11.写像(関数) (1)

植野真臣

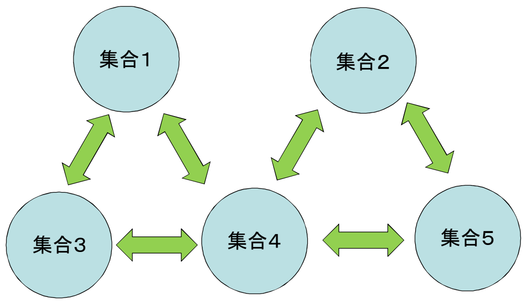
本授業の構成

4月14日：第1回：命題と証明
4月21日：第2回：集合の基礎、全称記号、存在記号
4月28日：第3回：命題論理
5月12日：第4回：述語論理
5月19日：第5回：述語と集合
5月26日：第6回：直積と冪集合
6月2日：第7回：様々な証明法 (1)
6月9日：第8回：様々な証明法 (2)
6月16日：第9回：様々な証明法（再帰的定義と数学的帰納法）
6月23日：第10回：中間試験
6月30日：第11回：写像（関数）(1)
7月7日：第12回：写像 (関数) (2)
7月14日：第13回：写像と関係：二項関係、関係行列、グラフによる表現
7月21日：第14回：同値関係
7月28日：第15回：順序関係：半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
8月4日：期末試験（補講があればずれていきます。）

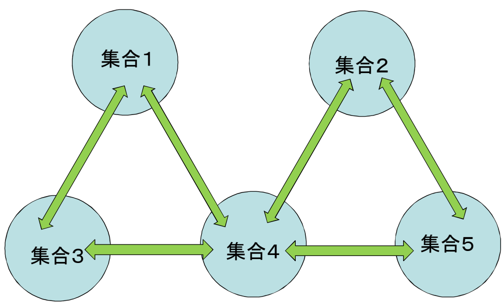
1. 本日の目標

① 関係の紹介
② 関数の中の関数、写像
③ 部分写像と写像
④ 単射と全射、全単射

2. これまで集合と集合同士の関係について学んできた



2. これから学ぶこと(集合の要素間の関係)



3. 関係

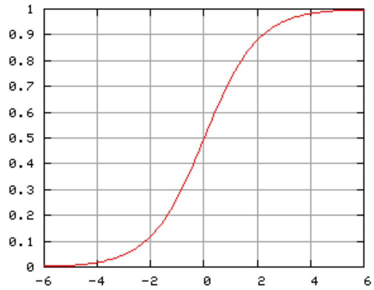
再掲5章：
Def 1.
二つの集合U, Vの直積集合$U \times V$の部分集合RをUからVへの「関係」という.

また，$R \ni (a, b)$のとき　aRb ：aとbは関係ある
　　　$R \not\ni (a, b)$のとき　$a\not R b$ ：aとbは関係なし
と書く.

3. 関係の特殊系としての写像

最初に関係のなかの特殊系である写像について学び、それを徐々に一般化していく

関数$f(x)$

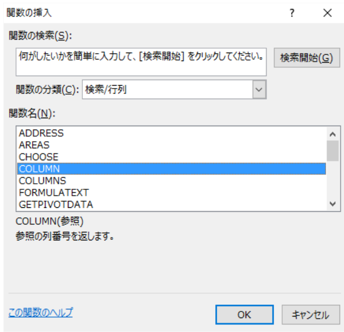


$n!$ （関数fact(int n)の再帰呼び出し）

```
int fact(int n)
{
  int m;

  if (n == 0)
    return 1;      // 0! = 1
  /* 以下、n が 0 でないとき */
  m = fact(n - 1);     // (n−1)! を求めてそれを m とおく。ここのfact(n-1)が再帰呼出し。
  return n * m;        // n! = n * m
}
```


関数（EXCEL）



確率変数

例

コインの表が出ると$x = 1$,裏が出ると$x = 0$という確率変数がある．$\mathrm{P}(x) = 0.5$である．

一般に確率変数は関数である．

$$x = \begin{cases} 1: \text{コインの表が出る} \\ 0: \text{コインの裏が出る} \end{cases}$$

連続量に関する確率変数の定義

確率空間(Ω, A, P) に対し, Ω から実数Rへの関数 $X : \Omega \rightarrow R$が, 任意の実数r に対し

$\{X \leq r\} \in A$ （累積値が有限） を満たすならば,

X を確率空間(Ω, A, P) 上の確率変数という.

