2. 集合の基礎と全称記号・存在記号

植野真臣
電気通信大学　情報数理工学コース

本授業の構成

1．本日の目標

1．集合の記述法（外延的記法、内包的記法）が正しく使える
2．全称記号∀,　存在記号∃が使える
3．部分集合と包含関係を理解する
4．集合の演算（和、積、補、差、素，要素数）

2．重要な集合

∅ ：
ℕ ：
$\mathbb{N}^+$ ：
ℤ ：
ℚ：
ℝ：
ℂ ：

2．重要な集合

∅ ：空集合　（empty set）
　（ギリシャ語φとは違う）
ℕ ：自然数集合　(0を含む)
$\mathbb{N}^+$:自然数集合　(1以上)
ℤ ：整数集合
ℚ：有理数集合
ℝ：実数集合
ℂ ：複素数集合
要素数が有限の集合を有限集合(finite set),
要素数が無限の集合を無限集合(infinite set）と呼ぶ

普遍集合

Def
議論の対象とする全体集合

例
普遍集合を ℕ とする
⇒
自然数全体を全体集合とする

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$ と書く。

7

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：

内包的記法：

8

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$ （無限集合）

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

9

３．集合の「要素」の記法

ある対象aが集合Aの要素であるとき

$a \in A$ と書く。

外延的記法：集合の具体的要素を列挙する

$A = \{1,2,3,4,5\} = \{3,2,5,1,4\}$（有限集合）

$A = \{1,3,5,7 \cdots\}$ （無限集合）

内包的記法：集合の要素の共通特性で示す

$$A = \{n|\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}\}$$

（∩（かつ）を示す場合にはカンマで区切る）

$$A = \{n|\ 1 \leq n \leq 5, n \in \mathbb{N}, n\text{は奇数}\}$$

10

例

- $A = \{n|n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$を外延的記法で表せ。

11

例

- $A = \{n|n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 5\}$を外延的記法で表せ。
- $A = \{1,2,3,4,5\}$

12

例

- $A=\{2,4\}$を先の例の内包的記法に条件を足して表せ。

13

例

- $A=\{2,4\}$を先の例の内包的記法に条件を足して表せ。

- $A=\{n|\ 1\leq n\leq 5, n\in\mathbb{N},$ nは偶数$\}$

14

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

15

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，　$n\geq 0$が成り立つ」

16

４．全称記号

命題

「すべての自然数は0以上の値をとる」

↓

「任意の自然数nについて，　$n\geq 0$が成り立つ」

↓

「$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 0$」

∀：意味：すべての(all, any)　読み方: “for all”

日本語訳：

「$\mathbb{N}$に属するすべてのnについて, $n\geq 0$が成り立つ」

17

例

「すべての実数xについて, $x^2\geq 0$」を全称記号を用いて表せ.

18

例

「すべての実数xについて, $x^2 \geq 0$」を全称記号を用いて表せ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$$

19

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

20

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$ となる実数xが存在する」

21

5．存在記号

命題

「実数xについて$x^2 + 7x < 0$ となる場合がある」

↓

「$x^2 + 7x < 0$ となる実数xが存在する」

↓

「 $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 7x < 0$ 」

∃：意味：存在する(Exist)　読み方: “there exists”

22

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

23

例

「実数xについて$x^2 > 0, x < 0$となる場合がある」を存在記号を用いて表せ.

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0, x < 0$$

24

6. 部分集合

- Def (定義：　Definitionのこと)

対象としているもの全体を普遍集合（全体集合）と呼び，Uと書く．また，要素を一つも持たない集合を空集合といい，$\emptyset$で表す．

- Def

集合Aの要素が集合Bの要素でもあるとき，　AはBの部分集合であるといい，

$A \subseteq B$ または　$B \supseteq A$

で表す．

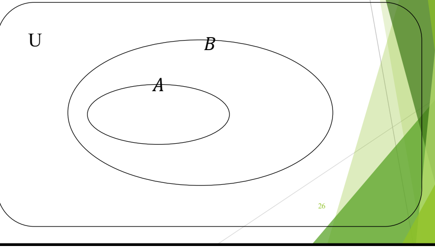
25

部分集合の数学的表現

Def $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

→は「ならば」という意味、

xがAに含まれているならば，そのxのすべてはBに含まれる．



26

注意

- Def $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$
- この部分集合の定義では，　B自身もBの部分集合であることがわかる．

27

例題　次の命題は正しいか？真偽を証明せよ。

(1) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

28

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

29

(1)の解答

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

に対して $A \subseteq B$

解答　　　真

証明

A の要素1,2,3はすべてBの要素で，

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$

が成り立つ．定義より

$\forall x[x \in A \rightarrow x \in B]$ならば$A \subseteq B$

$A = \{1,2,3\}$,$B = \{1,2,3,4\}$　に対して

$\forall x[x \in \{1,2,3\} \rightarrow x \in \{1,2,3,4\}]$　が成り立つ．

従って　$A \subseteq \mathrm{B}$

■

30

(2)の解答の方針

(2) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq$ B

解答　　偽

証明の方針

Aの要素で1はBの要素でない.

