14. 同値関係

植野真臣

本授業の構成

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法（再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数）(1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

1. 本日の目標

① 整数の合同
② 剰余類
③ 同値関係
④ 反射律
⑤ 対称律
⑥ 推移律
⑦ 同値類

1. 関係（二項関係）

再掲5章：
Def 1.
二つの集合U,Vの直積集合$U \times V$の部分集合Rを
UからVへの「関係」，もしくは「二項関係」という.

また，$R \ni (a,b)$のとき　aRb　：aとbは関係ある
　　$R \not\ni (a,b)$のとき　$a \not R b$　：aとbは関係なし
と書く.

2. 同値関係のイメージ

二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは
　同一視できるという関係

例：カレンダーの同値

例:カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。
a, bをある月の日とする。
aとbが同じ曜日である関係を定式化せよ。

例:カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。
a, bをある月の日とする。
aとbが同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]
$a, b \in \mathbb{Z}^+$について　aRb :$\exists m \in \mathbb{Z}^+[a - b = 7m]$

例:カレンダーの同値

曜日が同じ日は、同値関係にあるとみなしてよい。
a, bをある月の日とする。
aとbが同じ曜日である関係を定式化せよ。

[解答]
$a, b \in \mathbb{Z}^+$について　aRb :$\exists m \in \mathbb{Z}^+[a - b = 7m]$
このような関係を「 aとbが7を法として合同である」と呼ぶ。

3.整数の合同

整数の周期的な分類において同じ分類に入るもの。
離散数学の応用では、最も重要な概念の一つ。

3. 整数の合同

Def 1. 合同な整数
$m, n, p \in \mathbb{Z}$について

$$\exists q \in \mathbb{Z}[(m - n) = pq]$$

のとき,「 mとn はpを法として合同である」といい,

$$m \equiv_p n$$

と書く。$\equiv_p$が合同関係を示す演算子。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。○
2. 8 と 4は3を法として合同である。
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。 ○
5. 121と110は3を法として合同である。

例題

以下は正しいか？

1. 7 と 4は3を法として合同である。○
2. 8 と 4は3を法として合同である。 ×
3. 11と5は3を法として合同である。 ○
4. 18と15は3を法として合同である。 ○
5. 121と110は3を法として合同である。 ×

4. 整数の剰余類

Def 2.整数の剰余類

pを法とするnの剰余類とは，$n \in \mathbb{Z}$について

$$[n]_p = \{m \in \mathbb{Z} | \exists q \in \mathbb{Z}[(m-n) = pq]\}$$

と定義される。

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。
(1) $[7]_1$
(2) $[3]_2$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。
(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。
(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。
(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$
(4) $[1]_{10}$

例題

以下の$\mathbb{Z}$上の剰余類を求めよ。
(1) $[7]_1 = \mathbb{Z}$
(2) $[3]_2 = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots\}$
(3) $[4]_3 = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \cdots\}$
(4) $[1]_{10} = \{\cdots, -9, 1, 11, 21, \cdots\}$

ここまでのまとめ

整数の合同とは、ある周期で同じ分類ができること

同値関係は、その一般化。

二つの対象が "ある意味で" 同じである、あるいは
同一視できるという関係

↓

次に数学的に同値関係を定義する。

5. 同値関係

Def 3.

