15. 順序集合

植野真臣

本授業の構成

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法 （再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数） (1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

1. 本日の目標

① 半順序
② 全順序
③ ハッセ図
④ 最大元，最小元
⑤ 極大元，極小元
⑥ 上界、下界
⑦ 上限、下限

1. 順序集合

Def 1. 集合の要素間の「順序関係」が定義された集合の事。「順序」とは大小、高低、長短等の序列に関わる概念を抽象化したものである

例

整数、実数、など

「AさんはBさんの子孫である」という事を「A<B」という順序関係とみなす事で人間全体の集合も順序集合である。→赤の他人には順序判定はできない。このように比較不能のケースも含む。

2. 半順序集合と全順序集合

「AさんはBさんの子孫である」という事を「A<B」という順序関係とみなす事で人間全体の集合も順序集合と考えられる。 →

- 赤の他人には順序判定はできない。このように比較不可能のケースを許すことを強調した順序関係を半順序（関係）と呼び、その集合を半順序集合と呼ぶ。
- 半順序集合の中で順序が比較可能な部分集合を全順序（関係）と呼び、その集合を全順序集合と呼ぶ。

3. 半順序関係

Def. 2

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、

半順序(関係)と呼ぶ。

(1) 反射律　$\forall x \in U[xRx]$

(2) 反対称律　$xRy \land yRx \rightarrow x = y$

(3)推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R)を半順序集合と呼ぶ。

反対称律　の意味

$$xRy \land yRx \rightarrow x = y$$

の対偶

$$x \neq y \rightarrow \neg(xRy \land yRx)$$

異なる任意のx, yでは,かならず$x \leftrightarrows y$がない。

⇔

$x \rightarrow y$か $x \leftarrow y$か　→も←もつかないかのどれか。

離散数学 University of Electro-Communications

半順序関係の表現

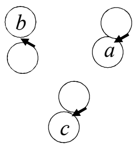
半順序を表現するためによく使われる記号

$$\leq, \subseteq, \precsim, \lesssim, \preccurlyeq$$

など

離散数学 University of Electro-Communications

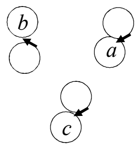
半順序の定義（有向グラフ）



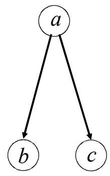
(1)反射律

離散数学 University of Electro-Communications

半順序の定義（有向グラフ）



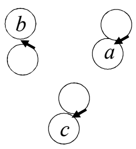
(1)反射律



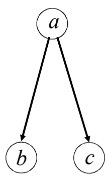
(2) 反対称律
（両方
の有向枝 ⇆
がついている
ところがない
こと）

離散数学 University of Electro-Communications

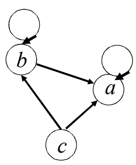
半順序の定義（有向グラフ）



(1)反射律



(2) 反対称律
（両方
の有向枝 ⇆
がついている
ところがない
こと）



(3)推移律
（有向枝をたどっ
ていける頂点に
は必ず直接、
有向枝がついて
いる）

離散数学 University of Electro-Communications

再掲：　同値関係

Def 3.

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

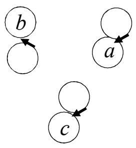
(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

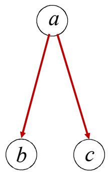
(3) 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R)を同値集合と呼ぶ。

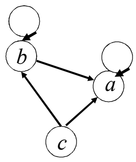
半順序の定義（有向グラフ）



(1)反射律

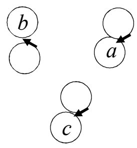


(2) 反対称律
ここが同値関係
との違い
対象律：双方向有向枝
⇆　がない

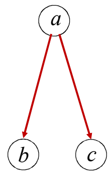


(3)推移律
（有向枝をたどっ
ていける頂点に
は必ず直接、
有向枝がついて
いる）

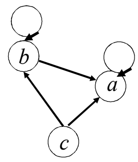
同値関係の定義（有向グラフ）



(1)反射律



(2) 反対称律
ここが同値関係
との違い
対象律：双方向
有向枝 ⇆　がな
い



(3)推移律
（有向枝をたどっ
ていける頂点に
は必ず直接、
有向枝がついて
いる）

例題1

$\mathbb{N}$ 上の関係 $>$ は，半順序か？その理由を証明せよ。

例題1

$\mathbb{N}$ 上の関係 $>$ は，半順序か？その理由を証明せよ。
[証明]
半順序関係でない。$x = 1$を仮定すると，$1 \ngtr 1$であり，　$\exists x \in \mathbb{N}[x \ngtr x]$。反射律　$\forall x \in A[xRx]$は成り立たない。$\mathbb{N}$上の関係$>$は，半順序でない。■

例題2.