$\forall x[x \in A \to x \in B]$の否定⇒

$\exists x \in A[x \notin B]$

31

(2)の解答

(2) $A = \{1,2,3\}$, B= $\{2,3,4\}$

に対して $A \subseteq$ B

解答　　偽

証明

Aの要素で1はBの要素でない．従って

$\exists x \in A[x \notin B] \nLeftrightarrow \forall x[x \in A \to x \in B]$

定義より

「$\forall x[x \in A \to x \in B]$が成り立たない」ならば

「$A \subseteq$ Bは成り立たない」

従って、命題は偽　■

32

重要
全称記号∀の否定に存在記号∃が用いられる

$\neg\forall x[x \in A \to x \in B]$

→「Aのすべての要素がBの要素である」の否定

→「Aの要素の中でBの要素でないものがある」

→

$\exists x \in A[x \notin B]$

「～ならば　～である」の否定は、反例$\exists x$を一つ示せばよい。

33

同等

Def $A \subseteq B$ and $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

- AとBは等しいという.

34

同等

Def $A \subseteq B$ and $B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

- AとBは等しいという.

35

例題

$A = \{4n + 3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$,

$B = \{4m - 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$のとき, $A = B$を証明せよ.

36

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

$A=\{4n+3\ |n\in\mathbb{Z}\}$,
$B=\{4m-1\ |m\in\mathbb{Z}\}$のとき，$A=B$を証明せよ．

証明

(1) $A\subseteq B$

$\forall x\in A \Leftrightarrow \forall x\ [x=4n+3, n\in\mathbb{Z}]$

$\Rightarrow \forall x\ [x=4(n+1)-1, n\in\mathbb{Z}]$, $(n+1)\in\mathbb{Z}$より $\Rightarrow$ $\forall x\ [x=4m-1, m\in\mathbb{Z}] \Rightarrow \forall x[x\in B]$ より$\forall x[x\in$

■

真部分集合

- Def $A\subseteq B$ and $A\neq B \Leftrightarrow A\subset B$
  AはBの真部分集合であるという．

$\Updownarrow$

Def $A\subset B \Leftrightarrow \forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$
and ?????

真部分集合

- Def $A\subseteq B$ and $A\neq B \Leftrightarrow A\subset B$
  AはBの真部分集合であるという．

$\Updownarrow$

Def $A\subset B \Leftrightarrow \forall x[x\in A\rightarrow x\in B]$
and $\exists y\in B[y\notin A]$

例題

- $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$ を証明せよ．

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

例題

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ を証明せよ.

証明

①$\forall x[x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{Z}]$　が成り立つ

②$y = -1$について

$y \in \mathbb{Z}$であるが$y \notin \mathbb{N}$

従って

$$\exists y \in \mathbb{Z}[y \notin \mathbb{N}]$$

①②より$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

■

７．集合演算

集合A, Bと普遍集合をUとする.

A, BをUの部分集合として以下の演算を定義する.

(1) 和集合

(2) 積集合

(3) 補集合

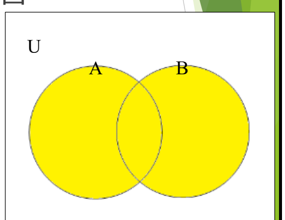
(4) 差

(1) 和集合

$A \cup B = \{x | x \in A, or\ x \in B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，A, Bの和集合とはAとBの要素をすべて併せた集合のこと

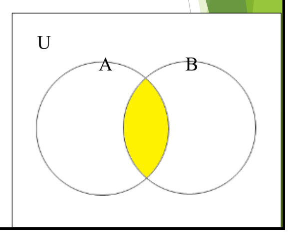


(2) 積集合

$A \cap B = \{x | x \in A, and\ x \in B\}$

集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，A, Bの積集合とは、AとBの共通要素のみからなる集合のこと

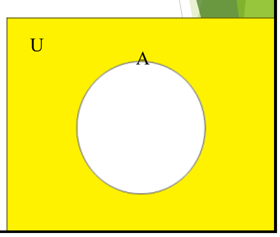


(3) 補集合

$\bar{A} = \{x | x \in U, and\ \ x \notin A\}$

普遍集合をUとし、その部分集合Aを考える.