U上の関係Rが以下の条件を満たすとき、Rを同値関係と呼ぶ。

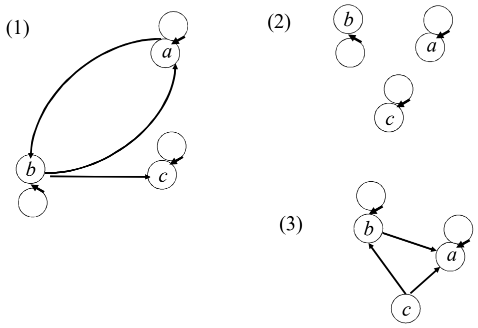
(1) 反射律　$\forall x \in U, xRx$

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

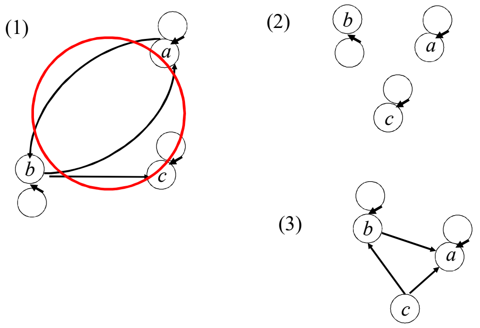
(3) 推移律　$xRy \land yRz \rightarrow xRz$

このとき，(U, R)を同値集合と呼ぶ。

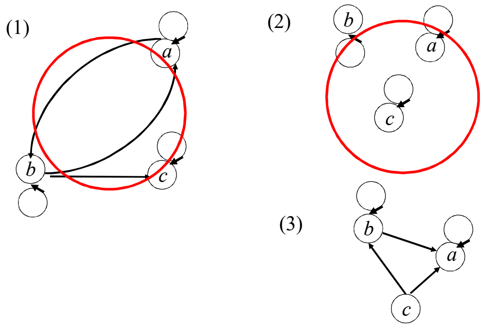
問1　反射性を満たすものは



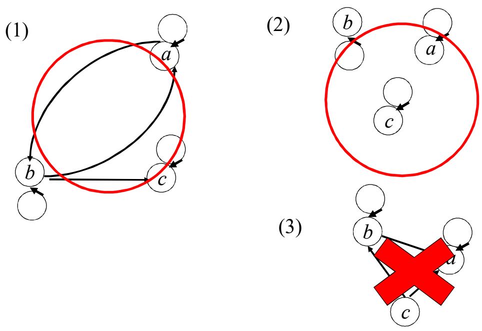
問1　反射性を満たすものは



問1　反射性を満たすものは



問1　反射性を満たすものは



問2　以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

$$(1)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

問2 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問2 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問2 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

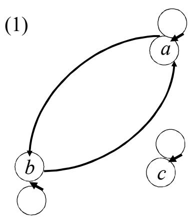
問2 以下の関係行列で反射性を持つものはどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

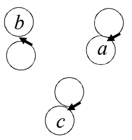
(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問3 対称性を持つものは？

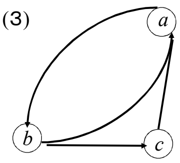
(1)



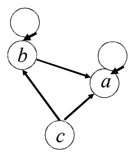
(2)



(3)

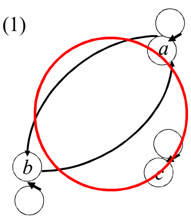


(4)

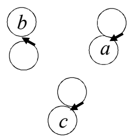


問3 対称性を持つものは？

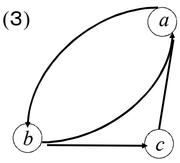
(1)



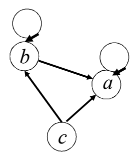
(2)



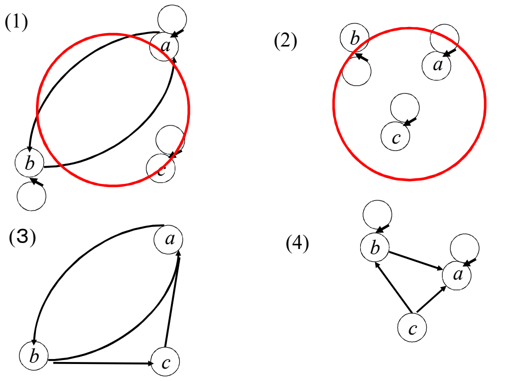
(3)



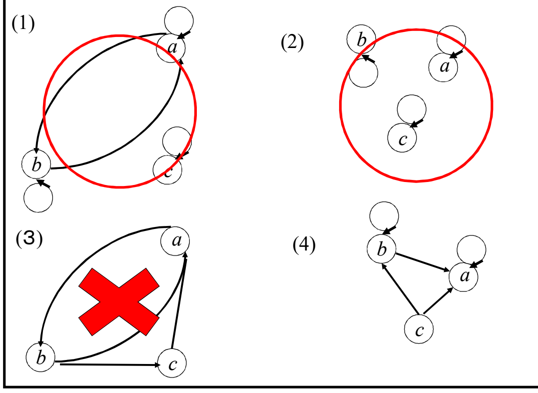
(4)