4. 関数

Def 2

変数x, yについて，xの値（数値以外でも可）が決まるとyの値が一つだけ決まるとき，yはxの関数である，といい，

$$y = f(x)$$

と書く。

変数xの変域を「定義域」といい，関数値yの取り得る値の変域を「値域」という。

例題

自動販売機に対して、入力を「お金」、出力を「飲み物」と考えるとこれは関数になるのか？

例題

自動販売機に対して、入力を「お金」、出力を「飲み物」と考えるとこれは関数になるのか？

正解

関数にならない。

例えば，入れるお金を「120円」にしたとき、それに対する出力は、「コーラ」もあれば、「オレンジジュース」もあり、一つだけの飲み物への対応にならないからである。出てくる飲み物は押すボタンの関数である。

5. 部分写像

Def 3

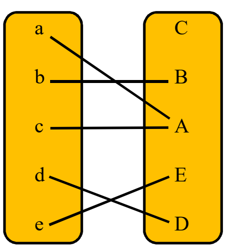
集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

注）写像は関数と同義である。

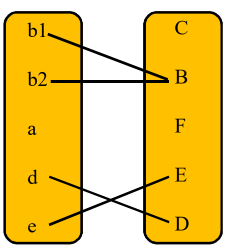
このとき，集合Uの要素に対応するVの要素が存在しない場合も許容する。この関係をUからVへの部分写像という。fがUからVへの部分写像であることを　$f: U \mapsto V$と書く。

Uをfの始域，Vをfの終域という。

写像と部分写像

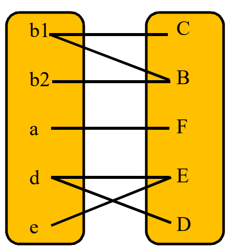


写像（関数）

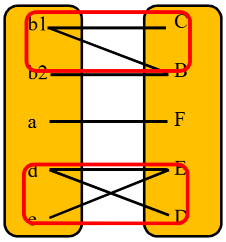


部分写像

以下は部分写像か？



以下は部分写像か？



部分写像でない

Def: 集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

1つの要素が1つの要素に対応していない。
2つの要素が対応している要素が存在する。

U, Vが有限集合の場合の記述例

$$U = \{a, b, c, d\}, \qquad V = \{A, B, C, D\}$$

小文字を大文字に写像

$$f: U \mapsto V; a \mapsto A, b \mapsto B, c \mapsto C, d \mapsto D$$

もしくは

$$f: U \mapsto V; f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C, f(d) = D$$

U, Vが無限集合（もしくは多要素）の場合の記述例

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N};\ x \mapsto \sqrt{x}$$

もしくは

$$f: x \in \mathbb{N} \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{N}$$

もしくは

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \sqrt{x}$$

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。
ただし，$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。
ただし，$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
証明
定義に戻れ：Def 3 集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。
→全称命題の否定；否定事例の存在命題の証明を用いる。

例題1.

$$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$$

は写像でないことを証明せよ。
ただし，$\mathbb{R}^+ = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
証明
Def 3
定義に戻れ；集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。
→全称命題の否定；否定事例の存在命題の証明を用いる。
$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$では，$f(1) = \pm 1$
となり，写像された要素が二つ対応していることがある。従って，
$f: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \pm x$
は写像ではない。 ■

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def 3

定義に戻れ：

集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は写像であることを証明せよ。

証明

Def 3

定義に戻れ：集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

$x \in \mathbb{R}$を仮定する。このとき，xについて$f(x) = x^2$はただ一つだけ決まる。従って，各要素の写像にただ一つの要素が対応しているので，$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$は写像である。 ■

例題3

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a,b,c,d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2,\mathrm{c}), (3,\mathrm{c})\}$

(2) $\{(2,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (1,\mathrm{a})\}$

(3) $\{(3,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題3

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a,b,c,d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2,\mathrm{c}), (3,\mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (1,\mathrm{a})\}$