このとき，Aの補集合とは　UのうちAに含まれない要素の集合のこと



(4)差

$A - B = \{x | x \in A, and\ \ x \notin B\}$

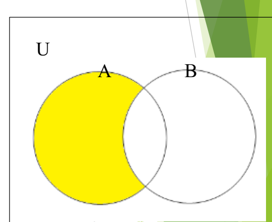
集合A, Bと普遍集合をUとする.

このとき，差$A - B$とは、AからBの要素を除いた集合のこと

$A - B = A \setminus B$と書くこともある.

$A - B = A \cap \overline{B}$

と書ける.



(5) 素

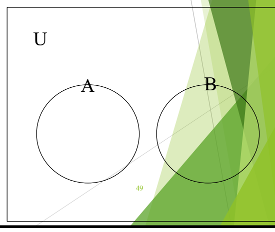
集合A, Bと普遍集合をUとする．

AとBに共通要素がない場合

$A \cap B = \emptyset$

「このときAとBは素である」

という．



8. ド・モルガンの法則を証明せよ

集合A, Bと普遍集合をUとする．

(1)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

(2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

ヒント

- 証明の鉄則

「まず定義に帰れ！！」

解答(1)

(1)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

証明 $A \cup B = \{x | x \in A, or\ x \in B\}$

$\overline{A \cup B} = \{x | x \in U, and\ \ x \notin A \cup B\}$

$= \{x | x \in U, and\ \ x \notin A, and\ x \notin B\}$

$= \bar{A} \cap \bar{B}$

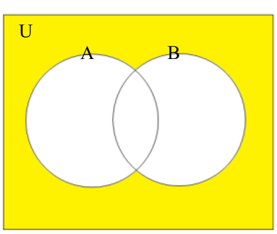
注意

$A \cup B$に含まれないのでそれぞれにも含まれない

■

(1)のイメージ

(1)$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$



解答(2)

(2)$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

証明

$A \cap B = \{x | x \in A, and\ x \in B\}$

$\overline{A \cap B} = \{x | x \in U, and\ \ x \notin A \cap B\}$

$= \{x | x \in U, and\ \ x \notin A, or\ x \notin B\}$

$= \bar{A} \cup \bar{B}$

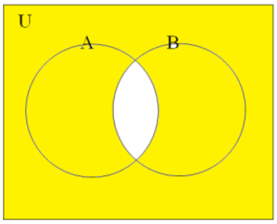
注意

AかつBに含まれないのでAに含まれないかBに含まれない

■

(2)のイメージ

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\}$,
$B = \{4,5\}$
このとき,
(1)和集合$A \cup B$
(2)積集合$A \cap B$
(3)補集合$\bar{A}$, $\bar{B}$
(4) $A - B$
(5) $\bar{A} \cap \bar{B}$
を求めよ.

例

普遍集合$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2,4\}$,
$B = \{4,5\}$
このとき,
(1)和集合$A \cup B = \{1,2,4,5\}$
(2)積集合$A \cap B = \{4\}$
(3)補集合$\bar{A} = \{3,5\}$, $\bar{B} = \{1,2,3\}$
(4) $A - B = \{1,2\}$
(5) $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} = \{3\}$

9. 要素の個数

集合Aが有限集合の場合，要素の数を

$n(A)$　や　$|A|$

で表す.

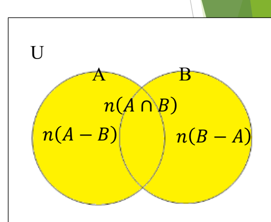
以下を証明せよ。
Th. 1.

Uを有限な普遍集合とする。
集合A, Bについて以下が成り立つ。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Th 1　Uを有限な普遍集合とする。
集合A, Bについて
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[ヒント]
$n(A \cup B)$
$= n(A - B) + n(B - A)$
$+ n(A \cap B)$



Th 1　Uを有限な普遍集合とする。
集合A, Bについて
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

[証明]

$$\begin{aligned}
&n(A \cup B)\\
&= n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)\\
&= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)\\
&+ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)
\end{aligned}$$

従って

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$　■

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。
$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

系 1 Corollary 1

Uを有限な普遍集合とする。
$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$$

[証明]

Th 1より，$n(U) = n(\bar{A}) + n(A) - n(\bar{A} \cap A)$.