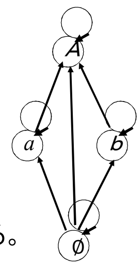
$A = \{a, b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。2^Aの要素の包含関係 $\subseteq$ は半順序関係であることを証明せよ。

例題2.

$A = \{a, b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係$\subseteq$は半順序関係であることを証明せよ。
[証明]

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$

$\emptyset \subseteq \emptyset$, $\{a\} \subseteq \{a\}$, $\{b\} \subseteq \{b\}$, $A \subseteq A$より，反射律を満たす。さらに$\emptyset \subseteq \{a\}$，$\emptyset \subseteq \{b\}$, $\emptyset \subseteq A$, $\{a\} \subseteq A$, $\{b\} \subseteq A$で　かつ関係グラフに双方向辺はないので，反対称律、推移律を満たす。従って，包含関係 $\subseteq$ は半順序関係である。■



例題3.

$\mathbb{Z}^+$上の関係 | を $x|y \Leftrightarrow x$はyの約数
と定義すると，|が半順序関係であることを証明せよ。

例題3.

$\mathbb{Z}^+$上の関係 | を $x|y \Leftrightarrow x$はyの約数
と定義すると，|が半順序関係であることを証明せよ。

[証明]

$\forall x \in \mathbb{Z}^+[x = 1 \times x]$より$\forall x \in \mathbb{N}[x|x]$。反射律を満たす。
$\exists k \in \mathbb{Z}^+ s.t., y = kx \land \exists k' \in \mathbb{Z}^+ s.t., x = k'y$は$k = k' = 1$のとき、$x = y$のときのみであり、反対称律を満たす。
$\exists k \in \mathbb{Z}^+, s.t., y = kx \land \exists k' \in \mathbb{Z}^+ s.t., z = k'y$のとき、$z = kk'x$より$\exists k'' = kk' \in \mathbb{Z}^+; z = k''x$,推移律を満たす。

従って，|は半順序関係。 ■

例題4.

$(m,n),(m',n') \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$に対し，$(m,n) \precsim (m',n') \Leftrightarrow (m \leq m') \land (n \leq n')$のとき，$\precsim$は半順序関係であることを証明せよ。

例題4.

$(m,n),(m',n') \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$に対し，$(m,n) \precsim (m',n') \Leftrightarrow (m \leq m') \land (n \leq n')$のとき，$\precsim$は半順序関係であることを証明せよ。

[証明]$(m \leq m) \land (n \leq n)$より$(m,n) \precsim (m,n)$。反射律を満たす。$(m,n) \precsim (m',n')$かつ$(m',n') \precsim (m,n)$のとき，$(m \leq m') \land (n \leq n') \land (m' \leq m) \land (n' \leq n)$より，$(m,n) = (m',n')$。反対称律を満たす。$(m,n) \precsim (m',n')$かつ$(m',n') \precsim (m'',n'')$のとき，$(m \leq m') \land (n \leq n') \land (m' \leq m'') \land (n' \leq n'')$より, $(m \leq m'') \land (n \leq n'')$。推移律を満たす。従って，$\precsim$は半順序関係。 ■

4. 全順序関係

Def 3. U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、全順序(関係)と呼ぶ。

(1) 反射律 $\forall x \in U[xRx]$

(2) 反対称律 $xRy \land yRx \to x = y$

(3)推移律 $xRy \land yRz \to xRz$

(4)完全性 $\forall x, \forall y \in U, [xRy \lor yRx]$

このとき，(U, R)を全順序集合と呼ぶ。

例題1.

（1） $\mathbb{N}$上の関係$\leq$は,半順序,全順序か？

（2） $\mathbb{N}$上の関係$<$は,半順序,全順序か？

例題1.