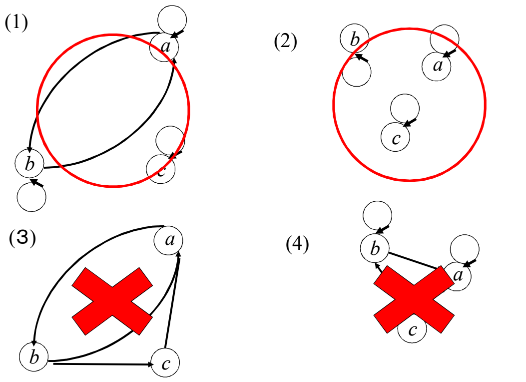
問3 対称性を持つものは？



問3 対称性を持つものは？



問3 対称性を持つものは？



問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

$$(1)\ R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad(2)\ R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$(3)\ R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\quad(4)\ R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

$$(1)\ R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad(2)\ R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$(3)\ R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\quad(4)\ R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

$$(1)\ R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\quad(2)\ R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$(3)\ R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\quad(4)\ R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

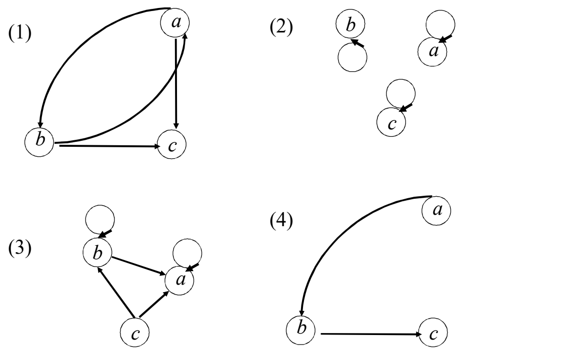
(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & ? & ? & 1 \\ 1 & ? & ? & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問4 対称性を持つ関係行列はどれか？

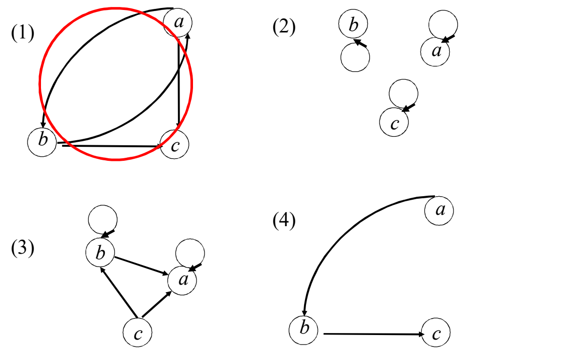
(1) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & ? & ? & 1 \\ 1 & ? & ? & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ? & ? & 0 \\ 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

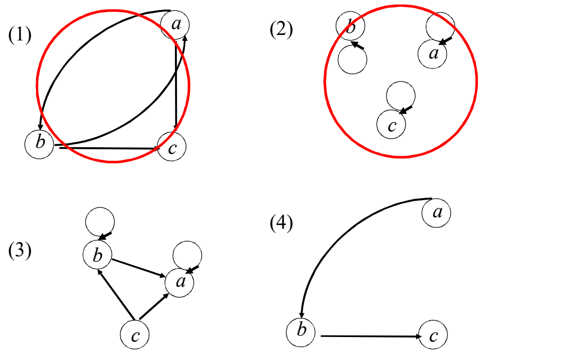
問5　推移性を満たすものは



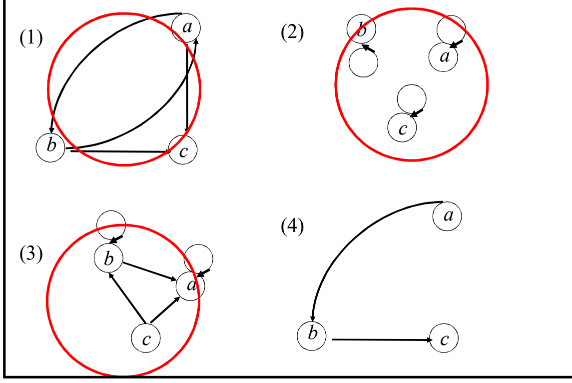
問5　推移性を満たすものは



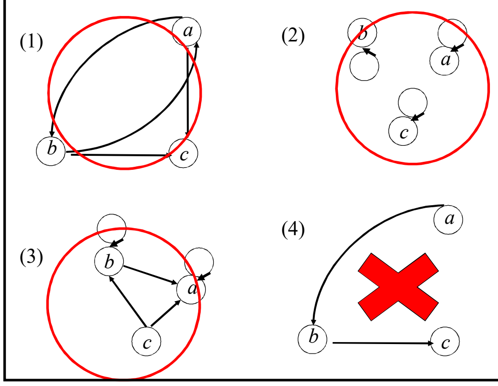
問5　推移性を満たすものは



問5　推移性を満たすものは



問5 推移性を満たすものは



Def 4 分割

集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists\, X \in C$, s.t., $x \in X$

を満たすCをいう.

