離散数学第 11 回演習問題解答例（8/1 修正）

2016 年 7 月 14 日

1

$U = \{1, 2, 3, 4\}$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ とする．次の $f : U \mapsto V$ は部分写像，写像，単射，全射，全単射，恒等写像のどれであるか?複数回答可.

1. $\{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$
   解答
   U の全ての要素から矢印が出ているが, V の要素 4 に矢印が当たっていない．ゆえに, 写像.
2. $\{(2, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   解答
   U の要素 4 から矢印が出ておらず，V の要素 4 に矢印が当たっていない．ゆえに，写像ではなく部分写像.
3. $\{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (1, 3)\}$
   解答
   U の全ての要素から矢印が出ているが, V の要素 4 に矢印が当たっていない．ゆえに, 写像.
4. $\{(3, 1), (2, 2), (1, 4), (4, 2)\}$
   解答
   U の全ての要素から矢印が出ているが, V の要素 3 に矢印が当たっていない．ゆえに, 写像.
5. $\{(2, 1), (3, 2), (4, 2), (3, 1)\}$
   解答
   U の要素 1 から矢印が出ておらず，V の要素 3,4 に矢印が当たっていない．ゆえに，部分写像.

2

次の f は部分写像，写像，単射，全射，全単射，恒等写像のどれであるか?複数回答可．

1. $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = x^6$

   解答

   例えば，$x = \pm 1$ のとき，$f(x) = 1$．ゆえに，写像であり全射である．

2. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x)^2 = x$

   解答

   $x, f(x)^2 \in \mathbb{N}$ であるから，$f(x) = \sqrt{x}$．このとき，例えば $x = 2, 3$ に対応する $f(x)$ が存在しない．ゆえに，写像ではなく部分写像である．

3. $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}; f(x) = x + 2$

   解答

   x と $f(x)$ は 1 対 1 対応するので，写像であり全単射である．

4. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = x - 2$

   解答

   $f(x) \in \mathbb{N}$ であるから，$x = 1, 2$ に対応する $f(x)$ が存在しない．ゆえに，写像ではない．

5. $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = |x|$

   解答

   $f(x)$ に対し，対応する x は 2 つ存在する．したがって，写像であり全射である．

6. $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}; f(x) = \frac{x}{2}$, x は偶数

   解答

   $f(x)$ と x は 1 対 1 対応するので，写像であり全単射である．

3

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x\text{ が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

は全射であることを証明せよ．

解答

$x \in \mathbb{N}$ について，$x = \begin{cases} \frac{y+1}{3} & (x:\text{奇数}) \\ 2y & (x:\text{偶数}) \end{cases}$ が存在する．$y \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N}$ より，$\forall y \in \mathbb{N}$ について，

$\exists x \in \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 3(\frac{y+1}{3})-1 & (x:\text{奇数}) \\ \frac{2y}{2} & (x:\text{偶数}) \end{cases} = y$

したがって，f は $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ への全射である．

4

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (x\text{ が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

は単射でないことを証明せよ．

解答

2つの異なる自然数 $x_1 = 1$，$x_2 = 4$ を仮定する．このとき，$f(x_1)$，$f(x_2)$ は，

$$f(x_1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$
$$f(x_2) = 4/2 = 2.$$

したがって，単射の定義，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立たない．
ゆえに単射でない．□

5

$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = 3x$ は写像であるが，全射でないことを証明せよ．

解答

$x \in \mathbb{N}$ を仮定する．このとき，x について $f(x) = 3x$ はただ一つ決まる．従って，各要素の写像にただ一つの要素が対応しているので，$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = 3x$ は写像である．
また，$y = f(x)$ とすると，$y \in \mathbb{N}$，$x \in \mathbb{N}$ より，$y = 1$ に対して，$f(x) = 1$ となる自然数 x が存在

しない．したがって，$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = 3x$ は全射でない．$\square$

6

$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \sin x$ は写像であるが，単射でないことを証明せよ．

解答

$x \in \mathbb{R}$ を仮定する．このとき，x について $f(x) = \sin x$ はただ一つ決まる．従って，各要素の写像にただ一つの要素が対応しているので，$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \sin x$ は写像である．
また，$x_1 = 0$，$x_2 = \pi$ としたとき，$f(x_1)$，$f(x_2)$ は

$$f(x_1) = \sin 0 = 0,$$
$$f(x_2) = \sin \pi = 0.$$

であり，単射の定義，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立たない．
ゆえに単射でない．$\square$