(3) $\{(3,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題3

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a,b,c,d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2,\mathrm{c}), (3,\mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2,\mathrm{b}), (3,\mathrm{a}), (1,\mathrm{a})\}$ 部分写像で写像

(3) $\{(3,\mathrm{b}), (2,\mathrm{a}), (3,\mathrm{c})\}$

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題3

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a,b,c,d}\}$ とする。次の $f{:}\,U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2,\mathrm{c}),(3,\mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(1,\mathrm{a})\}$ 部分写像で写像

(3) $\{(3,\mathrm{b}),(2,\mathrm{a}),(3,\mathrm{c})\}$ 部分写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題3

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a,b,c,d}\}$ とする。次の $f{:}\,U \mapsto V$は部分写像であるか？もし，部分写像の場合は写像であるかどうかを答えよ。

(1) $\{(2,\mathrm{c}),(3,\mathrm{c})\}$ 部分写像だが写像でない

(2) $\{(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(1,\mathrm{a})\}$ 部分写像で写像

(3) $\{(3,\mathrm{b}),(2,\mathrm{a}),(3,\mathrm{c})\}$ 部分写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)} 部分写像で写像

6. 定義域と値域

$$f{:}\,U \mapsto V$$

Uをfの始域，Vをfの終域という。

特にUの要素のうち，写像fによる値が存在する要素を集めたUの部分集合を「定義域」と呼ぶ。

$\mathrm{dom}(f)$ と書く。$U\,/\,\mathrm{dom}(f)$ を「未定義域」と呼ぶ。

また，Vの要素のうち，あるUの要素のfによる値になっている要素を集めたVの部分集合を「値域」と呼ぶ。$\mathrm{ran}(f)$ と書く。

定義域と値域

$\mathrm{dom}(f) = \{x|???????\}$で表せ。

$\mathrm{ran}(f) = \{y|???????\}$で表せ。

定義域と値域

$$\mathrm{dom}(f) = \bigcup_{y} \{x|f(x) = y)$$

$$\mathrm{ran}(f) = \cup_x \{y|f(x) = y)$$

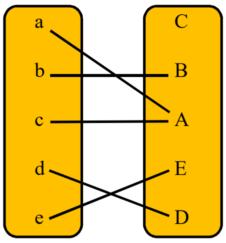
なので　量化子を用いると？？

定義域と値域

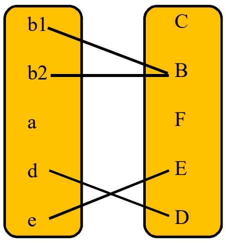
$$\mathrm{dom}(f) = \{x|\exists y, f(x) = y\}$$

$$\mathrm{ran}(f) = \{y|\ \exists x, f(x) = y\} = \{f(x) \in U\}$$

例題　次の写像の定義域と値域は？



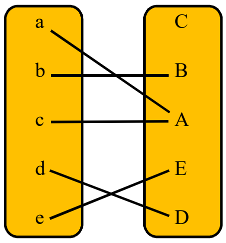
dom(f) =?
ran(f) =?



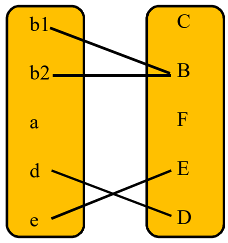
dom(f) =?
ran(f) =?

離散数学 University of Electro-Communications

例題　次の写像の定義域と値域は？



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, D, E\} \neq V$
未定義域$= \emptyset$



$\mathrm{dom}(f) = \{b1, b2, d, e\} \neq U$
$\mathrm{ran}(f) = \{B, D, E\} \neq V$
未定義域$= \{a\}$

離散数学 University of Electro-Communications

7. 写像fとgが等しい

Def. 4

2つの写像 $f: A \mapsto B$,　$g: C \mapsto D$が等しいとは,

(1) $A = C$　始域が等しい

(2) $B = D$　終域が等しい

(3) $\forall u \in U, f(u) = g(u)$.　関数の値が等しい

離散数学 University of Electro-Communications

8. 恒等写像

Def 5.

$f: U \mapsto U; f(x) = x$

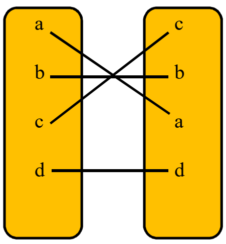
となる写像を恒等写像という。

$\mathrm{id}u: U \mapsto U; \mathrm{id}u(x) = x$.

