

6. 述語と集合

植野真臣

スケジュール

4月14日: 第1回: 命題と証明
 4月21日: 第2回: 集合の基礎、全称記号、存在記号
 4月28日: 第3回: 命題論理
 5月12日: 第4回: 述語論理
 5月19日: 第5回: 述語と集合
5月26日: 第6回: 直積と冪集合
 6月2日: 第7回: 様々な証明法 (1)
 6月9日: 第8回: 様々な証明法 (2)
 6月16日: 第9回: 様々な証明法 (再帰的定義と数学的帰納法)
 6月23日: 第10回: 中間試験
 6月30日: 第11回: 写像 (関数) (1)
 7月7日: 第12回: 写像 (関数) (2)
 7月14日: 第13回: 写像と関係: 二項関係、関係行列、グラフによる表現
 7月21日: 第14回: 同値関係
 7月28日: 第15回: 順序関係: 半順序集合、ハッセ図、全順序集合、上界と下界
 8月4日: 期末試験(補講があればいずれいきます。)

2

1. 本日の目標

1. 直積
2. 集合の冪集合
3. 集合系の演算
4. ラッセルのパラドックス

2. 先週の復習:

内包的記法での条件部での量子化

1. $\{x|\forall n(P(x))\}$ は すべての n について条件 $P(x)$ を満たす共通集合 $\bigcap_n \{x|P(x)\}$ という意味
2. 内包的記述での
 $\{x|\exists n(P(x))\}$ は すべての n について条件(述語) $P(x)$ を満たす和集合 $\bigcup_n \{x|P(x)\}$ という意味

4

2. 先週の復習:

例題

1. $\{x \in \mathbb{N}|\forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
2. $\{x \in \mathbb{N}|\exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$

5

2. 先週の復習:

例題

1. $\{x \in \mathbb{N}|\forall n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
 $= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | x > n\} = \emptyset$
2. $\{x \in \mathbb{N}|\exists n \in \mathbb{N}(x > n)\}$
 $= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | x > n\} = \{x \in \mathbb{N} | x > 1\} = \mathbb{Z}^+$

\mathbb{Z}^+ : 1以上の整数

6

3. 直積

Def.1. 集合の要素 x と要素 y を順序を考慮して組にしたものを x と y の「順序対」といい、記号で (x, y) と書く。

Def.2. $x = a, y = b$ のときのみ (x, y) と (a, b) が等しいという。

Def. 3. 集合 U, V に対して、 U の要素と V の要素から作られる順序対の全体 $\{(x, y) | x \in U, y \in V\}$ を U と V の直積といい、 $U \times V$ で表す。

7

注意

$U = \emptyset$ または $V = \emptyset$ のとき $U \times V = U \times \emptyset = \emptyset \times V = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$

8

例題1

$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$ とすると、 $A \times B$ は？

9

例題1

$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$ とすると、 $A \times B$ は？

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

10

例題2

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は、自然数の順序対の全体を示す。

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x \times y = 2\}$$

の要素は？

11

例題2

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は、自然数の順序対の全体を示す。

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | x \times y = 2\}$$

の要素は？

$$A = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

12

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ を証明せよ。

13

離散数学 University of Electro-Communications

例題3

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ を証明せよ。

[証明]

$\forall(x, y)[(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)]$ を示せばよい。

$(x, y) \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \wedge [y \in B \vee y \in C] \Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \vee [x \in A \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B)] \vee [(x, y) \in (A \times C)] \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ ■

14

離散数学 University of Electro-Communications

例題4

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ を証明せよ。

15

離散数学 University of Electro-Communications

例題4

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ を証明せよ。

[証明]

$\forall(x, y)[(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)]$ を示せばよい。

$(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge [y \in B \wedge y \in C] \Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in B] \wedge [x \in A \wedge y \in C] \Leftrightarrow [(x, y) \in (A \times B)] \wedge [(x, y) \in (A \times C)] \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ ■

16

離散数学 University of Electro-Communications

4. 関係 (本授業の後半で詳しく学習します。)

Def 4.
二つの集合 U, V の直積集合 $U \times V$ の部分集合 R を U から V への「関係」という。

また、 $R \ni (a, b)$ のとき aRb : a と b は関係ある
 $R \not\ni (a, b)$ のとき $a \not R b$: a と b は関係なしと書く。

17

離散数学 University of Electro-Communications

関係の例

$$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

このとき、 $R = \{(1, 4), (2, 4)\}$
もしくは $1R4, 2R4$
は、1が4と関係がある、2が4と関係がある
ということ表現している。
「関係」の特殊なケースが **写像**や**関数**である。
(10章以上で学びます)

18

離散数学 University of Electro-Communications

例1.

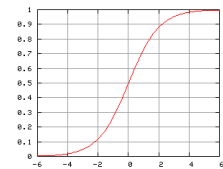
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は、実数の順序対の全体を示す。
 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は、座標軸平面上の点。

19

離散数学 University of Electro-Communications

例2.