例.

$U = \{a, b, c, d, e, f\}$のとき, $C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}\}$は集合$U$の分割

例題1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する. このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

例題1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する. このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明] （1）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

例題1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する. このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明] （1）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

例題1

U上の関係Rを, $\forall x, y \in U$とその分割Cに対して,

xRy: $\exists X \in C$, s.t., $x \in X$, $y \in X$と定義する. このとき, RはU上の同値関係であることを証明せよ.

[証明] （1）反射律　$\forall x \in U, xRx$

$x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$より, $\forall x \in U, xRx$.

(2) 対称律　$xRy \rightarrow yRx$

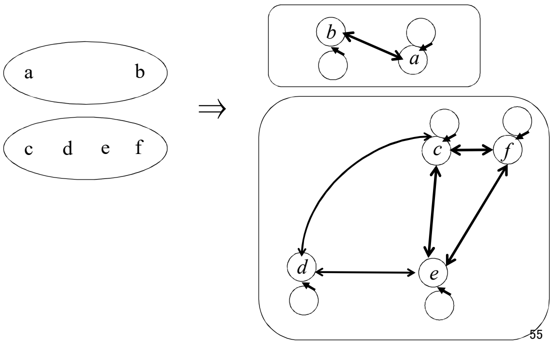
xRyより, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$.従って, yRx.

(3) 推移律　$xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$

$xRy \wedge yRz$より, $\exists X \in C$,s.t., $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

従って, (1)-(3)より, xRzは同値関係　■

分割された同グループ要素⇒同値関係



例題2

$a, b \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n, \exists m \in \mathbb{Z}^{+} \; [(a-b) = nm]$

のとき，~は同値関係であることを証明せよ。

例題2

$a, b \in \mathbb{Z}$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow \exists n, \exists m \in \mathbb{Z}[(a-b) = nm]$

のとき，~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：$a - a = 0$は$0 = nm$より，$a \sim a$

対称律：$a - b = nm$より，$b - a = (-1)nm$

従って、$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律：$a - b = nm, b - c = nm', m' \in \mathbb{Z}$のとき，

$a - c = nm + nm' = n(m + m'), m + m' \in \mathbb{Z}$

これらより，~は同値関係 ■

例題3

Aを三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき，~は同値関係であることを証明せよ。

例題3

Aを三角形全体の集合とする。$a, b \in A$に対して，

$a \sim b \Leftrightarrow a, b$は合同とするとき，~は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：aとaは合同なので，$a \sim a$

対称律：aとbが合同のとき，bとaも合同。

従って、$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律：aとb，bとcがそれぞれ合同のとき，aとcも合同。これらより，~は同値関係 ■

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき，~は同値関係であることを証明せよ。

また，すべての頂点は自分に有向辺を持っているとする。

例題4

Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a, b \in G$に対して，$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき，$\sim$は同値関係であることを証明せよ。

[証明]

反射律：すべての頂点は自分に有向辺を持っているので$a \sim a$

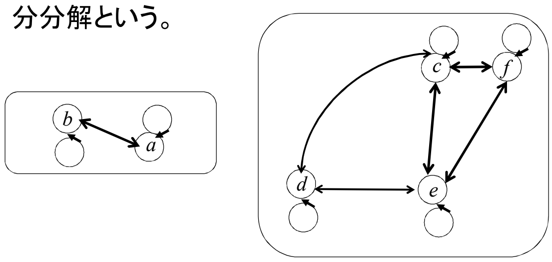
対称律：aからbに経路があり，bからaにも経路があるので　$a \sim b \rightarrow b \sim a$

推移律：$a \sim b$かつ$b \sim c$のとき，aからcにも経路があるので$a \sim c$

離散数学 University of Electro-Communications

補足

この同値関係による頂点のグループ分け（お互いに行き来可能な頂点集合）をグラフの強連結成分分解という。



離散数学 University of Electro-Communications

例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

離散数学 University of Electro-Communications

例題5

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，$x_1, x_2 \in U$　について

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

はU上の同値関係になることを証明せよ。

[証明]