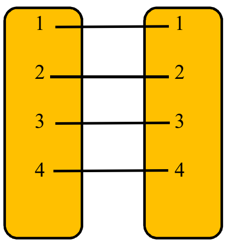
とかく。$\mathrm{id}u$のuは始集合がUであることを示している。

離散数学 University of Electro-Communications

恒等写像の例



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c,\ \mathrm{d}\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{a, b, c,\ \mathrm{d}\} = V$
未定義域$= \emptyset$



$\mathrm{dom}(f) = \{1,2,3,4\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{1,2,3,4\} = V$
未定義域$= \emptyset$

離散数学 University of Electro-Communications

9. 単射

Def 6

写像$f: U \mapsto V; f(x)$

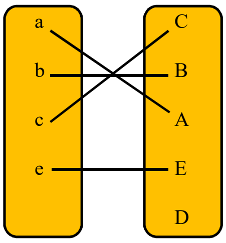
$\forall x_1, \forall x_2 \in U, x_1 \neq x_2$ならば

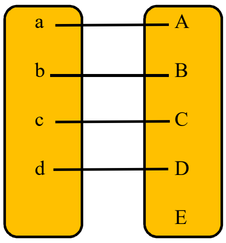
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

のとき，fはUからVへの「単射」であるという。

「1対1の写像」 ともいう。

単射の例



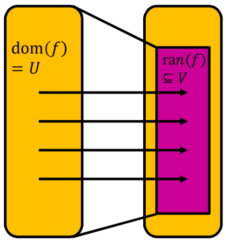


$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, E\} \neq V$
未定義域$= \emptyset$

$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, D\} \neq V$
未定義域$= \emptyset$

離散数学 University of Electro-Communications

重要ポイント：単射のイメージ



$\mathrm{dom}(f) = U$
$\mathrm{ran}(f) \subseteq V$
未定義域$= \emptyset$

離散数学 University of Electro-Communications

9. 単射の性質

Th 1.
写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について
$\forall x_1, \forall x_2 \in U, f(x_1) = f(x_2)$
ならば$x_1 = x_2$のとき，fはUからVへの「単射」である。

[証明]
Def 6の命題の対偶より明らか ■

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は単射であるか？
(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$
(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$
(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は単射であるか？
(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない
(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$
(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

離散数学 University of Electro-Communications

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は単射であるか？
(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない
(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ ×：写像だが3と1が同じ値に写像
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$
(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × :そもそも写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ × :写像だが3と1が同じ値に写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$ × :そもそも写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)}

例題1

$U = \{1,2,3\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × :そもそも写像でない

(2) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a})\}$ × :写像だが3と1が同じ値に写像

(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (3, \mathrm{c})\}$ × :そもそも写像でない

(4) {(1,b), (3,a), (2,c)} ○

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 4$$

が単射であることを証明せよ。

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 4$$

が単射であることを証明せよ。

証明

定義に戻れ:対偶「$\forall x_1, \forall x_2 \in U[f(x_1) = f(x_2)$ ならば$x_1 = x_2]$のとき，fはUからVへの「単射」である。」

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，$f(x_1) = f(x_2)$と仮定する。

$3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$ より $x_1 = x_2$ となる。

従って，fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への単射である。 ■

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でないことを証明せよ。

証明

含意型命題の否定→反例の存在型命題の証明

定義に戻れ:$\forall x_1, \forall x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ならば$f(x_1) \neq f(x_2)$

異なる二つの実数$x_1 = 1, x_2 = -1$を仮定する。

このとき，$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1$となり，$f(x_1) \neq f(x_2)$は成り立たない。従って，

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は単射でない ■

10. 全射

写像$f: U \mapsto V; f(x)$

について「$\mathrm{ran}(f) = V$」が成り立つとき，「全射」もしくは「上への写像」という。

↓

「Vのすべての要素はあるUの要素の 写像の値になっている」

10. 全射

例題1．

「Vのすべての要素はあるUの要素の写像の値になっている」を量化子を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