（1） ℕ上の関係≤は,半順序,全順序か？

(2) ℕ上の関係<は,半順序,全順序か？

[正答]

(1) 反射律: $\forall n \in \mathbb{N}$について$n \leq n$. 反対称律: $\forall a, \forall b \in \mathbb{N}, a \leq b \wedge\ b \leq a \rightarrow a = b$. 推移律:$\forall a, \forall b, \forall c \in \mathbb{N}, a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$. より, ℕ上の関係≤は半順序.さらに$\forall a, \forall b \in \mathbb{N}$について$a \leq b \vee\ b \leq a$. 従って、全順序でもある.

(2) 反射律: $\forall n \in \mathbb{N}$について$n \nless n$.従って, ℕ上の関係<は半順序ではない.全順序でもない. ■

例題2.

$A = \{a, b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。2^Aの要素の包含関係⊆は全順序関係か？

例題2.

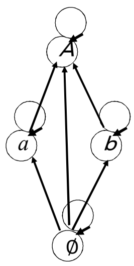
$A = \{a, b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。2^Aの要素の包含関係⊆は全順序関係か？

[正答]

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$$

$\emptyset \subseteq \emptyset$, $\{a\} \subseteq \{a\}$, $\{b\} \subseteq \{b\}$, $A \subseteq A$より，反射律を満たす。

さらに$\emptyset \subseteq \{a\}$, $\emptyset \subseteq \{b\}$, $\emptyset \subseteq A$, $\{a\} \subseteq A$, $\{b\} \subseteq A$より，反対称律、推移律を満たす。従って，包含関係⊆は半順序関係である。しかし，$\{a\}, \{b\}$は比較不可能で全順序ではない。 ■



例題3

$A = \{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$:アルファベット文字列

で$a < b < c < \cdots x < y < z$と定義する.

任意の$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n$に対して,

$$x \precsim y: \left(\begin{array}{c} x_1 < y_1 \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 < y_3) \\ \vdots \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n < y_n) \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n = y_n) \end{array} \right.$$

と定義すると, ≾は全順序関係か？

例題3

$A = \{a, b, c, \cdots, x, y, z\}$:アルファベット文字列

で$a < b < c < \cdots x < y < z$と定義する.

任意の$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in A^n$に対して,

$$x \precsim y: \left(\begin{array}{c} x_1 < y_1 \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2) \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 < y_3) \\ \vdots \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n < y_n) \\ \vee\,(x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = y_3 \cdots \wedge x_{n-1} = y_{n-1} \wedge x_n = y_n) \end{array} \right.$$

と定義すると, ≾は全順序関係か？

[回答] 反射律: $x \precsim x$. 反対称律: $\forall x, \forall y \in A^n, x \precsim y \wedge y \precsim x \rightarrow x = y$.

推移律:$\forall x, \forall y, \forall z \in A^n, x \precsim y \wedge y \precsim z$のとき、

$$x_1 < z_1 \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 < z_2) \vee (x_1 = z_1 \wedge x_2 = z_2 \wedge x_3 < z_3) \cdots$$
$$\vee\,(x_1 = z_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 = z_3 \cdots \wedge x_{n-1} = z_{n-1} \wedge x_n < z_n)$$
$$\vee\,(x_1 = z_1 \wedge x_2 = z_2 \wedge x_3 = z_3 \cdots \wedge x_{n-1} = z_{n-1} \wedge x_n = z_n)$$

より, $x \precsim z$.すべての二つの$\forall x, \forall y$について$x \precsim y \vee y \precsim x$, 全 順序でもある. ■

例題3の定義の順序関係

辞書式順序

と呼ぶ.

例

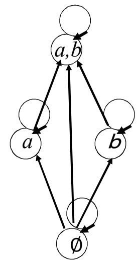
arc ≾ are ≾ arm ≾ book

半順序の図示化

$A=\{a,b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係
を図示化せよ.

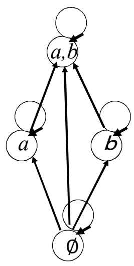
半順序の図示化

$A=\{a,b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係
を図示化せよ.
[回答]



半順序の図示化

$A=\{a,b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係
を図示化せよ.
[回答]



ごちゃごちゃしていてわかりにくい！！

5. ハッセ図

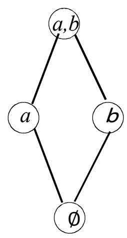
半順序集合の図示手法.
Def . 4.
有限な半順序集合Uについて,
$u,v\in U, s.t. u\ll v$のとき,点vを点uの上に描き,線で結んだものをハッセ図と呼ぶ.
ただし, $u\ll v$: $u<v$かつ,$\neg\forall x[u<x<v]$.
$u\ll v$は，uがvの直後に来る要素を示している.

