6.　直積と冪集合

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

スケジュール

10月 8日：第1回 命題と証明
10月 15日：第2回 集合の基礎、全称記号、存在記号
10月22日：第3回 命題論理
10月29日：第4回 述語論理
11月 5日：第5回 述語と集合
11月12日：第6回 直積と冪集合
11月19日：第7回 様々な証明法 (1)
12月 3日：第8回 様々な証明法 (2)
12月10日：第9回 様々な証明法　（再帰的定義と数学的帰納法）
12月17日：第10回 中間試験
1月 7日：第11回 写像（関数） (1)
1月21日：第12回 写像 (関数) (2)
1月28日：第13回 写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
2月 4日：第14回 同値関係
2月 6日：第15回 順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
2月 18日：第16回 期末試験（補講があればずれていきます。）

1．本日の目標

1. 直積
2. 集合の冪集合
3. 集合系の演算
4. ラッセルのパラドックス

2.　先週の復習：

内包的記法での条件部での量化子

1. $\{x|\forall n(P(x))\}$は　すべてのnについて条件$P(x)$を満たす共通集合$\cap_n \{x|P(x)\}$という意味
2. 内包的記述での$\{x|\exists n(P(x))\}$は　すべてのnについて条件(述語)　$P(x)$を満たす和集合$\cup_n \{x|P(x)\}$という意味

2.　先週の復習：

例題

1. $\{x \in \mathbb{N}|\forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$

2. $\{x \in \mathbb{N}|\exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$

2.　先週の復習：

解答

1. $\{x \in \mathbb{N}|\forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
$=\cap_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{N}|x > n\} = \emptyset$

2. $\{x \in \mathbb{N}|\exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
$=\cup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in \mathbb{N}|x > n\} =$
$\{x \in \mathbb{N}|x > 0\} = \mathbb{N}^+$

3. 直積

Def.1.　集合の要素xと要素yを順序を考慮して組にしたものをxとyの「順序対」といい，記号で(x,y)と書く。

Def.2. $x=a, y=\mathrm{b}$のときのみ(x,y)と(a,b)が等しいという。

Def. 3. 集合U,Vに対して， Uの要素とVの要素から作られる順序対の全体$\{(x,y)|x\in U, y\in V\}$をUとVの直積といい， $U\times V$で表す。

注意

$U=\emptyset$または$V=\emptyset$のとき

$$U\times V=U\times\emptyset=\emptyset\times V=\emptyset\times\emptyset=\emptyset$$

例題 1

$A=\{1,2\}, B=\{3,4\}$　とすると，
$A\times B$は？

例題 1

$A=\{1,2\}, B=\{3,4\}$　とすると，
$A\times B$は？

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

例題2

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$は，自然数の順序対の全体を示す。

$A=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|x\times y=2\}$
の要素は？

例題2

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$は，自然数の順序対の全体を示す。

$A=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|x\times y=2\}$
の要素は？

$$A=\{(1,2),(2,1)\}$$

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
を証明せよ。

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$を証明せよ。

[証明]

$\forall (x, y)[(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)]$を示せばよい。

$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge [y \in B \vee y \in C] \Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \vee [x \in A \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B)] \vee [(x, y) \in (A \times C)] \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ ■

例題4

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

を証明せよ。

例題4

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$を証明せよ。

[証明]

$\forall (x, y)\ [(x, y) \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)]$を示せばよい。

$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge [y \in B \wedge y \in C]$

$\Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \wedge [x \in A \wedge y \in C]$

$\Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B)] \wedge [(x, y) \in (A \times C)] \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ■

4．関係　（本授業の後半で詳しく学習します。）

Def 4.

二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合RをUからVへの「関係」という．また，

$R \ni (a, b)$のとき

aRb ：aとbは関係ある

$R \not\ni (a, b)$のとき

$a \not{R} b$ ：aとbは関係なし

と書く.

関係の例

$A = \{1,2\}, B = \{3,4\}$

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$

このとき，$R = \{(1,4), (2,4)\}$

もしくは　$1R4$，$2R4$

は，１が４と関係がある、2が4と関係がある、ということを表現している。

「関係」の特殊なケースが　写像や関数、グラフ理論である。（１０章以降で学びます）

例1.

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$は，実数の順序対の全体を示す。

$(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$は、座標軸平面上の点。

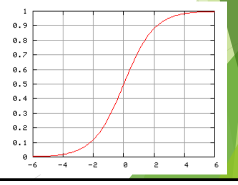
例2.

$\mathbb{R}$から$\mathbb{R}$への関数fに対し,

$$G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y=f(x)\}$$

は，「関数f　のグラフ」を示す。

例 $G_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|y=\frac{1}{1+\exp(-x+a)}\}$



5. 冪集合

Def. 4. Uの部分集合の集まりをUの冪（べき）集合(power)といい，$\mathcal{F}(U)$ または　2^U で表す。

例

$U=\{a,b,c\}$とすると,

2^U
$=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

Th 1

集合Aについて$n(A)=N$のとき，Aの冪集合2^A　について
$n(\mathcal{F}(A))=2^N$.