「？？？？？？？？？？？」

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」であるという。

10. 全射

例題1．

「Vのすべての要素はあるUの要素の写像の値になっている」を量化子を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

「$\forall y \in V$, ？？？？？？？」

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」であるという。

10. 全射

例題1．

「Vのすべての要素はあるUの要素の写像の値になっている」を量化子を用いて数学的に定義せよ。

Def 7

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

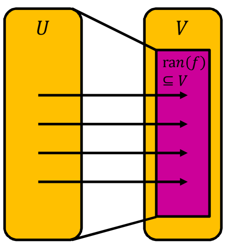
$$\forall y \in V, \exists x \in U\ s.t. f(x) = y$$

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」であるという。

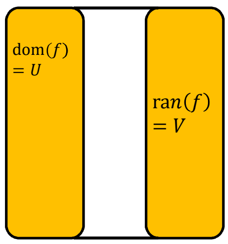
重要

写像$f: U \mapsto V; f(x)$について

$$\forall y \in ran(f), \exists x \in U\ s.t. f(x) = y$$



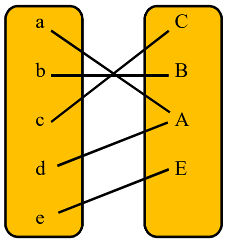
重要ポイント：全射のイメージ



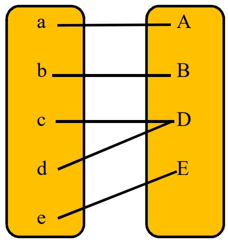
$\mathrm{dom}(f) = U$
$\mathrm{ran}(f) = V$
未定義域$= \emptyset$

全射の例

$\exists x \in U$はひとつとは限らないことに注意！！



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
$\mathrm{Ran}(f) = \{A, B, C, E\} = V$
未定義域$= \emptyset$



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, D, E\} = V$
未定義域$= \emptyset$

注意

再掲

Def 3

集合Uの各要素に，それぞれ集合Vの要素がただ一つ対応している関係をUからVへの写像という。

↓

写像の必要条件

$\mathrm{dom}(f) = U$

未定義域$= \emptyset$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c}\}$とする。次の$f: U \mapsto V$は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$
(2) {(1,b), (1,a), (2,c)}
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c}\}$とする。次の$f: U \mapsto V$は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない
(2) {(1,b), (1,a), (2,c)}
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c}\}$とする。次の$f: U \mapsto V$は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない
(2) {(1,b), (1,a), (2,c)} ×：そもそも写像でない
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c}\}$とする。次の$f: U \mapsto V$は全射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ ×：そもそも写像でない
(2) {(1,b), (1,a), (2,c)} ×：そもそも写像でない
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c})\}$ ×：そもそも写像でない
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{a}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, V = \{a,b,c\}$ とする。次の
$f: U \mapsto V$は全射であるか？
(1) $\{(2,c),(3,d)\}$ ×：そもそも写像でない
(2) {(1,b), (1,a), (2,c)} ×：そもそも写像でない
(3) $\{(3,b),(2,a),(1,c)\}$ ×：そもそも写像でない
(4) $\{(2,b),(3,a),(1,a),(4,c)\}$ ○

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x+1$$

が全射であることを証明せよ。

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x+1$$

が全射であることを証明せよ。
証明
定義に戻れ: Def 7
写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U, f(x) = y$$

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」
全称命題では∀をとる！！
存在命題では、
$y \in \mathbb{R}$について$f(x) = y$となるxを見つける！！

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto 2x+1$$

が全射であることを証明せよ。
証明
定義に戻れ: Def 7
写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について

$$\forall y \in V, \exists x \in U \ s.t. f(x) = y$$

が成り立つとき，fはUからVへの「全射」
$y \in \mathbb{R}$について $x = \frac{y-1}{2}$が存在する。
$y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$より，$\forall y \in \mathbb{R}$について $\exists x, f(x) = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$
従って，fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への全射である。 ■