半順序集合(U,R)のハッセ図の描き方

1. Uの各要素を頂点とする.
2. Rで小さい頂点を下に大きい頂点を上に描く.
3. $u,v\in U, s.t. u\ll v$のとき,点vと点uに辺を描く.
4. どの辺も下から上に単調に描かれる.

半順序の図示化

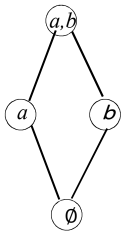
$A=\{a,b\}$とし，Aの冪集合を2^Aとする。
2^Aの要素の包含関係⊆は半順序関係
のハッセ図を描け.
[回答]



すっきり！！

ハッセ図の意味

x, yが比較可能⇔ x, yを結ぶ下から上への（上から下への）単調な道が存在する



(a,b)とa 比較可能
(a,b)とb 比較可能
(a,b)と∅ 比較可能
aとb 比較不可能
aと∅ 比較可能
bと∅ 比較可能

例題1

$A = \{x, y, z\}$の冪集合2^Aは包含関係について半順序集合である．そのハッセ図を描け．

例題1

$A = \{x, y, z\}$の冪集合2^Aは包含関係について半順序集合である．そのハッセ図を描け．

[回答]

まず2^A を列挙する．

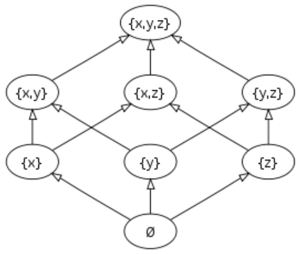
$2^A = \{\{\emptyset\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

2^Aの要素についてa $\ll b$の関係にある要素についてbをaの上に描き,線を引く．

例題1

$A = \{x, y, z\}$の冪集合2^Aは包含関係について半順序集合である．そのハッセ図を描け．

[回答]



例題2

$A = \{1,2,3,6,12,18,24\}$のとき，半順序集合$(A, x|y(x$はyの約数$))$

とするとき，ハッセ図を描け．

例題2

$A = \{1,2,3,6,12,18,24\}$のとき，半順序集合$(A, x|y(x$はyの約数$))$

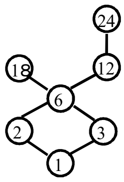
とするとき，ハッセ図を描け．

[解答]

$1 \ll 2, 1 \ll 3,\ 2 \ll 6, 3 \ll 6, 6 \ll 12, 6 \ll 18, 12 \ll 24$

例題2

$A = \{1,2,3,6,12,18,24\}$のとき，半順序集合
$(A, x|y(x$はyの約数$))$
とするとき，ハッセ図を描け．
[解答]
$1 \ll 2, 1 \ll 3, 2 \ll 6, 3 \ll 6, 6 \ll 12, 6 \ll 18, 12 \ll 24$

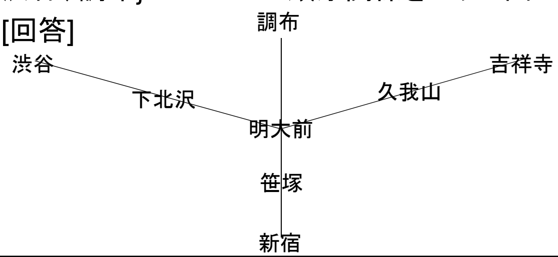


例題3

京王線,井の頭線で, $a \precsim b$を新宿駅から　a駅を
通って, b駅に最短距離で着くこと、とする.
{新宿，笹塚，明大前，久我山、吉祥寺、下北沢、
渋谷、調布}上での$\precsim$の順序関係をハッセ図で示せ.

例題3

京王線,井の頭線で, $a \precsim b$を新宿駅から　a駅を
通って, b駅に最短距離で着くこと、とする.
{新宿，笹塚，明大前，久我山、吉祥寺、下北沢、
渋谷、調布}上での$\precsim$の順序関係をハッセ図で示せ.
[回答]

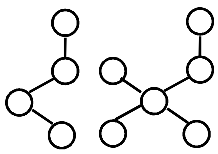


6. 最大元，最小元

Def. 5
$(U, \leq)$を半順序集合とする.
$u \in U, s.t. \forall x \in U,\ x \leq u$を$U$の最大元といい,
$\max U$と書く.
$u \in U, s.t. \forall x \in U,\ v \leq x$を$U$の最小元といい,
$\min U$と書く.

