離散数学第 11 回演習問題類題解答例

2016 年 7 月 14 日

1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．次の $f{:}A \to A$ は写像か答えよ．

(1) {(3,1), (4,2), (1,1), (2,3), (5,3)}

解答

写像である．

(2) {(2,1), (3,5), (1,4), (2,3), (5,2), (4,2)}

解答

写像ではない．

(3) {(4,2), (2,3), (5,4), (1,5), (4,2), (3,4)}

解答

写像である．

2

以下で与えられる写像が，全射，単射，全単射であるかどうか答えよ．

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \sin x$

解答

$f_1(x) = \sin x = 2$ なる x が存在しないため，全射ではない．$f_1(0) = \sin 0 = 0$，$f_1(\pi) = \sin \pi = 0$ であるため，$f_1(0) = f_1(\pi)$ となり，単射でもない．

(2) $f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$，$f_2(x) = \sin x$

解答

$f_2(x) = \sin x = 2$ となる x が存在しないため，全射ではない．$\sin x$ は区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ で単調に増加するため，単射である．

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$，$f_3(x) = \sin x$

解答

$\sin x$ は -1 から 1 の間の全ての値をとるため，全射である．$f_3(0) = \sin 0 = 0$，$f_3(\pi) = \sin \pi = 0$ であるため $f_3(0) = f_3(\pi)$ となり，単射ではない．

(4) $f_4 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$，$f_4(x) = \sin x$

解答

x が $\frac{\pi}{2}$ から $\frac{\pi}{2}$ に増加すれば，$\sin x$ は単調に増加して，-1 から 1 の間のすべての値をとるため，$f_4(x)$ は全単射である．

(5) $f_5 : \mathbb{R} \to$ (平面)，$f_5(x) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$

解答

t が実数全体を動けば，$f_5(x) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$ を位置ベクトルとする点は，$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \end{cases}$ によってパラメータ表示される直線全体を動く．この直線は原点を通らないため，$f_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす実数 t は存在しない．したがって f は全射ではない．また，$f_5(s) = f_5(t)$ ならば，$f\begin{pmatrix} 1+s \\ 2-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$ だから，この等式の両辺の第 1 成分どうしは等しい．ゆえに，$1+s = 1+t$ より，$s = t$ が得られるため，f_5 は単射である．

3

$f(x) = x^2(2x-3)$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全射であることを証明せよ．

解答

$f(x)$ の微分，$f'(x) = 6x(x-1)$ であるから，$f(x)$ の増減表を書くと，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		-		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

である．また，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ で $f(x)$ は連続関数であるから，$y = f(x)$ は x 軸に並行な任意の直線と交点を持つ．よって，f は全射である．$\square$

4

$f(x) = x^3$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への単射であることを証明せよ.

解答

$a^3 = b^3$ とする. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) = 0$ より, $a = b$ である.
よって, $f(x) = x^3$ は単射である. □