

離散数学第 14 回演習問題類題

2016 年 7 月 21 日

1

集合 $S = \{red, blue, green, yellow\}$ について, 次のいずれが S の分割であるか答えよ.

(1) $P_1 = [\{red\}, \{blue, green\}]$

(2) $P_2 = [\{red, blue, green, yellow\}]$

(3) $P_3 = [\emptyset, \{red, blue\}, \{green, yellow\}]$

(4) $P_4 = [\{blue\}, \{red, yellow, green\}]$

2

集合 $S = \{1, 2, 3\}$ の分割をすべて求めよ.

3

次のことを証明せよ.

(1) X を空でない集合とするとき,

$$R_{\min} = \{(x, x); x \in X\}$$

は X 上の同値関係になる. X 上の任意の同値関係 R に対して, $R_{\min} \subseteq R$ が成り立つ. すな

わち, R_{\min} は X 上の最小の同値関係である.

(2) X を空でない集合とするとき,

$$R_{\max} = X \times X$$

は, X 上の同値関係になる. X 上の任意の同値関係 R に対して, $R \subseteq R_{\max}$ が成り立つ. すなわち, R_{\max} は X 上の最大の同値関係である.

(3) n を任意に固定した整数とするとき

$$R_{(n)} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{Z}, x - y \text{ は } n \text{ の倍数}\}$$

は \mathbb{Z} 上の同値関係になる. 通常は $xR_{(n)}y$ を

$$x \equiv y \pmod{n}$$

と表し, x と y は n を法として合同であるという.

(4) 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して,

$$R_f = \{(x, y); x, y \in X, f(x) = f(y)\}$$

は X 上の同値関係になる.

4

R を集合 X 上の同値関係とするとき, 次のことが成り立つことを証明せよ.

(1) $\forall x \in X : x \in [x]$

(2) $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow [x] = [y])$

(3) $\forall x, y \in X : (x \in [y] \Leftrightarrow [x] = [y])$

(4) $\forall x, y \in X : ([x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y])$

(5) $\forall x, y \in X : (xRy \Leftrightarrow \exists z \in X : x \in [z] \wedge y \in [z])$