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

は全射でないことを証明せよ。

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$$

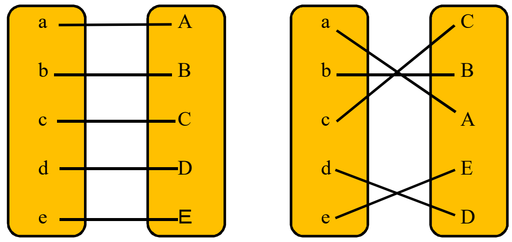
は全射でないことを証明せよ。
証明
定義に戻れ: Def 7
写像$f: U \mapsto V; f(x)$ について
$\forall y \in V, \exists x \in U \ s.t. f(x) = y$が成り立つとき，$f$は$U$から$V$への「全射」
全称命題の否定→反例の存在の証明
$y = f(x)$とすると$y \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$より，$y = -1$に対して $f(x) = -1$となる実数xが存在しない。従って，
$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$は全射でない ■

11. 全単射

Def. 8

写像$f: U \mapsto V; f(x)$ が単射かつ全射であるとき，f はUからVへの全単射という。

全単射の例



$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, D, E\} = V$
未定義域$= \emptyset$

$\mathrm{dom}(f) = \{a, b, c, d, e\} = U$
$\mathrm{ran}(f) = \{A, B, C, D, E\} = V$
未定義域$= \emptyset$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$
(2) {(1,b), (2,a), (3,c)}
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × :そもそも写像でない
(2) {(1,b), (2,a), (3,c)}
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × :そもそも写像でない
(2) {(1,b), (2,a), (3,c)} × :そもそも写像でない
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U = \{1,2,3,4\}, \mathrm{V} = \{\mathrm{a, b, c, d}\}$ とする。次の$f: U \mapsto V$は全単射であるか？

(1) $\{(2, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × :そもそも写像でない
(2) {(1,b), (2,a), (3,c)} × :そもそも写像でない
(3) $\{(3, \mathrm{b}), (2, \mathrm{a}), (1, \mathrm{c}), (3, \mathrm{d})\}$ × : 3に二つの要素が対応
(4) $\{(2, \mathrm{b}), (3, \mathrm{a}), (1, \mathrm{d}), (4, \mathrm{c})\}$

例題1

$U=\{1,2,3,4\}, \mathrm{V}=\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}\}$ とする。次の
$f: U \mapsto V$は全単射であるか？

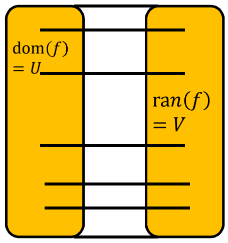
(1) $\{(2,\mathrm{c}),(3,\mathrm{d})\}$ × ：そもそも写像でない

(2) {(1,b), (2,a), (3,c)} × ：そもそも写像でない

(3) $\{(3,\mathrm{b}),(2,\mathrm{a}),(1,\mathrm{c}),(3,\mathrm{d})\}$ × ：3に二つの要素が対応

(4) $\{(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(1,\mathrm{d}),(4,\mathrm{c})\}$ ○

重要ポイント：全単射のイメージ



$\mathrm{dom}(f)=U$
$\mathrm{ran}(f)=V$
未定義域$=\emptyset$

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5+1$$

が全単射であることを証明せよ。

例題2.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^5+1$$

が全単射であることを証明せよ。

証明単射と全射それぞれを証明

単射$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1)=f(x_2)$と仮定する。 ${x_1}^5+1={x_2}^5+1$のとき$x_1=x_2$ となる。従って，fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への単射である。

全射 $y \in \mathbb{R}$について $x=\sqrt[5]{y-1}$が存在する。

$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$より，$\forall y \in \mathbb{R}$について $\exists x$, $f(x)=\sqrt[5]{y-1}^{\,5}+1=y$.

従って，fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への全射である。

fは$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$への単射かつ全射であるので全単射である。 ■

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

例題3.

$$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^4$$

は全単射でないことを証明せよ。

証明

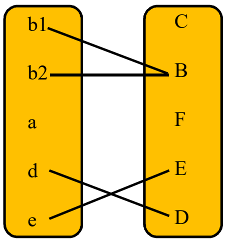
全称命題の否定→反例の存在の証明　単射でも全射でもないのでどちらかを示せば十分。