6. 最大元，最小元

Def. 5
$(U, \leq)$を半順序集合とする.
$u \in U, s.t. \forall x \in U,\ x \leq u$を$U$の最大元といい,
$\max U$と書く.
$u \in U, s.t. \forall x \in U,\ v \leq x$を$U$の最小元といい,
$\min U$と書く.
ただし，$\max U$や$\min U$は
存在しない場合もある.



7. 極大元，極小元

Def. 6
$(U, \leq)$を半順序集合とする.
$u \in U, s.t. \forall x \in U, u \leq x \rightarrow u = x$, を$U$の極大元という.
$u \in U, s.t. \forall x \in U, x \leq u \rightarrow u = x$, を$U$の極小元という.
極大元、極小元は有限半順序集合
には必ず存在する

7. 極大元，極小元

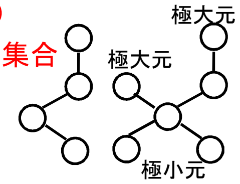
Def. 6

$(U, \leq)$を半順序集合とする.

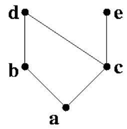
$u \in U, s.t. \forall x \in U, u \leq x \to u = x$を$U$の極大元という.（$u$より大きいものはない）

$u \in U, s.t. \forall x \in U, x \leq u \to u = x$ をUの極小元という.（uより小さいものはない）

極大元、極小元は有限半順序集合には必ず存在する



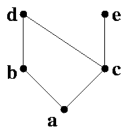
例題



左のハッセ図で，最大元、最小元があれば求めよ.

極大元，極小元をすべて求めよ.

例題



左のハッセ図で，最大元、最小元があれば求めよ.

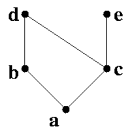
極大元，極小元をすべて求めよ.

[解答]

最大元 なし

最小元　a

例題



左のハッセ図で，最大元、最小元があれば求めよ.

極大元，極小元をすべて求めよ.

[解答]

最大元 なし

最小元　a

極大元　d, e

極小元　a

8. 上限，下限

Def. 7

$(U, \leq)$を半順序集合とする.

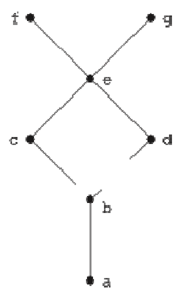
$X \subset U, \forall x \in X, u \in U, x \leq u$のとき，$u$を$X$の上界という. Xのすべての上界の最小元が存在するとき，それをXの上限といい，$\sup(X)$と書く.

Def. 8

$(U, \leq)$を半順序集合とする.

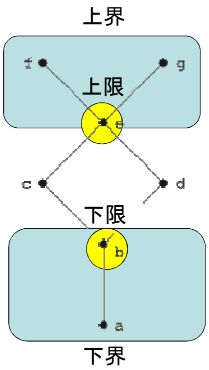
$X \subset U, \forall x \in X, v \in U, v \leq x$のとき，$v$を$X$の下界という. Xのすべての下界の最大元が存在するとき，それをXの下限といい，$\inf(X)$と書く.

例題1



左図のハッセ図で$X = \{b, c, d, e\}$とする. このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ.

例題1



左図のハッセ図で$X=\{b,c,d,e\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

[解答]

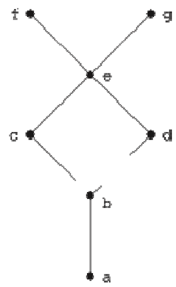
上界　$\{e,f,g\}$　下界$\{a,b\}$

上限　$\sup(X)=e$

下限　$\inf(X)=b$

離散数学 University of Electro-Communications

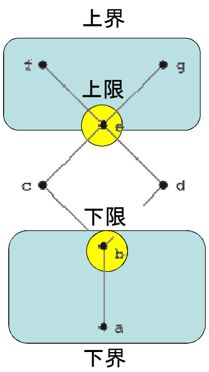
例題2



左図のハッセ図で$X=\{c,d\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

離散数学 University of Electro-Communications

例題2



左図のハッセ図で$X=\{c,d\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

[解答]