Th 1

集合Aについて$n(A)=N$のとき，Aの冪集合2^A　について$n(\mathcal{F}(A))=2^N$.

[証明]

$A=\{1,2,3,\cdots,N\}$としても一般性を失わない。このとき，Aの部分集合の取り方は，1を含むかどうか、2を含むかどうか、3を含むかどうか、… Nを含むかどうかで決まるので，それぞれ二通りの場合の数がN個あり,その総数は2^N.　■

6. 集合系

Def. 5. N個のUの部分集合$A_1 \cdots A_N$ が与えられているとき，$A = \{A_1 \cdots A_N\} = \{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$ を**集合系** と呼ぶ。集合族と呼ばれることもある。

Th. 2.

普遍集合Uの冪集合　2^U　の部分集合の集合

$$\{A | A \subseteq 2^U\}$$

は**集合系である。**

25

注意：集合系と集合族

$A = \{A_1 \cdots A_N\} = \{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$ のようにインデックスがついている場合と冪集合2^U　の部分集合としてのみ扱われる場合で、集合系と集合族を区別することがある。

しかし、どちらの場合をどう呼ぶかが様々に異なり決まっていない。

ここでは、同じとして扱う。

26

7. 集合系 の演算

Def. 6. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，条件$\forall i(x \in A_i)$を満たす$x$全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の共通部分」といい，$\cap_{i=1}^{n} A_i$と書く。すなわち，

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$ のとき，　$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

27

7. 集合系 の演算

Def. 6. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，条件$\forall i(x \in A_i)$を満たす$x$全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の共通部分」といい，$\cap_{i=1}^{n} A_i$ と書く。すなわち，

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x | \forall i(x \in A_i)\}$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$ のとき，　$\cap_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

28

7. 集合系 の演算

Def. 7. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，条件$\exists i(x \in A_i)$を満たす$x$全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の和集合」といい，$\cup_{i=1}^{\mathrm{N}} A_i$と書く。

すなわち，

$$\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} A_i$$

ただし，左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$ のとき，　$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

29

7. 集合系 の演算

Def. 7. 集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$について，条件$\exists i(x \in A_i)$を満たす$x$全体の集合を「集合系$\{A_i\}(i = 1, \cdots, N)$の和集合」といい，$\cup_{i=1}^{\mathrm{N}} A_i$と書く。

すなわち，

$$\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} A_i = \{x | \exists i(x \in A_i)\}$$

ただし，左辺は添え字の集合が自然数集合$\mathbb{N}$ のとき，$\cup_{i=1}^{\infty} A_i$と書く。

30

7. 集合系 の演算

$I=\{1,\cdots,N\}$もしくは$I=\mathbb{N}$のときを
統一的に
共通部分を

$$\bigcap_{i\in I} A_i$$

和集合を

$$\bigcup_{i\in I} A_i$$

と書く。

例

$I=\{1,2\}$のとき,

$\bigcap_{i\in I} A_i=\emptyset$

$\bigcup_{i\in I} A_i=I$

$I=\{1,2,\cdots\}$のとき，$\bigcap_{i\in I} A_i$，$\bigcup_{i\in I} A_i$
は２要素集合の共通部分，和集合の一般化
である。

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\emptyset$$

$\bigcup_{i\in I} A_i=I$

例題1

$n\in\mathbb{N}$に対し，集合B_nを$B_n=\{x\in\mathbb{R}|x\geq n\}$　とし，集合系$\{\mathrm{B}_n\}(n\in\mathbb{N})$の共通部分と和集合はどのようになるか？

例題1

解答

$\mathbb{N}$の要素nに対し，集合B_nを$B_n=$
$\{x\in\mathbb{R}|x\geq n\}$　とし，集合系$\{\mathrm{B}_n\}(n\in\mathbb{N})$
の共通部分と和集合は どのように
なるか？

$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\{x|\forall n[x\geq n]\}=\emptyset$,

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n=\{x|\exists n[x\geq n]\}=\{x|x\geq 0\}$

例題2

$\mathbb{N}^+$の要素nの要素nに対し，集合A_nを
$A_n=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x<\frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系
$\{A_i\}(i\in\mathbb{N})$の共通部分と和集合は

例題2

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n=$
$\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x<\frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系$\{A_i\}(i\in\mathbb{N})$
の共通部分と和集合は

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\left\{x\middle|\forall n\left[x<\frac{1}{n}\right]\right\}=\{x|x\leq 0\}$,

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\left\{x|\exists n\left[x<\frac{1}{n}\right]\right\}=\{x|x<1\}$

例題3

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| < \frac{1}{n}\right\}$　とし，集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