反射律：$f(x) = f(x)$なので$x \sim x$

対称律：$f(x_1) = f(x_2)$ならば$f(x_2) = f(x_1)$

$x_1 \sim x_2 \rightarrow x_2 \sim x_1$

推移律：$x_1 \sim x_2$かつ$x_2 \sim x_3$のとき，$f(x_1) = f(x_2)$かつ$f(x_2) = f(x_3)$。このとき，$f(x_1) = f(x_3)$より　$x_1 \sim x_3$

これらより，$\sim$は同値関係　■

離散数学 University of Electro-Communications

6. 同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1) $x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2) 「$x \in P \wedge xRz$」$\rightarrow z \in P$

を満たすとき，PをRに関する同値類という。

離散数学 University of Electro-Communications

6. 同値類

Def 5.

$P \subseteq U, P \neq \emptyset$が

(1) $x, y \in P \rightarrow xRy$,

(2) 「$x \in P \wedge xRz$」$\rightarrow z \in P$

を満たすとき，Pを~に関する同値類という。

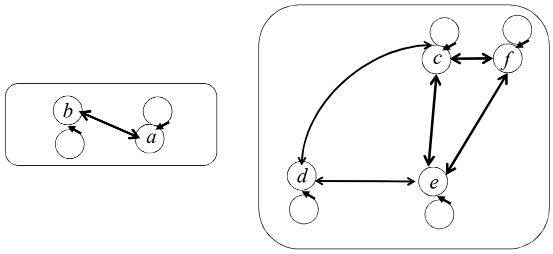
各同値類に属する各要素をその同値類の代表元と呼ぶ. ~で関係づけられた代表元aの同値関係の要素をすべて集めた集合をaの同値類と呼び，$[a]_R$と書く。同値類の集合は$\{[a]_R | a \in U\}$であり、商集合と呼ばれ，

U / R と書く。

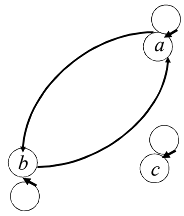
例　$U = \{a,b,c,d,e,f\}$の同値類と商集合

同値類　$[a]_R = \{a,b\}$, $[b]_R = \{a,b\}$, $[c]_R = \{c,d,e,f\}$, $[d]_R = \{c,d,e,f\}$, $[e]_R = \{c,d,e,f\}$, $[f]_R = \{c,d,e,f\}$

商集合$U/R = \{[a]_R \mid a \in U\} = \{\{a,b\},\{c,d,e,f\}\}$

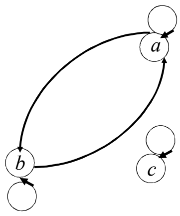


例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a,b \in G$に対して，同値関係$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V/\sim$を求めよ。

例題1



Vを有向グラフGの頂点集合とする。$a,b \in G$に対して，同値関係$a \sim b \Leftrightarrow a$から$b$に経路があり，$b$から$a$にも経路があるとき、と定義する。
左のグラフの頂点集合の商集合$V/\sim$を求めよ。

[解答]
商集合$V/\sim = \{\{a,b\},\{c\}\}$
注意　要素が一つでも同値類になる

例題2

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，$x_1, x_2 \in U$　について
$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
とする。$U = \{a,b,c,d\}$ 上の同値関係

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$$

のとき，$\sim$の同値類を求めよ。

例題2

写像$f: U \mapsto U; f(x)$，$x_1, x_2 \in U$　について
$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$
とする。$U = \{a,b,c,d\}$のU上の同値関係

$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = b, f(d) = c$$

のとき，$\sim$の商集合$U/\sim$を求めよ。
[解答]

$$U/\sim = \{\{a,c\},\{b,d\}\}$$

例題3

商集合U/RはUの分割であることを証明せよ.

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

定義に帰れ！！

商集合U / Rが分割の定義

「集合Uの分割とは,

1. $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$
2. $\forall X, Y \in C, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$
3. $\forall x \in U, \exists X \in C$, s.t., $x \in X$

を満たすCをいう.」

を満たしていることを順に証明していく.

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

$\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$を証明する.

商集合の定義より,$X \in U/R, s.t, \exists a \in U, X = [a]_R$. 同値類の定義より, $[a]_R \subseteq U$. より$X \subseteq U$.

同値関係の反射性より, aRa.従って$[a]_R \neq \emptyset$. したがって, $X \neq \emptyset$.

