$y \in \mathbb{R}$ について $x = \frac{y-1}{2}$ が存在する。

$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ より, $\forall y \in \mathbb{R}$ について

$$\exists x, f(x) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$$

従って, f は $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ への全射である。

例題 3 .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$
は全射でないことを証明せよ。

例題 3 .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$
は全射でないことを証明せよ。

証明

定義に戻れ : Def 7

写像 $f: U \rightarrow V; f(x)$ について

$\forall y \in V, \exists x \in U \text{ s.t. } f(x) = y$ が成り立つとき, f は U から V への「全射」

全称命題の否定 $\rightarrow$ 反例の存在の証明

$y = f(x)$ とすると $y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ より, $y = -1$ に対して $f(x) = -1$ となる実数 x が存在しない。従って,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ は全射でない

11. 全単射

Def. 8

写像 $f: U \rightarrow V; f(x)$ が単射かつ全射であるとき, f は U から V への全単射という。

注意

再掲

Def 3

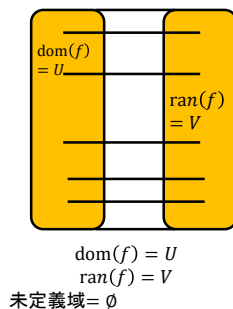
集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応している関係を U から V への写像という。



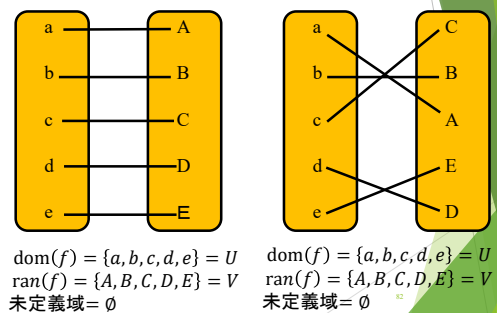
全単射の必要条件

- ▶ $\text{dom}(f) = U$
- ▶ $\text{ran}(f) = V$
- ▶ 未定義域 = $\emptyset$
- ▶ 集合 U の各要素に, それぞれ集合 V の要素がただ一つ対応

重要ポイント：全単射のイメージ



全単射の例



例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全単射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は全単射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\}$ × : そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (2, a), (3, c)\}$ × : そもそも写像でない
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\}$
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全単射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\} \times$: そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (2, a), (3, c)\} \times$: そもそも写像でない
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\} \times$: そもそも写像でない
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\}$

例題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{a, b, c, d\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$ は全単射であるか？

- (1) $\{(2, c), (3, d)\} \times$: そもそも写像でない
- (2) $\{(1, b), (2, a), (3, c)\} \times$: そもそも写像でない
- (3) $\{(3, b), (2, a), (1, c), (3, d)\} \times$: そもそも写像でない
- (4) $\{(2, b), (3, a), (1, d), (4, c)\} \quad \bigcirc$

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$
が全単射であることを証明せよ。

例題 2 .

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5 + 1$
が全単射であることを証明せよ。

証明 **単射と全射それぞれを証明**

単射 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2)$ と仮定する。 $x_1^5 + 1 = x_2^5 + 1$ のとき $x_1 = x_2$ となる。従って、 f は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への単射である。

全射 $y \in \mathbb{R}$ について $x = \sqrt[5]{y-1} \in \mathbb{R}$ が存在する。

$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ より、 $\forall y \in \mathbb{R}$ について $\exists x, f(x) = \sqrt[5]{y-1}^5 + 1 = y$ 。
従って、 f は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への全射である。

f は $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ への単射かつ全射であるので全単射である。 ■

例題3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$
は全単射でないことを証明せよ。

例題3.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$
は全単射でないことを証明せよ。

証明

全称命題の否定→反例の存在の証明 単射でも全射でもないのどちらかを示せば十分。

単射 $x_1 = -1, x_2 = 1$ のとき $x_1^4 = x_2^4$ となり、定義に矛盾する。従って f は単射ではない。

全射 $y = f(x)$ とすると $y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ より、 $y = -1$ に対して $f(x) = -1$ となる実数 x が存在しない。従って、

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ は全射でない ■

まとめの問題 以下はどのような写像か？

?????

?????

91

まとめの問題 以下はどのような写像か？

部分写像

写像 $\subseteq$ 部分写像

92

まとめの問題 以下はどのような写像か？

?????

?????

93

まとめの問題 以下はどのような写像か？

全射 $\subseteq$ 写像 $\subseteq$ 部分写像

単射 $\subseteq$ 写像 $\subseteq$ 部分写像

94

まとめの問題 以下はどのような写像か？

?????

95

まとめの問題 以下はどのような写像か？

全単射 $\subseteq$ (全射または $\subseteq$ 単射) $\subseteq$ 写像 $\subseteq$ 部分写像

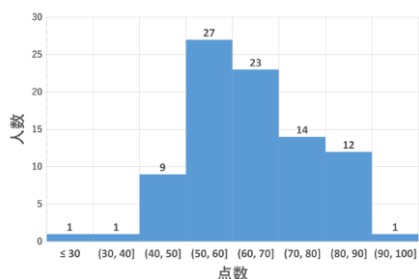
96

まとめ

- ① 関係の紹介
- ② 関数の中の関数、写像
- ③ 部分写像と写像
- ④ 単射と全射、全単射

中間試験の結果

平均点 64.295



演習問題

問題1

$U = \{1, 2, 3, 4\}, V = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。次の $f: U \rightarrow V$ は部分写像、写像、単射、全射、全単射、恒等写像のどれであるか？複数回答可。

- (1) $\{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$
- (2) $\{(2, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
- (3) $\{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (1, 3)\}$
- (4) $\{(3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 2)\}$
- (5) $\{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (3, 1)\}$

問題2

次の f は部分写像、写像、単射、全射、全単射、恒等写像のどれであるか？複数回答可。

- (1) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = x^6$
- (2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(x)^2 = x$
- (3) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = x + 2$
- (4) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = x - 2$
- (5) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = |x|$
- (6) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = \frac{x}{2}, x \text{ は偶数}$

問題3

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & (x \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

は全射であることを証明せよ。

問題4

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

は単射でないことを証明せよ。

問題5

$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = 3x$
は写像であるが、全射でないことを証明せよ。

問題6.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \sin(x)$ は写像であるが、単射でないことを証明せよ。