\mathbb{R} から \mathbb{R} への関数 f に対し、
 $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = f(x)\}$
 は、「関数 f のグラフ」を示す。
 例 $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \frac{1}{1+\exp(-x+a)}\}$



20

離散数学 University of Electro-Communications

5. 冪集合

Def. 4. U の部分集合の集まりを U の冪(べき)集合 (power) といい、 $\mathcal{F}(U)$ または 2^U で表す。

21

離散数学 University of Electro-Communications

例

$U = \{a, b, c\}$ とすると、
 $2^U = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

22

離散数学 University of Electro-Communications

Th 1

集合 A について $n(A) = N$ のとき、 A の冪集合 2^A について $n(\mathcal{F}(A)) = 2^N$.

23

離散数学 University of Electro-Communications

Th 1

集合 A について $n(A) = N$ のとき、 A の冪集合 2^A について $n(\mathcal{F}(A)) = 2^N$.

[証明]

$A = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ としても一般性を失わない。このとき、 A の部分集合の取り方は、1を含むかどうか、2を含むかどうか、3を含むかどうか、... N を含むかどうかで決まるので、その総数は 2^N . ■

24

6. 集合系

Def. 5. N 個の U の部分集合 $A_1 \cdots A_N$ が与えられているとき、 $A = \{A_1 \cdots A_N\} = \{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ を**集合系**と呼ぶ。集合族と呼ばれることもある。

Th. 2.

普遍集合 U の冪集合 2^U の部分集合の集合
 $\{A \mid A \subseteq 2^U\}$

は集合系である。

25

注意: 集合系と集合族

$A = \{A_1 \cdots A_N\} = \{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ のようにインデックスがついている場合と冪集合 2^U の部分集合としてのみ扱われる場合で、集合系と集合族を区別することがある。

しかし、どちらの場合をどう呼ぶかが様々に異なり決まっていない。

ここでは、同じとして扱う。

26

7. 集合系の演算

Def. 6. 集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ について、条件 $\forall i(x \in A_i)$ を満たす x 全体の集合を「集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ の共通部分」といい、 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ と書く。すなわち、

$$\bigcap_{i=1}^n A_i$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合 \mathbb{N} のとき、 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ と書く。

27

7. 集合系の演算

Def. 6. 集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ について、条件 $\forall i(x \in A_i)$ を満たす x 全体の集合を「集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ の共通部分」といい、 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ と書く。すなわち、

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \{x \mid \forall i(x \in A_i)\}$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合 \mathbb{N} のとき、 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ と書く。

28

7. 集合系の演算

Def. 7. 集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ について、条件 $\exists i(x \in A_i)$ を満たす x 全体の集合を「集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ の和集合」といい、 $\bigcup_{i=1}^N A_i$ と書く。すなわち、

$$\bigcup_{i=1}^N A_i$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合 \mathbb{N} のとき、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ と書く。

29

7. 集合系の演算

Def. 7. 集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ について、条件 $\exists i(x \in A_i)$ を満たす x 全体の集合を「集合系 $\{A_i\}(i = 1, \dots, N)$ の和集合」といい、 $\bigcup_{i=1}^N A_i$ と書く。すなわち、

$$\bigcup_{i=1}^N A_i = \{x \mid \exists i(x \in A_i)\}$$

ただし、左辺は添え字の集合が自然数集合 \mathbb{N} のとき、 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ と書く。

30

7. 集合系の演算

$I = \{1, \dots, N\}$ もしくは $I = \mathbb{N}$ のときを统一的に
共通部分を

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

和集合を

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

と書くこともある。

31

例

$I = \{1, 2\}$ のとき,

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2.$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2.$$

$I = \{1, 2, \dots\}$ のとき,

$\bigcap_{i \in I} A_i$, $\bigcup_{i \in I} A_i$ は2個の集合の共通部分, 和集合の一般化である。

32

例題1

$n \in \mathbb{N}$ に対し, 集合 B_n を $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$ とし,
集合系 $\{B_n\} (n \in \mathbb{N})$ の共通部分と和集合は

33

例題1

\mathbb{N} の要素 n に対し, 集合 B_n を $B_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$
とし, 集合系 $\{B_n\} (n \in \mathbb{N})$ の共通部分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x \mid \forall n (x \geq n)\} = \emptyset,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{x \mid \exists n (x \geq n)\} = \{x \mid x \geq 0\}$$

34

例題2

\mathbb{N} の1以上の要素 n に対し, 集合 A_n を $A_n =$
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{n}\}$ とし, 集合系 $\{A_i\} (i \in \mathbb{N})$ の共通部
分と和集合は

35

例題2

\mathbb{N} の1以上の要素 n に対し, 集合 A_n を $A_n =$
 $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{n}\}$ とし, 集合系 $\{A_i\} (i \in \mathbb{N})$ の共通部
分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n (x < \frac{1}{n})\} = \{x \mid x \leq 0\},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n (x < \frac{1}{n})\} = \{x \mid x < 1\}$$