37

例題3

$\mathbb{N}^+$の要素nに対し，集合A_nを$A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| |x| < \frac{1}{n}\right\}$　とし，

集合系$\{A_i\}(i \in \mathbb{N})$の共通部分と和集合は

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x \middle| \forall n \left[|x| < \frac{1}{n}\right]\right\} = \{0\},$$

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{x | \exists n \left[|x| < \frac{1}{n}\right]\right\}$$

$$= \left\{x \middle| |x| < \frac{1}{1}\right\} = \{x | -1 < x < 1\}$$

38

分配律

集合Aと集合系$\{\mathrm{B}_n\}(n \in \mathbb{N}), I \subseteq \mathbb{N}$について以下が成り立つ。

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

39

ド・モルガンの法則

普遍集合をUとする集合系 $\{A_i\}(i \in$

40

集合の集合の問題

我々は　本日、集合の集合について考えてきた。しかし、集合の集合を数学的に体系づけるときに重要な問題が発見されている。

41

8. ラッセルのパラドックス

ラッセルは集合の集合は次の二つのものしかないと考えた。

Ａ：自分自身を要素とする集合の集合
Ｂ：自分自身を要素としない集合の集合

42

ラッセルは集合は次の二つのものしかないと考えた。

集合Ａ：自分自身を要素とする集合の集合
集合Ｂ：自分自身を要素としない集合の集合

Ａの例：要素の個数が無限の集合の集合→
要素の個数が無限の集合は無限に存在するので
それ自身もＡに属する。
Bの例：遊びの集合の集合を考える。遊びの集合は遊びではないので自分自身を要素としない集合の集合Ｂに入る。

43

8. ラッセルのパラドックス

自分自身を含まない集合全体の集合
$R=\{x|x\notin x\}$は存在しない。

44

8. ラッセルのパラドックス

自分自身を含まない集合全体の集合$R=\{x|x\notin x\}$は存在しない。

証明
1. $R\in R$の場合
$R=\{x|x\notin x\}$より，$R\notin R$となり矛盾

2. $R\notin R$の場合
$R=\{x|x\notin x\}$より，$R\in R$となり矛盾

例:すべての集合を含む集合
集合論で，Rが集合の定義としては許容されないような体系が構築されてきた。

45

8. ラッセルのパラドックス

床屋の深刻な問題

以下のようなルールを課せられた町に一人だけ存在する床屋がいる。
・自分でひげをそらない町の人全員のひげをそる。
・自分でひげをそる町の人のひげはそらない。

このとき、床屋自身は自分のひげはそるのか？

46

8. ラッセルのパラドックス 解決法

$A=\{x|x\in x\}$　も　$B=\{x|x\notin x\}$も集合ではないと考える。
→
自分自身が要素となる概念を使って集合を定義してはならない
→
集合理論：ZFC公理系

47

１０．まとめ

1. 直積
2. 集合の冪集合
3. 集合系の演算
4. ラッセルのパラドックス

演習問題

問題1

$U=\{1,2,3,4\}, V=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$とし，
それぞれの部分集合を$S=\{n\in U|n\leq 3\}$,
$T=\{n\in V|n\leq 6\}$とする。 直積$U\times V$を普遍集合とし，次に示す集合を外延的記法で表せ。

1. $\{(x,y)\ |x+y<5\}$
2. $\{(x,y)\ |y=2x+1\}$
3. $\{1,3\}\times V$
4. $(S\times T)^c$
5. $S^c\times T^c$

問題2

$A=B\cap C\rightarrow A\times A=(B\times B)\cap(C\times C)$
を証明せよ。

問題3

$U=\{1,2,3,4\}$の冪集合$\mathcal{F}(U)$を
外延的記法で示せ。

問題4

次の集合系について，共通部分と和集合を求めよ。

(1) $\langle A_n|n\in\mathbb{N}\rangle\ \ A_n=\left\{x\in\mathbb{R}|x^2\leq\frac{1}{n}\right\}$

(2) $\langle B_n|n\in\mathbb{N}\rangle\ \ B_n=\left\{x\in\mathbb{R}|x\geq -n\ and\ x<\frac{1}{n}\right\}$

(3) $\langle C_n|n\in\mathbb{N}\rangle\ \ C_n=\left\{x\in\mathbb{R}|x>0\ and\ x\leq\frac{1}{n}\right\}$

(4) $\langle D_n|n\in\mathbb{N}\rangle\ \ D_n=\{x\in\mathbb{R}|x\geq n\ and\ x<n+1\}$

問題5.

次の述語の演算法則を用いて，集合系の分配律を証明せよ。

「xを含まない命題pと自由変数xについての述語$Q(x)$について，以下が成り立つ。

1. $p\vee(\forall x[Q(x)])\equiv\forall x[p\vee Q(x)]$
2. $p\wedge(\exists x[Q(x)])\equiv\exists x[p\wedge Q(x)]$