$\bar{A} \cap A = \emptyset$より,
$$n(U) = n(\bar{A}) + n(A)$$
従って,

$n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$　■

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$
について
$A = \{m | m$は偶数$\}$,
$B = \{m | m$は奇数$\}$,
とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B)$$

例

普遍集合$U = \{m | 0 \leq m \leq 50, m \in \mathbb{N}\}$
について
$A = \{m | m$は偶数$\}$,
$B = \{m | m$は奇数$\}$,
とするとき,
$$n(A) = 26$$
$$n(B) = 25$$
$$n(A \cap B) = 0$$
$$n(A \cup B) = 51$$

8．まとめ

1．集合の記述法（外延的記法、内包的記法）
2．全称記号∀、存在記号∃
3．部分集合と包含関係
4．集合の演算（和、積、補、差、素,要素数）

演習問題1．次の集合を外延的記法でかけ。

(1) $A=\{n \mid 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}, n$は奇数$\}$

(2) $C=\{x \mid x^2+x-6<0, x \in \mathbb{Z}\}$

(3) $D=\{x \mid 2x^2-7x+3=0, x \in \mathbb{N}\}$

67

演習問題2．次の集合を内包的記法でかけ。

(1) $A=\{3,6,9,12,15\}$

(2) $B=\{\cdots,-10,-5,0,5,10,\cdots\}$

(3) $C=\{1,4,9,16,25,36\}$

(4) $D=\{0,4,8,12,16,\cdots\}$

68

演習問題3． 次の数について数の集合$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$に属するか属さないかを∈か∉を用いて表現せよ。

(1) $\frac{1}{2}$

(2) $\sqrt{3}$

(3) -2

(4) $1+i$

69

演習問題4. 次の数式を日本語で表せ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

(2) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x<0$

(3) $\exists n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \in \mathbb{N}$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$

(5) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x+y=0$

(6) $\exists a \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2-2x \geq a$

(7) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \mathrm{ax}+\mathrm{b}=0$

(8) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin x|<\mathrm{a}$

70

演習問題5. 次の日本語を全称記号，存在記号を用いて表せ

(1)複素数の中には、2乗すると実数になる数が存在する

(2)すべての実数xについて、$x^2-2x+2 \geq 0$が成り立つ

(3) 0と異なる任意の実数xについて、 $xy=1$ となる実数yが存在する

(4)任意の整数nに対し、 $\mathrm{n}+\mathrm{a}=\mathrm{n}$となる定数aが整数の中に存在する

(5)複素数の中には絶対値が1となる数が存在する

(6)すべての実数xについて、$e^x>0$である

(7)任意の実数xに対し、$x^2+x+2>a$となる定数aが自然数の中に存在する

(8)任意の実数aに対し、$x^2+x+2>a$となる有理数xが存在する

71

演習問題6.

(1) $A=\{a,b,c\}$に対して，Aの部分集合をすべて挙げよ．Aの部分集合の中で$\{a\} \in \mathrm{X}$となる集合X をすべて求めよ．

(2) 命題$A=\{2,3,5,6\}$，B$=\{2,3,4,8,9\}$に対して $A \subseteq$ Bが成り立たないことを証明せよ．

72

演習問題7

$A=\{2n+3m\ |n,m\in\mathbb{Z}\}$のとき，$A=\mathbb{Z}$を証明せよ.

演習問題8.

普遍集合U， 集合A,B,Cについて以下の関係がある.

$A\subseteq B$, and $B\subset C$, のとき，

$$A\subset \mathrm{C}$$

を証明せよ.

演習問題9.

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$
$$A=\{1,3,5,7,9\}$$
$$B=\{1,4,7\}$$

このとき，

(1)和集合$A\cup B$

(2)積集合$A\cap B$

(3)補集合$\bar{A}$, $\bar{B}$

(4) $A-B$

を求めよ.

演習問題10.

$U=\{n|1\le n\le 15, n\in\mathbb{Z}\}$を全体集合とし、部分集合A $=\{a|a$は素数$\}$, $B=\{b|b$は奇数$\}$, C $=\{c|c$は3の倍数$\}$を考える．以下の要素を列挙せよ.

(1) A, B,C

(2) $B\cup C$

(3) $B\cap C$

(4)$\bar{A}$

(5) $\overline{A\cup C}$

(6) $\bar{B}\cap C$

(7)$\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$

演習問題11. 次の命題を肯定形に変えよ。

(1) 「私の身長は160cm以上であり、かつ体重は50kg以上」ということはない。

(2) 「このボールは青いか、または赤くはない」ということはない。

(3) 「すべての人が冷蔵庫を持っている」とは限らない

(4) 「冷蔵庫を持っていない人がいる」ということはない

(5) (3)(4)を全称記号∀と存在記号∃を用いて書け。

演習問題12

普遍集合Uとその部分集合 Aについて

$$U-(U-A)=A$$

が成り立つことを証明せよ。

演習問題13.

普遍集合$U=\{m|1 \leq m \leq 100,\ m \in \mathbb{N}^+\}$について

$A=\{m|m$は2の倍数$\}$,

$B=\{m|m$は3の倍数$\}$,

とするとき，以下を求めよ。

$$n(A), n(B), n(A \cap B), n(A \cup B),$$
$$n(\bar{A} \cap B), n(\bar{A} \cup \bar{B})$$