36

例題3

\mathbb{N} の1以上の要素 n に対し、集合 A_n を $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \frac{1}{n}\}$ とし、集合系 $\{A_i\} (i \in \mathbb{N})$ の共通部分と和集合は

37

例題3

\mathbb{N} の1以上の要素 n に対し、集合 A_n を $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < \frac{1}{n}\}$ とし、集合系 $\{A_i\} (i \in \mathbb{N})$ の共通部分と和集合は

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \forall n (|x| < \frac{1}{n})\} = \{0\}.$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \exists n (|x| < \frac{1}{n})\} = \{x \mid -1 < x < 1\}$$

38

分配律

集合 A と集合系 $\{B_n\} (n \in \mathbb{N}), I \subseteq \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

39

ド・モルガンの法則

普遍集合を U とする集合系 $\{A_i\} (i \in \mathbb{N}), I \subseteq \mathbb{N}$ について以下が成り立つ。

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

40

集合の集合の問題

我々は 本日、集合の集合について考えてきた。しかし、集合の集合を数学的に体系づけるときに重要な問題が発見されている。

41

8. ラッセルのパラドックス

ラッセルは集合の集合は次の二つのものしかないと考えた。

A: 自分自身を要素とする集合の集合

B: 自分自身を要素としない集合の集合

42

ラッセルは集合は次の二つのものしかないと考えた。

集合A: 自分自身を要素とする集合の集合
 集合B: 自分自身を要素としない集合の集合

Aの例: 要素の個数が無限の集合の集合 →
 要素の個数が無限の集合は無限に存在するので
 それ自身もAに属する。

Bの例: 遊びの集合の集合を考える。遊びの集合
 は遊びではないので自分自身を要素としない集合
 の集合Bに入る。

43

8. ラッセルのパラドックス

自分自身を含まない集合全体の集合 $R = \{x | x \notin x\}$ は存在しない。

44

8. ラッセルのパラドックス

自分自身を含まない集合全体の集合 $R = \{x | x \notin x\}$ は存在しない。

証明

1. $R \in R$ の場合
 $R = \{x | x \notin x\}$ より, $R \notin R$ となり矛盾

2. $R \notin R$ の場合
 $R = \{x | x \notin x\}$ より, $R \in R$ となり矛盾

例: すべての集合を含む集合
 集合論で, R が集合の定義としては許容されないような体系が構築
 されてきた。

45

8. ラッセルのパラドックス

床屋の深刻な問題

以下のようなルールを課せられた町に一人だけ存在する床屋が
 いる。

- ・自分でひげをそらない町の人全員のひげをそる。
- ・自分でひげをそる町の人ひげはそらない。

このとき、床屋自身は自分のひげはそるのか？

46

8. ラッセルのパラドックス 解決法

$A = \{x | x \in x\}$ も $B = \{x | x \notin x\}$ も 集合ではな
 いと考える。

→

自分自身が要素となる概念を使って集合を定義し
 てはならない

→

集合理論: ZFC公理系

47

10. まとめ

1. 直積
2. 集合の冪集合
3. 集合系の演算
4. ラッセルのパラドックス

48

演習問題

49

問題1

$U = \{1,2,3,4\}, V = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ とし、それぞれの部分集合を $S = \{n \in U | n \leq 3\}, T = \{n \in V | n \leq 6\}$ とする。直積 $U \times V$ を普遍集合とし、次に示す集合を外延的記法で表せ。

- (1) $\{(x, y) | x + y < 5\}$
- (2) $\{(x, y) | y = 2x + 1\}$
- (3) $\{1, 3\} \times V$
- (4) $(S \times T)^c$
- (5) $S^c \times T^c$

50

問題2

$A = B \cap C \rightarrow A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$
を証明せよ。

51

問題3

$U = \{1,2,3,4\}$ の冪集合 $\mathcal{F}(U)$ を外延的記法で示せ。

52

問題4

次の集合系について、共通部分と和集合を求めよ。

- (1) $\langle A_n | n \in \mathbb{N} \rangle \quad A_n = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \leq \frac{1}{n}\}$
- (2) $\langle B_n | n \in \mathbb{N} \rangle \quad B_n = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -n \text{ and } x < \frac{1}{n}\}$
- (3) $\langle C_n | n \in \mathbb{N} \rangle \quad C_n = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \text{ and } x \leq \frac{1}{n}\}$
- (4) $\langle D_n | n \in \mathbb{N} \rangle \quad D_n = \{x \in \mathbb{R} | x \geq n \text{ and } x < n + 1\}$

53

問題5.

次の述語の演算法則を用いて、集合系の分配律を証明せよ。

「 x を含まない命題 p と自由変数 x についての述語 $Q(x)$ について、以下が成り立つ。

$$p \vee (\forall x [Q(x)]) \equiv \forall x [p \vee Q(x)]$$

$$p \wedge (\exists x [Q(x)]) \equiv \exists x [p \wedge Q(x)]$$

54