離散数学第 14 回演習問題類題解答例

2016 年 7 月 21 日

1

集合 $S = \{red, blue, green, yellow\}$ について，次のいずれが S の分割であるか答えよ．

(1) $P_1 = [\{red\}, \{blue, green\}]$

解答

分割でない．($yellow$ がどこにも属していない．)

(2) $P_2 = [\{red, blue, green, yellow\}]$

解答

分割である．

(3) $P_3 = [\emptyset, \{red, blue\}, \{green, yellow\}]$

解答

分割でない．($\emptyset$ が要素であるから．)

(4) $P_4 = [\{blue\}, \{red, yellow, green\}]$

解答

分割である．

2

集合 $S = \{1, 2, 3\}$ の分割をすべて求めよ．

解答

$$[\{1\}, \{2, 3\}]$$
$$[\{1, 2\}, \{3\}]$$
$$[\{1, 3\}, \{2\}]$$
$$[\{1\}, \{2\}, \{3\}]$$
$$[\{1, 2, 3\}]$$

3

次のことを証明せよ．

(1) X を空でない集合とするとき，

$$R_{\min} = \{(x, x); x \in X\}$$

は X 上の同値関係になる．X 上の任意の同値関係 R に対して，$R_{\min} \subseteq R$ が成り立つ．すなわち，$R_{\min}$ は X 上の最小の同値関係である．

解答

反射律，対称律，推移律が成り立つことを証明すればよい．

[反射律]

任意の $x \in X$ に対して，$(x, x) \in R_{\min}$，すなわち，$xR_{\min}x$．

[対称律]

$xR_{\min}y$ とすれば，$R_{\min}$ の定義より，$x = y$．したがって，$yR_{\min}x$．

[推移律]

$xR_{\min}y$ かつ $yR_{\min}z$ とすれば，$R_{\min}$ の定義より，$x = y = z$．したがって，$xR_{\min}z$．

最後に，R を X 上の任意の同値関係とする．$(x, y) \in R_{\min}$ とすれば，$R_{\min}$ の定義より，$x = y$．R は同値関係であり，反射律を満たすので，$(x, y) \in R$．これより，$R_{\min}$ は任意の同値関係の部分集合である．すなわち，$R_{\min}$ は X 上の最小の同値関係である．□

(2) X を空でない集合とするとき，

$$R_{\max} = X \times X$$

は，X 上の同値関係になる．X 上の任意の同値関係 R に対して，$R \subseteq R_{\max}$ が成り立つ．すなわち，$R_{\max}$ は X 上の最大の同値関係である．

解答

$R_{\max}$ の定義より，任意の $x, y \in X$ に対して，$(x, y) \in R_{\max}$．このことから，反射律，対称律，推移律が成り立つことは自明である．同値関係はすべて $X \times X$ の部分集合である．したがって，任意の同値関係 R に対して $R \subseteq R_{\max}$．すなわち，$R_{\max}$ は X 上の最大の同値関係である．□

(3) n を任意に固定した整数とするとき

$$R_{(n)} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{Z}, x - y \text{ は } n \text{ の倍数 }\}$$

は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係になる．通常は $xR_{(n)}y$ を

$$x \equiv y \ (modn)$$

と表し，x と y は n を法として合同であるという．

解答

反射律，対称律，推移律が成り立つことを証明すればよい．

[反射律]

任意の整数 x に対して，$x - x = 0$ は n の倍数である．したがって，$xR_{(n)}x$.

[対称律]

整数 x, y に対して，$xR_{(n)}y$ とする．このとき，$x - y$ は n の倍数である．すなわち，ある整数 k があって，$x - y = kn$ と表せる．これより，$y - x = -kn$ が成り立つが，$-k$ は整数であるから，これは $y - x$ が n の倍数であることを示している．よって，$yR_{(n)}x$.

[推移律]

整数 x, y に対して，$xR_{(n)}y$ かつ $yR_{(n)}z$ が成り立つとする．このとき，整数 k, k' があって $x - y = kn$，$y - z = k'n$．辺々を加えると，$x - z = (k + k')n$．$(k + k')$ は整数であるから，これは，$x - z$ が n の倍数であることを示している．よって，$xR_{(n)}z$．□

(4) 写像 $f : X \to Y$ に対して，

$$R_f = \{(x, y); x, y \in X, f(x) = f(y)\}$$

は X 上の同値関係になる．

解答

反射律，対称律，推移律が成り立つことを証明すればよい．

[反射律]
任意の整数 x に対して，$f(x) = f(x)$．したがって，$xR_f x$.
[対称律]
$x, y \in X$ に対して，$xR_f y$ とする．このとき，$f(x) = f(y)$．これより，$f(y) = f(x)$．したがって，$yR_f x$.
[推移律]
$x, y, z \in X$ に対して，$xR_f y$ かつ $yR_f z$ が成り立つとする．このとき，$f(x) = f(y) = f(z)$．したがって，$xR_f z$．□

4

R を集合 X 上の同値関係とするとき，次のことが成り立つことを証明せよ．

(1) $\forall x \in X : x \in [x]$

解答

R は同値関係であるから，反射律が成り立つ．したがって，任意の $x \in X$ に対して xRx．これは，$x \in [x]$ を表している．□

(2) $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow [x] = [y])$

解答

xRy が成り立つとする．$z \in [x]$ とすれば，zRx．さらに，xRy から，推移律により，zRy．これは，$z \in [y]$ を示している．したがって，$[x] \subseteq [y]$．同様に，$[x] \supseteq [y]$．よって，$[x] = [y]$．逆に，$[x] = [y]$ が成り立つとする．そのとき，(1) より，$x \in [x]$ であるから，$x \in [y]$．これは，xRy を示している．□

(3) $\forall x, y \in X : (x \in [y] \Leftrightarrow [x] = [y])$

解答

$x \in [y]$ ならば xRy．したがって，(2) より $[x] = [y]$．逆に，$[x] = [y]$ ならば (2) により xRy．よって，$x \in [y]$．□

(4) $\forall x, y \in X : ([x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y])$

解答

$[x] \cap [y] \neq \emptyset$ が成り立つとする．このとき，$z \in [x]$ かつ $z \in [y]$ を満たす $z \in X$ が存在する．これより，zRx かつ zRy．推移律により，xRy．したがって，(2) より $[x] = [y]$．□

(5) $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow \exists z \in X : x \in [z] \wedge y \in [z])$

解答

xRy とする．このとき，(2) により，$[x] = [y]$．(1) によって，$x \in [x]$ であるから，$x \in [y]$ でもある．また，$y \in [y]$ が成り立つので，x と y ともに含む同値類 $[y]$ が存在する．逆に，ある $z \in X$ が存在して $x \in [z]$ かつ $y \in [z]$ ならば，xRz かつ yRz．推移律より，xRy．$\square$