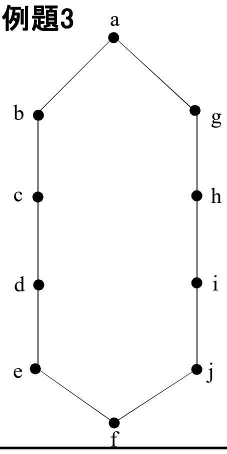
上界　$\{e,f,g\}$　下界$\{a,b\}$

上限　$\sup(X)=e$

下限　$\inf(X)=b$

離散数学 University of Electro-Communications

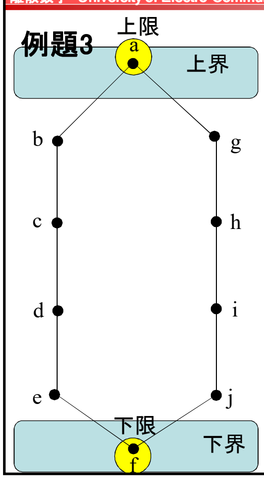
例題3



左図のハッセ図で$X=\{d,i\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

離散数学 University of Electro-Communications

例題3



左図のハッセ図で$X=\{d,i\}$とする．このとき，Xの上界，上限，下界、下限を求めよ．

離散数学 University of Electro-Communications

6. まとめ

① 半順序
② 全順序
③ ハッセ図
④ 最大元，最小元
⑤ 極大元，極小元
⑥ 上界、下界
⑦ 上限、下限

演習問題

問題1

$E = \{a, b, c\}$とし、Eの冪集合を2^Eとする。
(1)2^Eの元を求めよ。
(2)2^Eの元同士、包含関係⊆が成り立つかどうかを調べ、比較不可能ならばそれらを求めよ。

問題2

$A = \{a, b, c\}$に次のように半順序≦が入っているとき、ハッセ図で表わせ。
(1) $\mathrm{b} \leqq a, c \leqq a$
(2) $\mathrm{b} \leqq c$

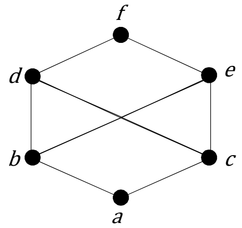
問題3

(1) 半順序集合$A = \{1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$について、$(A, x|y(x$は$y$の約数))とするとき、ハッセ図を描け描け。

(2)半順序集合Aの極大元と極小元を求めよ。

問題4

集合$B = \{a, b, c, d, e, f\}$に下のハッセ図による半順序が入っている。$\mathrm{L}_1 = \{b, c, e\}, \mathrm{L}_2 = \{a, d, f\}$について上界の集合、上限、下界の集合、下限を求めよ。



問題5

$X = \{a, b, c, d\}$とし、X上の二項関係を下の関係行列で定める。

	a	b	c	d
a	1	0	0	1
b	1	1	1	1
c	1	0	1	0
d	0	0	1	1

このとき、X上の二項関係Rは順序関係でないことを証明せよ。

問題6

集合U上の二項関係Rについて、
$[SO_1]$すべてのxについて$\neg R(x,x)$(非反射律)
$[SO_2]$ $R(x,y)$ならば$\neg R(y,x)$(非反射的反対称律)
$[SO_3]$「$R(x,y)$かつ$R(y,z)$」ならば$R(x,z)$(推移律)
$[SO_4]$すべてのx,yについて「$R(x,y)$または$R(y,x)$または$x=y$」
という性質を考える((x,y,z)はUを変域とする変数)。次の主張を証明せよ。
※小問は次スライド

問題6

(1)U上の二項関係Rが$[SO_1]$, $[SO_3]$をみたすならば、Rは$[SO_2]$をみたす。
(2)$\leq$がU上の順序関係ならば、$<$は$[SO_1]$, $[SO_3]$をみたす。
(3)$\leq$がU上の全順序関係ならば、$<$は$[SO_1]$, $[SO_3]$, $[SO_4]$をみたす。
(4)U上の二項関係Rに対し、$\acute{R}(x,y) \Leftrightarrow (R(x,y) \vee x=y)$と定める。
(a)Rが$[SO_1]$, $[SO_3]$をみたすならば、$\acute{R}$は U上の順序関係である。
(b)Rが$[SO_1]$, $[SO_3]$, $[SO_4]$をみたすならば、$\acute{R}$は U上の全順序関係である。