単射$x_1=-1, x_2=1$のとき${x_1}^4={x_2}^4$となり、定義に矛盾する。従ってfは単射ではない。

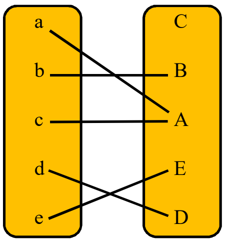
全射$y=f(x)$とすると$y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$より，$y=-1$に対して$f(x)=-1$となる実数$x$が存在しない。従って，

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$は全射でない ■

まとめの問題　以下はどのような写像か？

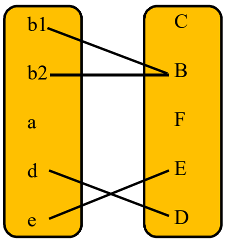


？？？？？

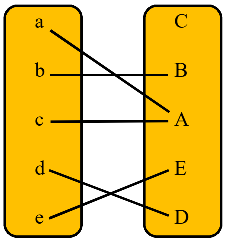


？？？？？

まとめの問題　以下はどのような写像か？

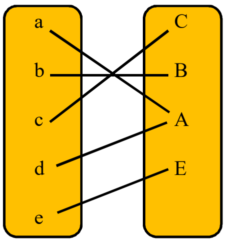


部分写像

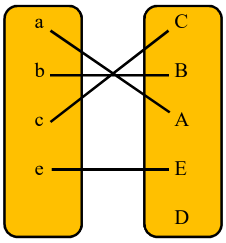


写像（関数）
⊆部分写像

まとめの問題　以下はどのような写像か？

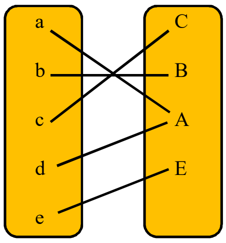


？？？？？

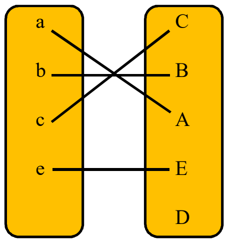


？？？？？

まとめの問題　以下はどのような写像か？

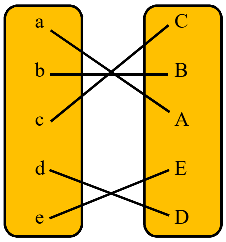


全射⊆
写像⊆部分写像



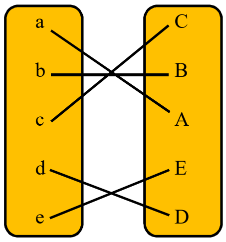
単射⊆
写像⊆部分写像

まとめの問題　以下はどのような写像か？



？？？？？

まとめの問題　以下はどのような写像か？



全単射⊆ 全射または⊆単射⊆
写像⊆部分写像

まとめ

① 関係の紹介
② 関数の中の関数、写像
③ 部分写像と写像
④ 単射と全射、全単射

演習問題

問題1

$U = \{1,2,3,4\}, V = \{1,2,3,4\}$ とする。次の $f: U \mapsto V$は部分写像、写像、単射、全射、全単射、恒等写像のどれであるか？複数回答可。

(1) $\{(1,2), (2,1), (3,2), (4,3)\}$
(2) $\{(2,2), (1,1), (2,2), (3,3)\}$
(3) $\{(2,1), (3,2), (4,2), (1,3)\}$
(4) $\{(3,1), (2,2), (1,4), (4,2)\}$
(5) $\{(2,1), (3,2), (4,2), (3,1)\}$

問題2

次のfは部分写像、写像、単射、全射、全単射、恒等写像のどれであるか？複数回答可。

(1) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = x^6$
(2) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x)^2 = x$
(3) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}; f(x) = x + 2$
(4) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = x - 2$
(5) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = |x|$
(6) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}; f(x) = \frac{x}{2}$, xは偶数

問題3

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \left(\begin{array}{ll} 3x - 1 & (x\text{が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x\text{が偶数のとき}) \end{array} \right.$$

は全射であることを証明せよ。

問題4

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = \left(\begin{array}{ll} 3x - 1 & (x\text{が奇数のとき}) \\ \frac{x}{2} & (x\text{が偶数のとき}) \end{array} \right.$$

は単射でないことを証明せよ。

問題5

$$f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}; f(x) = 3x$$

は写像であるが，全射でないことを証明せよ。

問題6.

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = \sin(x)$ は写像であるが、単射でないことを証明せよ。