よって　$\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$　.

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

$\forall X, Y \in U / R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$を証明する.

$X, Y \in U / R$と仮定する.

$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$ の対偶$X \cap Y \neq \emptyset \longrightarrow X = Y$を証明する.

$X \cap Y \neq \emptyset$を仮定する.商集合の定義より,$X \in U/R, s.t, \exists a \in U, X = [a]_R$, $Y \in U/R, s.t, \exists a' \in U, Y = [a']_R$. $X \cap Y \neq \emptyset$より, $\exists a'' \in U, s.t.\ a'' \in X \wedge a'' \in Y$. すなわち, $a'' \in [a]_R$かつ$a'' \in [a']_R$.同値類の定義より, $a''Ra$かつ$a''Ra'$.同値関係の対称性より, aRa''.

aRa''.と$a''Ra'$.,同値関係の推移性からaRa'.これより .$[a]_R$=$[a']_R$.

従って, $X = Y$. 以上より$X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

$\forall x \in U, \exists X \in U / R$, s.t., $x \in X$を証明する.

$x \in U$を仮定する.

反射性から,　xRx.

同値類の定義より,　$x \in [x]_R$.

従って,　$\exists X \in U / R$, s.t., $x \in X$.

例題3

商集合U / RはUの分割であることを証明せよ.

[証明]

(1) $\forall X \in C, X \subseteq U \wedge X \neq \emptyset$

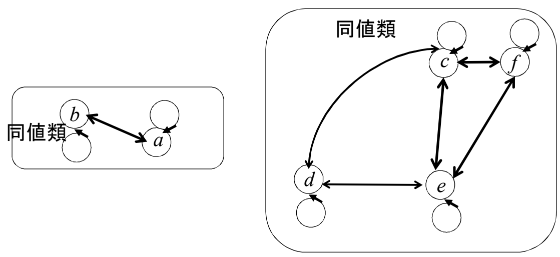
(2) $\forall X, Y \in U / R, X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$

(3) $\forall x \in U, \exists X \in U / R$, s.t., $x \in X$

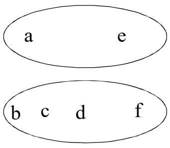
より,

商集合U / RはUの分割である.　■

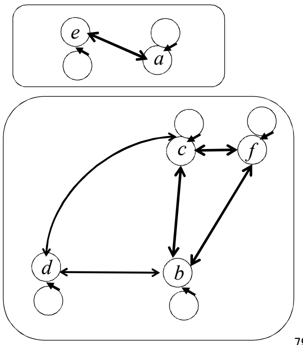
商集合のことを同値分割ともいう



つまり同値関係⇔あるルール(関係、もしくは2変数述語＝2変数条件)によって分割された同グループ要素



⇔



xRy: xが母音のときyも母音 またはxが子音のときyも子音.

離散数学 University of Electro-Communications

同値類

同値類⇔あるルール(関係、もしくは2変数述語＝2変数条件)によって余すところなく、 背反に分割されたグループ

同値関係とは、すべての要素を背反にグループ化するための2変数述語(＝2変数条件).

離散数学 University of Electro-Communications

再掲:カレンダーとは7を法とした同値類(同値分割)

離散数学 University of Electro-Communications

6. まとめ

① 整数の合同
② 剰余類
③ 同値関係
④ 反射律
⑤ 対称律
⑥ 推移律
⑦ 同値類

離散数学 University of Electro-Communications

演習問題

離散数学 University of Electro-Communications

問題1

ℤ上の関係

$a \sim b \Leftrightarrow a^3 = b^3$

は同値関係であることを証明せよ。

問題2

$\mathbb{Z}$上の関係

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, (a+b) = 2k$$

は同値関係であることを証明せよ。

問題3

M_nを$n \times n$行列全体の集合とする。

$A, B \in M_n$に対して,

$A \sim B \Leftrightarrow$ある正則行列Pが存在して$B = P^{-1}AP$とするとき，~が同値関係であることを証明せよ。

問題4

任意の集合A, Bと任意の関数$f: A \rightarrow B$を考える. A上の関係：

任意の$x, y \in A$に対して, $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$とする. このとき,

~が同値関係となることを証明せよ.

問題5

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{N}^2, (x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 + y_2 = x_2 + y_1)$$

のとき, ~が同値関係となることを証明せよ.